ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, КОТОРЫЕ ДОПУСКАЮТ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. Е. Березовский, Й. Микеш
Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина,
Университет Палацкого, Оломоуц, Чехия
berez.volod@rambler.ru, josef.mikes@upol.cz

Под диффеоморфизмом пространств аффинной связности понимают взаимно однозначное гладкое отображение, обратное к которому также является гладким отображением. Среди диффеоморфизмов пространств аффинной связности важную роль играют геодезические отображения.

Предположим, что пространство аффинной связности A_n допускает диффеоморфизм f на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Положим

$$P_{ij}^h(x) = \overline{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x), \tag{1}$$

где Γ_{ij}^h и $\overline{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\overline{A}_n$ соответственно в указанной системе координат, $P_{ij}^h(x)$ — тензор деформации связностей при диффеоморфизме f.

Нами доказана

Теорема 1. *Тензор Римана сохраняется при диффеоморфизме* $f : A_n \to \overline{A}_n$ *тогда и только тогда, когда тензор*

$$A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h$$

удовлетворяет условиям $A_{ijk}^h = A_{ikj}^h$.

Кривую, определенную в пространстве A_n , называют *геодезической*, если ее касательный вектор параллелен вдоль нее.

Диффеоморфизм $f : A_n \to \overline{A}_n$ называют *геодезическим отображением*, если при этом все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Известно (Berezovski, Bácsó, Mikeš, 2015; Mikeš, Berezovski at al., 2015), что для того чтобы отображение f пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

тензор деформации связностей представлялся в виде

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h, \qquad (2)$$

где δ_i^h — символы Кронекера и $\psi_i(x)$ — некоторый градиентный вектор.

Нами доказана

Теорема 2. *Пространство аффинной связности* A_n *допускает геодезическое отображение на пространство аффинной связности* $\overline{A}_n$ *с сохранением тензора Римана тогда и только тогда, когда система Коши* $\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j$ *имеет в нем решение относительно неизветных функций* $\psi_i(x)$.

Допустим, что пространство A_n плоское. Тогда основные уравнения в аффинной системе координат принимают вид

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x^k} = \psi_i\psi_j. \qquad (3)$$

Вектор ψ_i является градиентным, то есть, существует функция ψ, такая, что $\psi_i = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$. Тогда уравнения (3) принимают вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j} = \psi_i\psi_j.$$

Общим решением этих уравнений будут функции

$$\psi = -\ln\left|C_0 + C_1x^1 + \cdots + C_nx^n\right|,$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Поэтому, тензор

$$\psi_i = -C_i \cdot (C_0 + C_1x^1 + \cdots + C_nx^n)^{-1}.$$

Учитывая, что пространство A_n плоское, на основании формул (1) и (2) получим

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{C_0 + C_1x^1 + \cdots + C_nx^n}(C_i\delta_j^h + C_j\delta_i^h). \qquad (4)$$

Учитывая, что тензор Римана $\overline{R}_{ijk}^h$ пространства аффинной связности $\overline{A}_n$ выражается через компоненты объекта аффинной связности по формулам

$$\overline{R}_{ijk}^h = \partial_j\overline{\Gamma}_{ik}^h + \overline{\Gamma}_{ik}^\alpha(x)\overline{\Gamma}_{\alpha j}^h(x) - \partial_k\overline{\Gamma}_{ij}^h - \overline{\Gamma}_{ij}^\alpha(x)\overline{\Gamma}_{\alpha k}^h(x),$$

можно убедиться в том, что $\overline{R}_{ijk}^h = 0$.

Тем самым мы доказали, что плоские пространства аффинной связности A_n допускают геодезические отображения на пространства афинной связности $\overline{A}_n$ с компонентами аффинной связности (4), причем тензор Римана таких пространств тождественно обращается в нуль.

В силу того, что в общем случае $\psi_i(x) \neq 0$, указанные геодезические отображения отличные от аффинных.

Список литературы

Berezovski, V. E., Bácsó, S., Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature. *Ann. Math. Informat., 45*, 3–10.

Mikeš J., Berezovski, V. E. at al. (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University.