Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры. Том 126 (2014). С. 62–95

УДК 514.7

ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

© 2014 г. **В. БЕРЕЗОВСКИЙ, Й. МИКЕШ**

Аннотация. Работа посвящена дальнейшему исследованию теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, введенных Н. С. Синюковым.

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта Грантового Агентства Чешской Республики № P201/11/0356.

ISSN 0233–6723

1. Введение

Работа посвящена дальнейшему исследованию теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности. Эта теория идейно восходит к работе Т. Леви-Чивиты [90]. Он поставил и решил (в специальной системе координат) задачу о нахождении римановых пространств с общими геодезичекими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем.

Затем теория геодезических отображений развивалась в работах Томаса, Вейля, Широкова, Солодовникова, Синюкова, Микеша и др. [40, 42, 43, 49, 56, 84, 88, 92, 99, 112, 113].

Вопросы, поднятые при изучении геодезических отображений, были развиты Каганом, Врэнчану, Рашевским, Шапиро, Веденяпиным и другими. Перечисленными авторами найдены специальные классы $(n-2)$-проективных пространсв (см. [20, 27, 49, 112, 113]).

А. З. Петровым [41] было введено понятие квазигеодезических отображений. Специальными квазигеодезическими отображениями, в частности, являются голоморфно-проективные отображения келеровых пространств, рассмотренные первоначально Отцуки, Тасиро [100, 111], Прванович [101] и другими (см. [1, 24, 28, 34, 49, 50, 61, 62, 87, 88, 93, 99, 112, 113]).

Естественным обобщением этих классов отображений являются почти геодезические отображения, введенные Н. С. Синюковым [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50]. Им же выделены три типа почти геодезических отображений (π_1, π_2, π_3).

В посленее время были получены новые результаты, которые не влючены в обзорную статью Синюкова [50], вышедшую около 30 лет тому назад.

2. О классификации почти геодезических отображений пространств аффинной связности

Напомним основные понятия и теоремы теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, изложенные Н. С. Синюковым в [44, 46, 48, 49, 50].

Рассмотрим пространство аффинной связности A_n без кручения, отнесенное к локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ с объектом связности $\Gamma^h_{ij}(x)$.

Кривая $\ell : x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n, $n > 2$, называется почти геодезической линией, если ее касательный вектор $l^h = dx^h/dt$ удовлетворяет уравнениям

$$l_2^h = a(t) \cdot l^h + b(t) \cdot l_1^h, \tag{2.1}$$

где $l_1^h \equiv l^h_{,\alpha}\, l^\alpha$, $l_2^h \equiv l^h_{1,\alpha}\, l^\alpha$, запятая обозначает ковариантное дифференцирование по связности пространства A_n, $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции указанного аргумента.

Отображение π пространства аффинной связности A_n на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ называется *почти геодезическим отображением*, если каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую геодезическую линию пространства $\bar{A}_n$.

Теорема 1 (Н. С. Синюков [49])**.** *Для того чтобы отображение A_n на $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P^h_{ij} = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}$ удовлетворял тождественно относительно $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $l^1, l^2, \dots, l^n$ условиям*

$$(P^h_{\alpha\beta,\gamma} + P^h_{\delta\alpha}P^\delta_{\beta\gamma})l^\alpha l^\beta l^\gamma = b\, P^h_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + a\, l^h, \tag{2.2}$$

где Γ^h_{ij}, $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ — компоненты объекта аффинной связности A_n ($\bar{A}_n$), $l^1, l^2, \dots, l^n$ — компоненты некоторого вектора, a и b — некоторые инварианты, зависящие от $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $l^1, l^2, \dots, l^n$.

В соответствии с характером зависимости инвариантов a и b от $l^1, l^2, \dots, l^n$ Синюков выделил три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3:

1) отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ является почти геодезическим типа π_1, если выполнются условия

$$P^h_{(ij,k)} + P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} = \delta^h_{(i}a_{jk)} + b_{(i}P^h_{jk)}, \tag{2.3}$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор, b_i — некоторый ковектор;

2) отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ является почти геодезическим типа π_2, если выполняются условия

$$P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\phi_{j)}, \tag{2.4}$$

$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\phi_{j)} = \delta^h_{(i}\mu_{j)} + F^h_{(i}\varrho_{j)}, \tag{2.5}$$

где ψ_i, ϕ_i, μ_i, ϱ_i — некоторые векторы, F^h_i — аффинор;

3) отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ является почти геодезическим типа π_3, если выполняются условия

$$P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \phi^h \varnothing_{ij}, \tag{2.6}$$

$$\phi^h_{,i} = \phi^h \theta_i + \varrho \delta^h_i, \tag{2.7}$$

где ϕ^h, ψ_i, θ_i — некоторые весторы, $\varnothing_{ij}$ — некоторый симметрический тензор и ϱ — некоторый инвариант.

Заметим, что указанные типы почти геодезических отображений могут пересекаться.

В плоском пространстве $\bar{A}_n$ почти геодезические линии являются кривыми, принадлежащими двумерным плоскостям. Поэтому пространства A_n, допускающие почти геодезическое отображение на плоское пространство $\bar{A}_n$, являются $(n-2)$-проективными пространствами ([112, 27]). Их называют $(n-2)$-проективными пространствами первого, второго или третьего типа в соответствии с типами отображений π_1, π_2 и π_3.

Бесконечно малое преобразование пространства A_n

$$\tilde{x}^h = x^h + \varepsilon \cdot \xi^h(x) \tag{2.8}$$

называют *почти геодезическим*, если в результате его каждая геодезическая линия A_n переходит в кривую, являющуюся в главном почти геодезической этого пространства, т.е. выполняются условия (2.1) в пренебрежении членами второго и более высоких порядков относительно ε для любой геодезической в A_n.

Теорема 2 (Н. С. Синюков [49]). *Для того чтобы бесконечно малое преобразование* (2.8) *пространства A_n было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая его вектору смещения производная Ли коэффициентов связности этого пространства удовлетворяла тождественно относительно $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и $l^1, l^2, \ldots, l^n$ условиям*

$$P^h_{\alpha\beta,\gamma} l^\alpha l^\beta l^\gamma = a\, P^h_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + b\, l^h, \tag{2.9}$$

где

$$P^h_{ij}(x) = \xi^h_{,ij} - \xi^\alpha\, R^h_{ij\alpha}. \tag{2.10}$$

Выделены три типа бесконечно малых почти геодезических преобразований π_1, π_2 и π_3, которые соответственно характеризуются условиями (2.3), (2.4)+(2.5) и (2.6)+(2.7), причем тензор деформации P^h_{ij} имеет представление (2.10).

Аналогичные понятия были введены Н. В. Яблонской для почти геодезических отображений и преобразований общих пространств аффинной связности [63, 64, 65, 66].

Вопрос о полноте классификации почти геодезических отображений пространств аффинной связности долгое время был открыт.

Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 3 (Березовский, Микеш [69, 73]). *Других типов почти геодезических отображений пространств аффинной связности при размерности пространств $n > 5$, кроме π_1, π_2 и π_3, не существует.*

В силу того, что условия, характеризующие три типа бесконечно малых почти геодезических преобразований, аналогичны условиям, характеризующим три типа π_1, π_2 и π_3 почти геодезических отображений, имеет место теорема.

Теорема 4 (Березовский, Микеш [69]). *Других типов бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности при размерности пространств $n > 5$, кроме π_1, π_2 и π_3, не существует.*

Из теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 5 (Березовский, Микеш [69]). *Существует только три типа $(n-2)$-проективных пространств A_n при размерности пространств $n > 5$.*

Для общих пространств аффинной связности также имеет место теорема.

Теорема 6 (Березовский, Микеш [69]). *Существует только три типа π_1, π_2 и π_3 почти геодезических отображений и бесконечно малых преобразований общих пространств аффинной связности A_n при размерности пространств $n > 5$.*

3. Почти геодезические канонические отображения первого типа пространств аффинной связности

Пространство аффинной связности A_n допускает отображение π_1 на некоторое пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, если в A_n существует симметрический тензор P^h_{ij}, удовлетворяющий уравнениям (2.3) при некотором симметрическом тензоре a_{ij} и векторе b_i. Образом каждой геодезической линии ℓ пространства A_n при отображении $\pi_1 : A_n \to \bar{A}_n$ будет почти геодезическая линия $\bar{\ell}$ пространвтсва

$\bar{A}_n$ с компланарным распределением $E_2\{l^h, P^h_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta\}$, где l^h — касательный вектор.

Если для отображения π_1 вектор b_i тождественно равен нулю, то отображение называют каноническим и обозначают через $\tilde{\pi}_1$. Каждое отображение π_1 можно представить в виде композиции канонического отображения $\tilde{\pi}_1$ и геодезического отображения. Последнее можно считать тривиальным почти геодезическим отображением, которым можно пренебречь.

Итак, при отображении $\pi_1 : A_n \to \bar{A}_n$ в общей по отображению системе координат для тензора деформации связностей $P^h_{ij} = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}$ имеем уравнение
$$P^h_{(ij,k)} + P^\alpha_{(ij} P^h_{k)\alpha} = \delta^h_{(i} a_{jk)}. \tag{3.1}$$

Учитывая зависимость между тензорами Римана R^h_{ijk} и $\bar{R}^h_{ijk}$ пространств A_n и $\bar{A}_n$ из уравнений (3.1) эквивалентно получим
$$3\,(P^h_{ij,k} + P^h_{k\alpha} P^\alpha_{ij}) = R^h_{(ij)k} - \bar{R}^h_{(ij)k} + \delta^h_{(i} a_{jk)}. \tag{3.2}$$

Изучая уравнения (3.2), Синюков [50] доказал, что основные уравнения канонических почти геодезических отображений пространств аффинной связности A_n на Риччи-симметрические римановы пространства $\bar{V}_n$ можно представить в виде замкнутой системы типа Коши в ковариантных производных. Следовантельно, семейство всех Риччи-симметрических римановых пространств $\bar{A}_n$, на которые допускает отображение $\tilde{\pi}_1$ некоторое заданное пространство аффинной связности, зависит от конечного числа параметров.

С другой стороны, геодезические отображения являются частным случаем отображений $\tilde{\pi}_1$, так как для них выполняются условия (3.1). Однако основные уравнения геодезических отображений пространств аффинной связности не сводятся к замкнутым системам типа Коши в виду того, что общее решение зависит от n производных функций.

Следовательно, основные уравнения (3.1) или (3.2) теории канонических почти геодезических отображений $\tilde{\pi}_1$ пространств аффинной связности в общем случае не сводятся к замкнутым системам типа Коши.

Обобщенным Риччи-симметрическим пространством [80, 81] называют пространство аффинной связности A_n, тензор Риччи которого удовлетворяет условиям
$$\bar{R}_{ij\wr k} + \bar{R}_{kj\wr i} = 0,$$

где знак «$\wr$» обозначает ковариантную производную в пространстве $\bar{A}_n$.

Рассмотрим отображения $\tilde{\pi}_1$ пространств аффинной связности на обобщенные Риччи-симметрические пространства. Изучая уравнение (3.2) для таких отображений, можно получить

$$\frac{n^2+n-2}{n}a_{ij,l} = -\theta^{\alpha}_{ij\alpha l} - \frac{1}{n}\,\theta^{\alpha}_{(i|l\alpha|j)}, \tag{3.3}$$

$$\bar{R}^h_{jml,i} = \bar{R}^h_{jmli}, \tag{3.4}$$

$$\bar{R}^h_{jmli,k} = \varnothing^h_{jmlik}(a_{ij}, P^h_{ij}, \bar{R}^h_{ijk}, \bar{R}^h_{ijkl}, R^h_{ijk}, R^h_{ijkl}), \tag{3.5}$$

где

$$\theta^h_{ijkl} = R^h_{(ij)[k,l]} + 3(P^{\alpha}_{ij}\bar{R}^h_{\alpha kl} - P^h_{\alpha(j}R^{\alpha}_{i)kl}) -$$

$$-P^h_{\alpha k}(R^{\alpha}_{(ij)l} + \delta^{\alpha}_{(i}a_{jl)}) + P^h_{\alpha l}(R^{\alpha}_{(ij)k} + \delta^{\alpha}_{(i}a_{jk)}) -$$

$$-P^{\alpha}_{l(i}\bar{R}^h_{|\alpha|j)k} - P^{\alpha}_{l(i}\bar{R}^h_{j)\alpha k} + P^{\alpha}_{k(i}\bar{R}^h_{|\alpha|j)l} + P^{\alpha}_{k(i}\bar{R}^h_{j)\alpha l},$$

функции $\varnothing^h_{jmlik}(a_{ij}, P^h_{ij}, \bar{R}^h_{ijk}, \bar{R}^h_{ijkl}, R^h_{ijk}, R^h_{ijkl})$ зависят от указанных аргументов и определены в [81].

Очевидно, уравнения (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) в данном пространстве A_n представляют собой замкнутую систему типа Коши в ковариантных производных относительно функций:

$$a_{ij}(x), P^h_{ij}(x), \bar{R}^h_{ijk}(x), \bar{R}^h_{ijkl}(x), \tag{3.6}$$

которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x), \quad \bar{R}^h_{i(jk)}(x) = R^h_{(ijk)}(x) = 0. \tag{3.7}$$

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 7 (Березовский, Микеш [80, 81]). *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало каноническое почти геодезическое отображение $\tilde{\pi}_1$ на обобщенное Риччи-симметрическое пространство $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.7) *относительно функций* (3.6).

Из этой теоремы следует, что семейство всех обобщенных Риччи-симметрических пространств, на которые допускает отображение $\tilde{\pi}_1$

заданное пространство аффинной связности A_n, зависит не более чем от
$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n^3-4n^2+5n+3)$$
параметров.

Рассмотрим отображения $\tilde{\pi}_1$ пространств аффинной связности A_n на римановы пространства $\bar{V}_n$ с метриками $\bar{g}_{ij}$. Поскольку $P^h_{ij}=\bar{\Gamma}^h_{ij}-\Gamma^h_{ij}$, то
$$\bar{g}_{ij,k}=P^{\alpha}_{ki}\bar{g}_{\alpha j}+P^{\alpha}_{kj}\bar{g}_{\alpha i}. \tag{3.8}$$

Изучая уравнения (3.2) для отображений $\tilde{\pi}_1$ пространств аффинной связности на римановы пространства $\bar{V}_n$ и вводя в рассмотрение некоторые тензоры, можно получить
$$a_{ij,k}=a_{ijk}, \tag{3.9}$$
$$\bar{R}^h_{ijk,l}=\bar{R}^h_{ijkl}, \tag{3.10}$$
$$K_{,k}={}^1\varnothing_k(\bar{g}_{ij},a_{ij},a_{ijk},P^h_{ij},\bar{R}^h_{ijk}), \tag{3.11}$$
$$a_{ijkl,m}={}^2\varnothing_{ijkm}(\bar{g}_{ij},a_{ij},a_{ijk},P^h_{ij},\bar{R}^h_{ijk},K), \tag{3.12}$$
$$\bar{R}^h_{ijk,m}={}^3\varnothing^h_{ijklm}(\bar{g}_{ij},a_{ij},a_{ijk},P^h_{ij},\bar{R}^h_{ijk},K), \tag{3.13}$$
где $K=a_{\alpha\beta,\gamma\delta}\cdot\bar{g}^{\alpha\beta}\cdot\bar{g}^{\gamma\delta}$, функции ${}^1\varnothing,{}^2\varnothing,{}^3\varnothing$ зависят от указанных аргументов и определены в [81].

Очевидно, уравнения (3.2), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) в данном пространстве A_n представляют собой замкнутую систему типа Коши в ковариантных производных относительно функций:
$$\bar{g}_{ij},a_{ij},a_{ijk},P^h_{ij},\bar{R}^h_{ijk},K, \tag{3.14}$$
которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера
$$\begin{gathered}\bar{g}_{ij}(x)=\bar{g}_{ji}(x),\quad |\bar{g}_{ij}(x)|\neq 0,\quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\\ P^h_{ij}(x)=P^h_{ji}(x),\quad \bar{R}^h_{i(jk)}(x)=\bar{R}^h_{(ijk)}(x)=0.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 8 (Березовский, Микеш [81]). *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало каноническое почти геодезическое отображение $\tilde{\pi}_1$ на риманово пространство $\bar{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (3.2), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.15) *относительно функций* (3.14).

Из этой теоремы следует, что семейство всех римановых пространств $\bar{V}_n$, на которые допускает отображение $\tilde{\pi}_1$ заданное пространство аффинной связности A_n, зависит не более чем от

$$\frac{1}{2}n^2(n^2-1)+n(n+1)^2+1$$

параметров.

Именно, так как геодезические отображения можно считать частным случаем канонических почти геодезических отображений $\tilde{\pi}_1$, то для них справедливы теоремы 7 и 8.

В частности, имеют место следующая теорема.

Теорема 9 (Березовский, Микеш [36, 95]). *Пространство аффинной связности A_n допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$ тогда и только тогда, когда следующая система уравнений в ковариантных производных типа Коши имеет решение в пространстве A_n относительно невырожденного симметрического тензора $\bar{g}_{ij}(x)$, вектора $\psi_i(x)$ и инварианта $\mu(x)$:*

$$\bar{g}_{ij,k}=2\psi_k\bar{g}_{ij}+\psi_i\bar{g}_{jk}+\psi_j\bar{g}_{ik}\ ,$$

$$n\,\psi_{i,j}=n\,\psi_i\psi_j+\mu\,\bar{g}_{ij}-R_{ij}+\bar{g}_{i\alpha}R^{\alpha}_{\beta\gamma j}\bar{g}^{\beta\gamma}-\frac{2}{n+1}R^{a}_{\alpha ij}\ ,$$

$$\begin{gathered}(n-1)\,\mu_{,k}=\\ =\psi_\alpha\left(2(n-1)\,R^{\alpha}_{\beta\gamma k}\bar{g}^{\beta\gamma}+5R_{\beta k}\bar{g}^{\alpha\beta}-R_{k\beta}\bar{g}^{\alpha\beta}+\frac{6}{n+1}R^{\gamma}_{\gamma\beta k}\bar{g}^{\alpha\beta}\right)+\\ +\bar{g}^{\alpha\beta}\left(R^{\gamma}_{\alpha\beta k,\gamma}-R_{\alpha k,\beta}-\frac{2}{n+1}\,R^{\gamma}_{\gamma\alpha k,\beta}\right)\ ,\end{gathered}$$

где $\bar{g}^{\alpha\beta}$ — компоненты обратной матрицы к $\|\bar{g}_{\alpha\beta}\|$, R^h_{ijk}, R_{ij} — соответственно тензоры Римана и Риччы пространства A_n.

Теорема 10 (Березовский, Микеш [36, 95]). *Пространство A_n с эквиаффинной связностью допускает нетривиальное геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$ тогда и только тогда, когда следующая система уравнений* *в ковариантных производных типа Коши имеет решение относительно невырожденного симметрического тензора* $a^{ij}(x)$, *ненулевого вектора* $l^i(x)$ *и инварианта* $\mu(x)$:

$$a^{ij}{}_{,k} = l^i\delta^j_k + l^j\delta^i_k\ ,$$

$$n\,l^i_{,j} = \mu\,\delta^i_j + a^{i\alpha}R_{\alpha j} - a^{\alpha\beta}R^i_{\alpha\beta j}\ ,$$

$$(n-1)\,\mu_{,i} = 2(n+1)l^\alpha R_{\alpha i} + a^{\alpha\beta}(2R_{\alpha i,\beta} - R_{\alpha\beta,i})\,.$$

В работе И. Гинтерлейтнер и Й. Микеша [21] было установлено, что любое пространство афинной или проективной связности является проективно эквивалентным некоторому пространству с эквиафинной связности «в целом». Доказательство этого факта конструктивно.

На основании свойства второго уравнения приведенной системы уравнений и [86, лемма 3] справедливо аналогичное [86, теорема 2] утверждение: *Если пространство аффинной связности* $A_n \in C^{r-1}$, $r > 2$, *т.е.* $\bar\Gamma^h_{ij} \in C^{r-1}$ *допускает геодезическое отображение на (псевдо)риманово пространство* $\bar V_n \in C^2$, *т.е.* $\bar g_{ij} \in C^2$, *то по необходимости* $\bar V_n \in C^r$, *т.е.* $\bar g_{ij} \in C^r$.

4. О специальных почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности

В силу того, что основные уравнения (2.3) почти геодезических отображений первого типа нелинейные и достаточно сложные, они долгое время оставались наименее изученными.

Поэтому рассмотрим некоторые специальные почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности.

4.1. Почти геодезические отображения π_1^*. Пусть при отображении $\pi : A_n \to \bar A_n$ тензор деформации связностей P^h_{ij} удовлетворяет уравнению

$$P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} = \delta^h_k a_{ij}, \tag{4.1}$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор.

Очевидно, что отображение $\pi : A_n to \bar A_n$ является частным случаем почти геодезических отображений первого типа; в дальнейшем будем обозначать его через π_1^*.

Рассматривая (4.1) как систему типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij} из условий интегрируемости, находим

$$(n-1)\,a_{ij,k} = P^\alpha_{ij} R_{\alpha k} - P^\beta_{\alpha(i} R^\alpha_{j)\beta k} - (n-1)\,P^\alpha_{ij} a_{\alpha k}. \qquad (4.2)$$

Уравнения (4.1) и (4.2) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x) \quad \text{и} \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x). \qquad (4.3)$$

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 11 (Березовский, Микеш [7, 73])**.** *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение π_1^* на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (4.1), (4.2) *и* (4.3) *относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Оказывается, что для отображений π_1^* инвариантными геометрическими обьектами будут тензор Вейля проективной кривизны W^h_{ijk}, а также тензоры

$$\overset{*}{W}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\,(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}) \quad \text{и} \quad W_{ij} = R_{ij} - R_{ji}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 12 (Березовский, Микеш [7, 73])**.** *Если проективно-евклидово или эквиаффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение на $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является проективно-евклидовым или эквиаффинным пространством соответственно.*

Доказательство теоремы 12, очевидно, следует из того, что в проективно-евклидовом пространстве тензор Вейля обращается в нуль, а в эквиаффинном пространстве тензор $W_{ij} = 0$. Следовательно, на основании теоремы 11 в пространстве $\bar{A}_n$ обращаются в нуль указанные тензоры.

Таким образом, на основании теоремы 12 проективно-евклидовы и эквиаффинные пространства образуют замкнутые классы относительно отображений π_1^*.

Легко видеть, что тензор Римана сохраняется при отображениях π_1^* тогда и только тогда, когда тензор a_{ij} тождественно обращается в нуль. В этом случае уравнения (4.1) принимают вид

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ji} P^h_{\alpha k}. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4) в плоском пространстве вполне интегрируемы. Следовательно, имеют решение для любых начальных значений $P^h_{ij}(x_o)$. Если начальные значения таковы, что $P^h_{ij}(x_o) \not\equiv \delta^h_i \psi^o_j + \delta^h_j \psi^o_i$, то построенное таким образом решение устанавливает отображение π_1^* плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$, которое не является геодезическим.

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 13 (Березовский, Микеш [7, 73])**.** *Существует отображение π_1^* n-мерной плоскости на себя, при которых прямые переходят в кривые, лежащие в 2-мерных плоскостях, не все из которых являются прямыми.*

Приведем пример почти геодезических отображений типа π_1^* плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ — аффинные координаты пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно.

Точечное преобразование

$$\bar{x}^h = \frac{1}{2}\, C^h_i\, (x^i - C^i)^2 + x^h_o, \tag{4.5}$$

где C^h_i, C^i, x^h_o — некоторые постоянные, причем $\det |C^h_i| \neq 0$, определяет почти геодезическое отображение π_1^* пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор деформации связностей P^h_{ij} в системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеет вид

$$P^i_{ii} = \frac{1}{x^i - C^i}, \quad i = \overline{1, n}\,,$$

а остальные компоненты равны нулю.

Легко видеть, что при таком строении тензор P^h_{ij} удовлетворяет уравнениям (4.4). Нужно заметить, что такое отображение будет отличным от π_2 и π_3.

При таком отображении прямые пространства A_n, которые, как известно, определяются уравнениями $x^h = a^h + b^h\, t$, где t — параметр, переходят в параболы пространства $\bar{A}_n$, определяемые уравнениями

$$\bar{x}^h = D^h + E^h\, t + F^h\, t^2,$$

где

$$D^h = \frac{1}{2}\, C^h_i (a^i - C^i)^2, \quad E^h = C^h_i (a^i - C^i) b^i, \quad F^h = \frac{1}{2}\, C^h_i (b_i)^2.$$

Параболы, очевидно, лежат в двумерных плоскостях.

Исключение представляют прямые, проходящие через точку $M(C^1, C^2, \ldots, C^n)$. Они при преобразовании (4.5) отображаются на прямые.

Формулы (4.5) порождают семейство бесконечно малых почти геодезических преобразований π_1 в плоском пространстве, если считать C^h_i, C^i и x^h_o непрерывными параметрами.

4.2. Обобщение почти геодезических отображений π_1^*.

Пусть при отображении $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ тензор деформации связностей P^h_{ij} удовлетворяет уравнению

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ji} P^h_{\alpha k} + \delta^h_{(k} a_{ij)}, \tag{4.6}$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор.

Очевидно, что отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$, определяемое уравнением (4.6), является частным случаем почти геодезических отображений первого типа. Известно [49], что между тензорами Римана R^h_{ijk} и $\bar{R}^h_{ijk}$ пространств A_n и $\bar{A}_n$ имеется зависимость

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{i[k,j]} + P^\alpha_{i[k} P^h_{j]\alpha}. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.6) и (4.7), имеем следующую теорему.

Теорема 14 (Березовский, Микеш [76]). *Тензор Римана R^h_{ijk} является инвариантным относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями* (4.6), *геометрическим объектом пространств аффинной связности.*

Поскольку тензор Римана в аффинном пространстве обращается в нуль, то имеет место следующая теорема.

Теорема 15 (Березовский, Микеш [76]). *Если аффинные пространства A_n допускают почти геодезическое отображение, определяемое уравнением* (4.6)*, на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является аффинным пространством.*

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнением (4.6).

Рассматривая (4.6) как систему типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij} и исследуя их условия интегрируемости, получим

$$a_{ik,j} = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\Big[n\cdot(P^\alpha_{ik}R_{\alpha j} - P^\beta_{\alpha(k}R^\alpha_{i)j\beta})+$$
$$+R_{\alpha(k}P^\alpha_{i)j} - P^\beta_{\alpha j}R^\alpha_{(ik)\beta} - P^\beta_{\alpha(i}R^\alpha_{|j|k)\beta})+$$
$$+(n+1)\cdot(a_{j(i}P^\alpha_{k)\alpha} - a_{\alpha(i}P^\alpha_{k)j}) + 2\cdot(a_{ik}P^\alpha_{j\alpha} - a_{j\alpha}P^\alpha_{ik})\Big]. \qquad (4.8)$$

Очевидно, уравнения (4.6) и (4.8) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций P^h_{ij} и a_{ij}, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера (4.3).

Тем самым доказывается следующая теорема.

Теорема 16 (Березовский, Микеш [76])**.** *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнением* (4.6)*, на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (4.6), (4.8), (4.3) *относительно функций P^h_{ij} и a_{ij}.*

Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышет $\dfrac{1}{2}\,n(n+1)^2$ параметров.

4.3. Обобщение почти геодезических отображений π_1^*.

Пусть при отображении $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ тензор деформации связностей P^h_{ij} удовлетворяет уравнению

$$3\,P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} + \delta^h_{(k}a_{ij)}, \qquad (4.9)$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор.

Очевидно, что отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$, определяемое уравнением (4.9), является частным случаем почти геодезических отображений первого типа. Рассматривая (4.9) как систему типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij} и исследуя их условия интегрируемости, получим

$$(n-1)\,a_{ij,k} = P^\beta_{\alpha\gamma}P^\alpha_{(ij}P^\gamma_{\gamma)\beta} + \frac{1}{n+2}\Big[3\,n(P^\alpha_{ij}R_{\alpha k} - P^\beta_{\alpha(i}R^\alpha_{j)k\beta})+$$

$$+3P^{\alpha}_{k(i}R|\alpha|j) - 3P^{\beta}_{\alpha(i}R^{\alpha}_{|k|j)\beta} - 3P^{\beta}_{\alpha k}R^{\alpha}_{(ij)\beta}+$$

$$+\frac{1}{3}(-nP^{\beta}_{\alpha k}P^{a}_{(ij}P^{\gamma}_{\gamma)\beta} + (n^2+3n)a_{\alpha(i}P^{\alpha}_{j)k} - 2(n+1)a_{k(i}P^{\alpha}_{j)\alpha})+$$

$$+\frac{1}{3}(4(a_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij} - a_{ij}P^{\alpha}_{k\alpha}) - P^{\beta}_{\alpha i}P^{\alpha}_{(kj}P^{\gamma}_{\gamma)\beta} - P^{\beta}_{\alpha j}P^{\alpha}_{(ki}P^{\gamma}_{\gamma)\beta})\Big]. \qquad (4.10)$$

Очевидно, уравнения (4.9) и (4.10) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера (4.3). Тем самым доказывается следующая теорема.

Теорема 17 (Березовский, Микеш [76]). *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями* (4.9)*, на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (4.9)*,* (4.10)*,* (4.3) *относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает $\dfrac{1}{2}\,n(n+1)^2$ параметров.

Точечное преобразование (4.5) плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$ также является примером почти геодезических отображений первого типа, характеризующихся уравнением (4.9).

4.4. Почти геодезические отображения на плоские пространства. Рассмотрим канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности A_n на плоские пространства $\bar{A}_n$.

На основании (3.2) указанные отображения характеризуются уравнениями

$$3\,(P^h_{ij,k} + P^{\alpha}_{ij}P^h_{\alpha k}) = R^h_{(ij)k} + \delta^h_{(k}a_{ij)}, \qquad (4.11)$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор.

Рассматривая (4.11) как систему типа Коши относительно тензора деформации $P^h_{ij}(x)$ и исследуя их условия интегрируемости, получим

$$(n-1)(n+2)\,a_{ij,k} = 4\,P^{\beta}_{\alpha(j}R^{\alpha}_{|\beta k|i)} + (3n+5)P^{\beta}_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)\beta k}-$$

$$-(n+3)\,P^{\beta}_{\alpha k}R^{\alpha}_{(ij)\beta} + (n-1)\,P^{\beta}_{\beta\alpha}R^{\alpha}_{(ij)k}-$$

$$-n\,R_{(i|k|,j)} - R_{k(i,j)} - R_{(ij),k} + 2\,(a_{ij}P^{\alpha}_{k\alpha} - a_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij}) -$$
$$-(n+1)\,(a_{\alpha(i}P^{\alpha}_{j)k} - a_{k(i}P^{\alpha}_{j)\alpha}). \qquad (4.12)$$

Очевидно, уравнения (4.11) и (4.12) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и a_{ij}, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера (4.3).

Тем самым доказывается следующая теорема.

Теорема 18 (Березовский, Микеш [17]). *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями* (4.11)*, на плоское пространство $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (4.11)*,* (4.12)*,* (4.3) *относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и a_{ij}.*

Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает $\dfrac{1}{2}\,n(n^2-1)$ параметров.

Пространства A_n, в которых существует решение смешанной системы типа Коши (4.11), (4.12), (4.3), являются $(n-2)$-проективными пространствами первого типа.

Однако, как ранее отмечалось, $(n-2)$-проективными пространствами первого типа будут также пространства аффинной связности, которые допускают на указанные пространства геодезические отображения. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 19 (Березовский, Микеш [17]). *Все $(n-2)$-проективные пространства первого типа являются или пространствами A_n, в которых имеет решение смешанная система типа Коши* (4.11)*,* (4.12)*,* (4.3)*, или пространствами аффинной связности, которые допускают геодезические отображения на указанные пространства A_n.*

4.5. Почти геодезические отображения при условии сохранения системы n-ортогональных гиперповерхностей. Рассмотрим отображения π_1 римановых пространств при условии сохранения системы n-ортогональных гиперповерхностей.

Заметим, что в теории геодезических отображений римановых пространств данная задача решена Т. Леви-Чивита [90] и в развернутом виде изложена Л. П. Эйзенхартом [84].

Для отображений π_1 эта задача необозримо трудна. Даже в случае, когда римановы пространства V_n и $\bar{V}_n$ отнесены к n-ортогональным ситемам координат, основные уравнения отображений (2.3) представляют собой достаточно сложную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Поэтому рассмотрим частный случай почти геодезических отображений $\pi_1 : V_n \to \bar{V}_n$ при сохранении системы n-ортогональных гиперповерхностей, определяемый следующими уравнениями:

$$P^h_{ij,k} = \phi_k P^h_{ij}, \tag{4.13}$$

$$P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} = \delta_k a_{ij)}, \tag{4.14}$$

где ϕ_k — некоторый вектор, a_{ij} — некоторый симметрический тензор.

Рассматриваемые отображения обладают свойством взаимности, т.е. обратные им отображения также являются отображениями π_1, которые, однако, могут не порождаться уравнениями (4.13) и (4.14).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 20 (Березовский, Микеш [71, 72])**.** *Если риманово пространство V_n отнесено к n-ортогональной системе координат и диагональные компоненты метрического тензора удовлетворяют следующей системе типа Коши в частных производных*:

$$\partial_h \ln g_{ii} = \frac{C_i e^{-2x^i} - 3C_h e^{-2x^h}}{C_h e^{-2x^h} - C_i e^{-2x^i}}, \quad h \neq i,$$

$$\partial_i \ln g_{ii} = -4 + g_{ii} \cdot \sum_{\alpha\neq i} \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \cdot \frac{C_i e^{-2x^i} - 3C_\alpha e^{-2x^\alpha}}{C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i}},$$

где C_k — некоторые нулевые постоянные, то V_n допускает почти геодезическое отображение типа π_1, определяемое уравнениями (4.13) *и* (4.14)*, при котором сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей, на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$, причем*

$$\bar{g}_{hh} = \frac{C_h \cdot e^{-2x^h}}{\prod\limits_i e^{-x^i}} \cdot g_{hh}, \quad \bar{g}_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Удалось найти (Березовский, Микеш [72]) частное решение указанной системы, а именно:

$$g_{ii} = \prod_{\alpha \neq i} (C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i})\, e^{-x^\alpha}\, e^{-x^i}, \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \qquad (4.15)$$

Таким образом, риманово пространство V_n, метрика которого имеет вид (4.15), допускает почти геодезическое отображение типа π_1, при котором сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей, на риманово пространство V_n, метрический тензор $\bar{g}_{ij}$ которого имеет представление

$$\bar{g}_{ii} = C_i\, e^{-2x^i} \cdot \prod_{\alpha \neq i} (C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i}), \quad \bar{g}_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Следует отметить, что в этом случае почти геодезическое отображение отлично от геодезического отображения.

В итоге, построен класс римановых пространств, допускающий почти геодезические отображения типа π_1.

5. Почти геодезические отображения второго типа

5.1. О почти геодезических отображениях $\pi_2(e)$**.** Н. С. Синюков [46, 48, 49, 50] почти геодезическое отображение $f : A_n \to \bar{A}_n$ типа π_2 назвал *отображением* $\pi_2(e)$, если обратное отображение $f^{-1} : \bar{A}_n \to A_n$ является также некоторым почти геодезическим отображением типа π_2.

Отображение $f : A_n \to \bar{A}_n$ является почти геодезическим типа $\pi_2(e)$, если в общей по отображению f системе координат $x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ тензор деформации аффинных связностей $P^h_{ij}(x) \equiv \bar{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям [46, 49, 50]:

$$\begin{aligned} &(a) \quad P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}, \\ &(b) \quad F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}\mu_{j)} + \delta^h_{(i}\varrho_{j)}, \\ &(c) \quad F^h_\alpha F^\alpha_i = e\,\delta^h_i, \quad e = \pm 1, 0, \end{aligned} \qquad (5.1)$$

где Γ^h_{ij} ($\bar{\Gamma}^h_{ij}$) — объекты аффинной связности пространств A_n ($\bar{A}_n$), δ^h_i — символ Кронекера, F^h_i — некоторый аффинор, ψ_i, φ_i, μ_i, ϱ_i — ковекторы и $(i\,j)$ обозначает симметрирование индексов. Здесь и дальше «,» обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n. Уравнение (c) определяет аффинор F_i^h как *e-структуру*.

Уравнения (5.1), характеризующие отображения $\pi_2(e)$: $A_n \to \bar{A}_n$ при $e = \pm 1$, были уточнены в [46, 48, 49, 50]. Верно, что $\varrho_i = -F_i^\alpha \mu_\alpha$. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 21 (Синюков [49, 50])**.** *Диффеоморфизм $f : A_n \to \bar{A}_n$ является почти геодезическим отображением $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, тогда и только тогда, когда в общей по этому отображению системе координат x тензор деформации аффинных связностей $P_{ij}^h(x)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad P_{ij}^h = \delta_{(i}^h \psi_{j)} + F_{(i}^h \varphi_{j)}, \\ &\text{(b)} \quad F_{(i,j)}^h = F_{(i}^h \mu_{j)} - \delta_{(i}^h F_{j)}^\alpha \mu_\alpha, \\ &\text{(c)} \quad F_\alpha^h F_i^\alpha = e\, \delta_i^h. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Доказательство этой теоремы основывается на анализе условий (b) и (c). Анализ этих условий привел к введению следующих понятий.

5.2. e-структуры, определяющие почти геодезические отображения $\pi_2(e)$. Следующие уточнения в теории почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ были получены в [19].

Аффинор F_i^h, удовлетворяющий условиям (b) и (c) теоремы 21, будем называть *e-структурой, определяющей почти геодезическое отображение* $\pi_2(e)$.

Теорема 22. *e-структура F_i^h определяет почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &\text{(b)} \quad F_{(i,j)}^h = F_{(i}^h \mu_{j)} - \delta_{(i}^h F_{j)}^\alpha \mu_\alpha; \\ &\text{(c)} \quad F_\alpha^h F_i^\alpha = e\, \delta_i^h. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Более точным исследованием этих уравнений в [19] доказано, что e-структура F_i^h, определяющая почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 2F_{i,jk}^h = {} & F_i^h \mu_{(jk)} + F_j^h \mu_{[ik]} + F_k^h \mu_{[ij]} - \\ & -\delta_i^h m_{(jk)} - \delta_j^h m_{[ik]} - \delta_k^h m_{[ij]} + \overset{1}{\Theta}{}_{ikj}^h, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$\overset{1}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} + \overset{2}{\Theta}{}^h_{kji} - \overset{2}{\Theta}{}^h_{jki} + 2F^h_\alpha R^\alpha_{kji} - F^\alpha_i R^h_{\alpha jk} + F^\alpha_j R^h_{\alpha ik} + F^\alpha_k R^h_{\alpha ij},$$

$$\overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \mu_{(i} F^h_{j)k} - \delta^h_{(i} F^\alpha_{j)k} \mu_\alpha, \;\; F^h_{ij} \equiv F^h_{i,j}, \;\; \mu_{ij} \equiv \mu_{i,j}, \;\; m_{ij} \equiv F^\alpha_i \mu_{\alpha j},$$

R^h_{ijk} — тензор Римана просранства A_n, $[i\,k]$ обозначает альтернирование по соответствующим индексам.

Далее установлено, что тензор μ_{ij} удовлетворяет условиям

$$\mu_{ij,k} = \mu_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\left(\overset{5}{\Theta}_{ij,k} + \overset{5}{\Theta}_{ik,j} - \overset{5}{\Theta}_{jk,i} \right), \tag{5.5}$$

где

$$\overset{3}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} - \overset{2}{\Theta}{}^h_{kji} + F^\alpha_j R^h_{\alpha ik} - F^h_\alpha R^\alpha_{jik},$$

$$\overset{4}{\Theta}_{jk} \equiv F^\alpha_\beta \, \overset{1}{\Theta}{}^\beta_{\alpha jk} + 2F^\alpha_{\beta j} F^\beta_{\alpha k},$$

$$\overset{5}{\Theta}_{ij} \equiv \frac{1}{(n-1-F^\alpha_\alpha)^2 - 1}\Big((n-1-F^\alpha_\alpha)\, \overset{4}{\Theta}_{ij} + \overset{4}{\Theta}_{\alpha\beta}\, F^\alpha_i F^\beta_j\Big).$$

В итоге получена замкнутая система дифференциальных уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций F^h_i, F^h_{ij}, μ_i, μ_{ij}:

$$\begin{aligned} F^h_{i,j} &= F^h_{ij}\,, \\ F^h_{ij,k} &= F^h_i \mu_{(jk)} + F^h_j \mu_{[ik]} + F^h_k \mu_{[ij]} - \delta^h_i m_{(jk)} - \\ &\qquad - \delta^h_j m_{[ik]} - \delta^h_k m_{[ij]} + \overset{1}{\Theta}{}^h_{ikj}\,, \\ \mu_{i,j} &= \mu_{ij}\,, \\ \mu_{ij,k} &= \mu_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}(\overset{5}{\Theta}_{ij,k} + \overset{5}{\Theta}_{ik,j} - \overset{5}{\Theta}_{jk,i})\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Правые части уравнений (5.6) зависят от неизвестных функций F^h_i, F^h_{ij}, μ_i, μ_{ij} и объектов аффинной связности пространства A_n. С другой стороны, эти функции удовлетворяют условиям алгебраического характера:

$$F^h_{(ij)} = F^h_{(i}\mu_{j)} - \delta^h_{(i} F^\alpha_{j)} \mu_\alpha\,; \quad F^h_\alpha F^\alpha_i = e\,\delta^h_i\,; \quad \mu_{(ij)} = \overset{5}{\Theta}_{ij}\,. \tag{5.7}$$

Теорема 23. *Уравнения* (5.6) *и* (5.7) *являются алгебро-дифференциальной системой типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций* F_i^h, F_{ij}^h, μ_i, μ_{ij}, *порождающей все* e*-структуры* F_i^h, *определяющие почти геодезические отображения* $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$.

Отсюда вытекает, что совокупность всех e-структур F_i^h, порождающих почти геодезические отображения типа $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, зависит от не более чем $\dfrac{1}{2}n(n^2-1)$ вещественных параметров.

5.3. О почти геодезических отображениях $\pi_2(e)$ на римановы пространства. Из анализа уравнений (5.1)a вытекает, что почти геодезические отображения $\pi_2(e)$ являются специальным случаем F-планарных отображений (Й. Микеш, Н. С. Синюков [38]).

Напомним следующий результат.

Теорема 24 (Микеш [34, 35])**.** *Пусть* A_n — *пространство аффинной связности, в котором определена аффинорная структура* $F_i^h(x)$, *удовлетворяющая условию* $\operatorname{Rank}\|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$. *Семейство всех римановых пространств* $\bar{V}_n$, *на которые* A_n *допускает* F*-планарные отображения, зависит от не более чем* $\dfrac{1}{2}n(n+5)+3$ *вещественных параметров.*

Однако было бы ошибочным считать, что теорема 3.14, сформулированная для F-планарных отображений, автоматически верна и для отображений $\pi_2(e)$. Это вытекает из факта, что структура F является «a priori» определенной для F-планарных отображений, но в случае почти геодезических отображений π_2 структурный аффинор F неизвестен.

Поэтому невозможно автоматически перенести результаты для F-планарных отображений $A_n \to \bar{V}_n$ на случай почти геодезических отображений π_2 на римановы пространства.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующая теорема [19].

Теорема 25. *Пусть* A_n — *пространство аффинной связности. Семейство всех римановых пространств* $\bar{V}_n$, *на которые* A_n *допускает почти геодезические отображения* $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, *с* e*-структурой* F_i^h, $\operatorname{Rank}\|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$, *зависит от не более чем* $\dfrac{1}{2}n^2(n+1)+2n+3$ *вещественных параметров.*

Примечание. *Для почти комплексных структур F при $n > 4$ условие* $\mathrm{Rank}\,\|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$ *можно в формулировке опустить.*

В заключение заметим, что А. В. Емельянов и В. Ф. Кириченко [26] занимались вопросами почти геодезических отображений почти эрмитовых пространств, т.е. римановых пространств с почти комплексной структурой F, которая согласована с метрикой следующим образом: $g_{i\alpha}F_j^\alpha + g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$.

5.4. О почти геодезических отображениях π_2 на полусимметрические пространства. Пространство аффинной связности A_n называется *полусимметрическим* (Н. С. Синюков [49, 99]), если в нем тензор Римана R^h_{ijk} в каждой точке удовлетворяет условиям

$$R^h_{ijk,lm} - R^h_{ijk,ml} = 0.$$

На основании тождеств Риччи это условие можно переписать следующим образом:

$$R^h_{\alpha jk}R^\alpha_{ilm} + R^h_{i\alpha k}R^\alpha_{jlm} + R^h_{ij\alpha}R^\alpha_{klm} - R^\alpha_{ijk}R^h_{\alpha lm} = 0.$$

Как известно, геодезическим и голоморфно-проективным отображениям полусимметрических пространств было посвящено много исследований (см. [29, 49, 53, 92, 93, 99]).

Вопросам почти геодезических отображений полусимметрических пространств были посвящены работы В. С. Собчука и других авторов [55, 67, 106]. Ниже сформулируем результаты, полученные в данном направлении.

Исследуется специальное почти геодезическое отображение $\pi_2 :$ $A_n \to \bar{A}_n$, которое определяется уравнениями

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \bar{\Gamma}^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)},$$

причем структура удовлетворяет следующим условиям

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = \pm\delta^h_i, \quad F_{[ij]} = 0, \quad F^h_{i,j} = 0,$$

где $F_{ij} = F_i^\alpha g_{\alpha j}$ и векторы ψ_i и σ_i градиентны.

Имеет место теорема.

Теорема 26. *Полусимметрическое (псевдо)риманово пространство A_n допускает специальное почти геодезическое отображение π_2 на полусимметрическое (псевдо)риманово пространство $\bar{A}_n$ при условии* $\det((n-1)\psi_{ij} - \sigma_{i\alpha}F^\alpha_j + F\sigma_{ij}) \neq 0$ *тогда и только тогда,* *когда A_n является симметрическим со специальным тензором Римана*

$$R_{hijk} = [A\,(g_{ij}F_{hk} + g_{hk}F_{ij}) + B\,(g_{ij}g_{hk} + F_{hk}F_{ij})]_{[jk]},$$

где A и B — постоянные.

6. Почти геодезические отображения третьего типа

Почти геодезические отображения $\pi_3 : A_n \to \bar{A}_n$ характеризуются, как мы уже сказали в п. 1.2, условиями (2.6) и (2.7) для тензора деформации P^h_{ij}.

При этом отображении каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую пространства $\bar{A}_n$, вдоль которой поле компланарных плоскостей E_2 натянуто на касательный вектор кривой и вектор ϕ^h(см. [49, с. 190]). Легко показывается, что обратное отображение является также почти геодезическим отображением третьего типа, таким образом, отображения обладают свойством взаимности.

Заметим, что теория отображений π_3 тесно связана с теорией торсообразующих векторных полей, которые ввел в рассмотрение К. Яно [114, 115] (см. [49, 99]). Векторное поле ϕ^h названо *торсообразующим*, если удовлетворяет уравнению (2.7):

$$\phi^h_{,i} = \phi^h\theta_i + \varrho\,\delta^h_i.$$

Когда ковектор θ_i градиентен, то ϕ^h *конциркулярно*. Интегральные линии векторного поля ϕ^h являются геодезическими линиями.

В случае, когда A_n является (псевдо)римановым и векторное поле ϕ^h неизотропно, метрическая форма в некоторой системе координат имеет строение:

$$ds^2 = \pm\,dx^{1^2} + \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n)\cdot d\tilde{s}^2,$$

где Φ $(\in C^1)$ — функция указанных аргументов и

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ab}(x^2, \ldots, x^n)\,dx^a dx^b,$$

$a, b = 2, 3, \ldots, n,$ — метрика некоторого $(n{-}1)$-мерного (псевдо)риманова пространства $\tilde{V}_{n-1}$. В случае, когда функция Φ не зависит от переменной x^1, векторное поле ϕ^h конциркулярно, а само пространство, согласно терминологии Н. С. Синюкова [49] *эквидистантно*.

Многие вопросы теории отображений π_3 детально освещаются в монографии Н. С. Синюкова [49] и его обзорной статьи [50].

Поскольку вопрос о существовании отображений π_3 связан с существованием торсообразующих векторных полей, мы здесь ограничимся кратким сообщением новых результатов теории этих полей, полученных в последние годы.

В работах Н. С. Синюкова, Й. Микеша, Ж. Радуловича, Л. Рахунека и М. Ходоровой [51, 92, 93, 96, 98, 97, 102] найдены критерии, при которых не существует торсообразующих и конциркулярных векторных полей «в целом».

В работах Л. Рахунека и Й. Микеша [97, 102] установлены другие интересные свойства торсообразующих векторных полей. В них, например, доказано, что торсообразующее векторное поле в пространстве Эйнштейна является только конциркулярным. Заметим, что пространства Эйнштейна, в которых существует конциркулярное векторное поле, детально изучил Бринкманн [83, 42]. С этими пространствами тесно связана работа [25].

7. О смежных классах почти геодезических отображений и преобразований

Как было указано ранее, типы почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3 могут пересекаться. Укажем условия, при которых это происходит.

Типу π_2 принадлежат аналитически планарные отображения почти комплексных многообразий (со связностью без кручения) (С. Исихара [87], Я. Тасиро [111]), голоморфно проективные отображения класических, гиперболических и параболически келеровых пространств (Т. Отсуки, Я. Тасиро [87], М. Прванович [101]), см. [1, 49, 52, 93, 99, 103, 107, 108, 109, 110, 113].

Алгебраическую структуру (2.4) имеет также тензор деформации связности при отображении пространств аффинной связности с сохранением линейного комплекса геодезических линий (В. М. Чернышенко [57, 58]). Но при этом на $\phi_i(x)$ налагается условие дифференциального характера

$$\phi_{(i,j)} = \chi_{(i}\phi_{j)}, \tag{7.1}$$

где χ_i — некоторый ковариантный вектор. Для аффинора $F_i^h(x)$ никаких условий не появляется.

Типу π_3 принадлежат конциркулярные отображения римановых пространств (К. Яно [114]). Алгебраическую структуру (2.6) имеет также тензор деформации связности при отображении пространств аффинной связности с сохранением квадратического комплекса геодезических линий (В. М. Чернышенко [57, 58]). При этом для тензора $\varnothing_{ij}(x)$ возникают условия дифференциального характера

$$\varnothing_{(ij,k)} = \theta_{(i}\varnothing_{jk)}, \tag{7.2}$$

где θ_i — некоторый ковариантный вектор. Для вектора ϕ^h в этом случае не появляется никаких условий.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 27 (Березовский, Микеш [10, 69]). *Если почти геодезическое отображение π является одновременно π_1 и π_2, то π является отображением пространств аффинной связности с сохранением линейного комплекса геодезических линий.*

Теорема 28 (Березовский, Микеш [10, 69]). *Если почти геодезическое отображение π является одновременно π_1 и π_3, то π является отображением пространств аффинной связности с сохранением квадратичного комплекса геодезических линий.*

Если в уравнениях (2.5) аффинор F_i^h удовлетворяет неравенству

$$F_i^h \neq \varrho\delta_i^h + \phi^h a_i, \tag{7.3}$$

где ϕ^h, a_i — некоторые векторы, ϱ — некоторый инвариант, то отображения типов π_2 и π_3 не пересекаются.

Аналогичные теоремы имеют место для почти геодезических бесконечно малых преобразований пространств аффинной связности. Поэтому естественным образом выделяются отображения

$$\pi_{12} = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \text{и} \quad \pi_{13} = \pi_1 \cap \pi_3.$$

Отображения π_{12} и π_{13} на основании теорем сохраняют линейный и квадратичный комплексы геодезических линий соответственно.

Отображения π_{12} характеризуются уравнениями (2.4), (2.5) и (7.1), а π_{13} — (2.6), (2.7) и (7.2).

Таким образом, при определенных дополнительных условиях выделены попарно непересекающиеся типы почти геодезических отображений и преобразований:

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \pi_{12} = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \text{и} \quad \pi_{13} = \pi_1 \cap \pi_3.$$

Выделенные типы при $n > 5$ дают полную попарно непересекающуюся классификацию почти геодезических отображений и бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беклемишев Д. В.* Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой// Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. — М.: ВИНИТИ, 1963. — С. 165–212.
2. *Березовский В. Е.* Новая форма основных уравнений почти геодезических отображений типа π_1. — Деп. в УкрНИИТИ 16.03.86, № 129, Ук 86.
3. *Березовский В. Е.* Почти геодезических отображениях пространств аффинной связности// Тез. сообщ. Всесоюзн. геометр. конф., Кишинев, 1986. — С. 41.
4. *Березовский В. Е.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности первого типа, сохраняющие n-ортогональные системы гиперповерхностей// Тез. сообщ. Обл. конф. молодых ученых, Умань, 1990. — С. 2.
5. *Березовский В. Е.* К вопросу о почти геодезических отображениях первого типа римановых пространств, при которых сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей. — Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91, № 652, Ук 91.
6. *Березовский В. Е.* О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности типа π_1^*. — Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91, № 654, Ук 91.
7. *Березовский В. Е.* О частном случае почти геодезических отображений пространств аффинной связности первого типа// Тез. докл. междунар. научной конф. «Лобачевский и современная геометрия», Казань, 1992. — С. 12.
8. *Березовский В. Е.* Почти геодезические канонические отображения первого типа пространств аффинной связности// Материалы междунар. конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева, Москва, 1999. — С. 6.
9. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности// Тез. сообщ. Всесоюзн. геометр. конф., Одесса, 1984. — С. 18.
10. *Березовский В. Е., Микеш Й.* Новая классификация почти геодезических отображений пространств аффинной связности. — Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91, № 653, Ук 91.
11. *Березовский В. Е., Микеш Й.* К классификации почти геодезических отображений// Тез. докл. респ. научно-метод. конф. посвященной 200-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского, Одесса, 1992. — С. 54.
12. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности// Тез. докл. 5-й междунар. конференции по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова, Черкассы, 2003. — С. 14–15.

13. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О частном случае почти геодезических отображений пергого типа// Сб. трудов. Междунар. геометр. семинара им. Г. Ф. Лаптева, Пенза: Пенз. гос. пед. ун-т, 2007. — С. 7–17.
14. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О почти геодезических канонических отображениях первого типа// Тез. докл. междунар. конференции «Геометрия в Одессе — 2009», Одесса, 2009. — С. 43.
15. *Березовський В. Е., Мікеш Й.* Про майже геодезичні відображення першого типу// Український математичний конгрес, Київ, 2009. www.imath.kiev.ua/˜congress2009/about.html
16. *Березовский В. Е., Микеш Й.* Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно риччи-симметрические пространства// Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. — 2009. — *151*, № 4. — С. 9–14.
17. *Березовский В. Е., Микеш Й.* $(n-2)$-проективные пространства первого типа// Тез. докл. междунар. конференции «Геометрия в Одессе — 2010», Одесса, 2010.
18. *Березовский В. Е., Микеш Й.* $(n-2)$-проективные пространства первого типа// Изв. Пенз. гос. ун-та им. В. Г. Белинского. Физ.-мат. науки. — 2011. — xx-xx.
19. *Вавржикова Х., Микеш Й., Покорна О., Старко Г.* Об основных уравнениях почти геодезических отображений $\pi_2(e)$// Изв. вузов. Мат. — 2007. — *1(536)*. — С. 10–15.
20. *Веденяпин Д. В.* О некоторых $(n-2)$-кратно проективных пространствах// Научн. докл. высш. школы, физ. матем. науки. — 1958. — *8*. — С. 119–125.
21. *Гинтерлейтнер И., Микеш Й.* Проективная эквивалентность и пространства эквиаффинной связности// Фундам. и прикл. мат. — 2010. — *16*, № 1. — С. 47–54.
22. *Гинтерлейтнер И., Микеш Й., Странска Я.* Бесконечно малые F-планарные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 4, С. 13–18.
23. *Домашев В. В., Микеш Й.* К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств// Мат. заметки. — 1978. — *23*, № 2. — С. 297–303.
24. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. — М.: ВИНИТИ, 1979. — 246 с.
25. *Евтушик Л. Е., Киосак В. А., Микеш Й.* О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна// Изв. вузов. Мат. — 2010. — *8*. — С. 36–41.

26. *Емельянов Ф. В., Кириченко В. Ф.* О почти геодезических отображениях класса π_2 почти эрмитовых многообразий// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 4. — С. 517–526.
27. *Каган В. Ф.* Субпроективные пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
28. *Микеш Й.* Геодезические и голоморфно-проективные отоображения специальных римановых пространств. — Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Одесский ун-т, 1979. — 107 с.
29. *Микеш Й.* О геодезических отоображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 2. — С. 313–317.
30. *Микеш Й.* О геодезических отоображениях пространств Эйнштейна// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 6. — С. 935–938.
31. *Микеш Й.* F-планарные отображения пространств аффинной связности// Arch. Math., Brno 27a. — 1991. — С. 53–56.
32. *Микеш Й.* Об F-планарных и f-планарных отображениях, преобразованиях и деформациях// Геом. обобщенных пространств. — Пенза, 1992. — С. 60–65.
33. *Микеш Й.* О специальных F-планарных отображениях пространств аффинной связности// Вестн. Моск. ун-та. — 1994. — *3*. — С. 18–24.
34. *Микеш Й.* Геодезические, F-планарные голоморфно-проективные отображения римановых пространств и протсранств аффинной связности. — Дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук. Оломоуц, Прага, 1995. — 180 с.
35. *Микеш Й.* F-планарные отображения на римановы пространства// Сб. трудов междунар. конф. «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики», том. 2, МГУ, ВИНИТИ, Москва. — 2001. — С. 138–145.
36. *Микеш Й., Березовский В. Е.* Геодезические отображения пространств аффинной связности на римановы пространства. — Деп. в УкрНИИТИ 25.02.85. № 347, Ук 85.
37. *Микеш Й., Гинтерлейтнер И.* О фундаментальных уравнениях геодезических отображений и их обобщений// Итоги науки и техн., Сер. Совр. мат. и ее прил. Тем. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2010. — *124*. — С. 7–34.
38. *Микеш Й., Синюков Н. С.* О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1983. — *27*, № 1. — С. 55–61.
39. *Микеш Й., Юкл М., Юклова Л.* Некоторые результаты о бесследовом разложении тензоров// Итоги науки и техники. Сер. совр. мат. и прил. Тем. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2010. — 2010. — *124*. — С. 139–158.
40. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

41. *Петров А. З.* Моделирование физических полей. Гравитация и теория относительности. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1968. — С. 4–5, 7–21.
42. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
43. *Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М. Л.* Геодезические отображения и деформации римановых пространств. — Одесса: Изд. ОГУ, 1997.
44. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*. — С. 781–782.
45. *Синюков Н. С.* К теории геодезических отображний римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*. — С. 770–772.
46. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображния пространств аффинной связности и e-структуры// Мат. заметки. — 1970. — *7*. — С. 449–459.
47. *Синюков Н. С.* Бесконечно малые почти геодезические преобразования пространств аффинной связности и римановых пространств// Укр. геом. сб. — 1970. — *9*. — С. 86–95.
48. *Синюков Н. С.* Теория геодезических отображений римановых пространств и ее обобщения. — Дисс. на соиск. докт. физ.-мат. нак. — Киев, 1971.
49. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1982. — *13*. — С. 3–26.
51. *Синюков Н. С.* Принципы теории почти геодезических отображений римановых пространств «в целом». — Деп. ВИНИТИ, № 562-91В, 1991.
52. *Синюков Н. С., Курбатова И. Н., Микеш Й.* Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств. — Одесск. унив., 1985. — 69 с.
53. *Синюков Н. С., Синюкова Е. Н.* О голомофно-проективных отображениях специальных келеровых пространств// Мат. заметки. — 1984. — *36*, № 3. — С. 417–423.
54. *Собчук В. С.* Внутренние почти геодезические отображения// Изв. вузов. Мат. — 1989. — *324*, № 5. — С. 62–64.
55. *Собчук В. С.* Почти геодезические отображения римановых пространств на симметрические римановы пространства// Мат. заметки. — 1975. — *17*, № 5. — С. 757–783.

56. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Успехи мат. наук. — 1956. — *11*, № 4(70). — С. 45–116.
57. *Черньшенко В. М.* Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических// Науч. зап. Днепр. ун-та. — 1961. — *55*, № 6, С. 105–110.
58. *Черньшенко В. М.* Пространства со специальным комплексом геодезических линий// Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1961. — С. 253–268.
59. *Шадный В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны// Мат. заметки. — 1979. — *25*, № 2. — С. 293–296.
60. *Шапиро Я. Л.* Геодезические поля направлений и проективные системы путей// Мат. сб. — 1955. — *36*. — С. 125–148.
61. *Широков А. П.* Пространства над алгебрами и их приложения// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прил., Тем. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2002. — *73*. — С. 135–161.
62. *Шиха М.* Геодезические и голоморфно проективные отображения параболически келеровых пространств. — Дисс. на соик. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Моск. пед. унив., 1992.
63. *Яблонская Н. В.* Почти геодезические оторажения пространства аффинной связности с кручением. — Деп. в ВИНИТИ 19.06.79, № 2190–79 Деп.
64. *Яблонская Н. В.* Инвариантные геометрические объекты почти геодезических оторажений π_2 общих пространств аффинной связности. — Деп. в ВИНИТИ 12.02.80, № 543–80 Деп.
65. *Яблонская Н. В.* О некоторых типах почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности// Укр. геом. сб. — 1984. — *27*. — С. 120–124.
66. *Яблонская Н. В.* О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1986. — *1*. — С. 78–80.
67. *Adamów A.* On reduced almost geodesic mappings in Riemannian spaces// Demonstr. Math. — 1982. — *15*. — С. 925–934.
68. *Berezovski V. E.* On special almost geodesic mappings of the type π_1// Satelite Conf. of ICM in Berlin, Brno, 1998. — С. 7.
69. *Berezovski V. E., Mikesh J.* On classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces// Differ. Geom. and Its Appl./ Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl. 1988, 1989. — С. 41–48.
70. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces// Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. — 1996. — *35*. — С. 21–24.

71. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of type π_1 which maintain a system n-orthogonal hypersurfaces// Conf. of Diff. Geom., Budapest, 1996. — P. 21.
72. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of the type π_1 of Riemannian spaces preserving a system n-orthogonal hypersurfaces// Rend. Circ. Mat. Palermo(2) Suppl. — 1999. — *59.* — C. 103–108.
73. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection// Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. — 2004. — *43.* — C. 21–26.
74. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection// Proc. of 11 Math. Conf. Kiev, 2006, — C. 320.
75. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On main equations in Cauchy type form of special almost geodesic mappings of type π_1// Proc. of 12 Math. Conf., Kiev, 2008. — C. 500.
76. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On special case of almost geodesic mappings of spaces with affine connection, where preserwing Ricci tensor// Proc. of 13 Math. Conf., Kiev, 2010. — C. 55.
77. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of type π_1 which preserve n-orthogonal system of hyperplanes of Riemannian spaces// Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе – 2010», Одесса, 2010. — С. 71.
78. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Canonical almost geodesic mappings of type π_1 onto pseudo-Riemannian manifolds// Diff. Geom. and its Appl./ Proc. Conf., in Honour of L. Euler, Olomouc, August, 2007.
79. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds// 9th Int. Conf. APLIMAT 2010, Bratislava, 2010.
80. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.). — 2010. — *26*, № 2. — C. 221–230.
81. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Fundamental PDE's of the Canonical Almost Geodesic Mappings of Type $\tilde{\pi}_1$. — arXiv:1006.3200, 2010, 18 c.
82. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* On a class of curvature preserving almost geodesic mappings of manifolds with affine connection// 10th Int. Conf. APLIMAT 2011, Bratislava, 2011. — C. 623–628.
83. *Brinkmann H. W.* Einstein spaces which are mapped conformally on each other// Math. Ann. — 1925. — *94.* — C. 119–145.
84. *Eisenhart L. P.* Riemannian Geometry// Princeton Univ. Press, 1926.

85. *Hinterleitner I., Mikeš J.* On F-planar mappings of spaces with affine connections// Note Mat. — 2007. — *27*, № 1. — С. 111–118.
86. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic Mappings and Einstein Spaces. — arXiv:1201.2827v1 [math.DG].
87. *Ishihara S.* Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. J., II. Ser. 9. — 1957. — С. 273–297.
88. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. Vol. 1, Interscience. Publ. New York–London, 1963; New York–Dover, 1991.; Vol. 2, Interscince. Publ., New York–London–Sydney, 1969.
89. *al Lamy, Raad J. Mikeš J., Škodová M.* On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kählerian spaces// Arch. Math. (Brno) 42. Suppl. — 2006. — С. 291–299.
90. *Levi-Civita T.* Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. Ann. Mat. Milano, 24, Ser. 2. — 1886. — С. 255–300.
91. *Mikeš J.* F-planar mappings and transformations// Diff. Geometry and its Appl./ Proc. of the Conference, August 24-30, Brno, 1986. — Brno, Czechoslovakia, 1986. — С. 245–254.
92. *Mikeš J.* Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — *78*, № 3. — С. 311–333.
93. *Mikeš J.* Holomorphically projective mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 1998. — *89*, № 3. — С. 1334–1353.
94. *Mikeš J., Báscó S., Berezovski V.* Geodesic mappings of weakly Berwald spaces and Berwald spaces onto Riemannian spaces// Int. J. Pure Appl. Math. — 2008. — *45*, № 3. — С. 413–418.
95. *Mikeš J., Berezovski V.* Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces// Diff. geom. and its appl. Proc. of a colloq., Eger, Hungary, August 20–25, 1989. — Amsterdam: North-Holland Publ./ Comp. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. — 1992. — *56*. — С. 491–494.
96. *Mikeš J., Chodorová M.* On concircular and torse-forming vector fields on compact manifolds// Acta Math. Acad. Paedogog. Nyhazi. (N.S.). — 2010. — С. 27.
97. *Mikeš J., Rachůnek L.* T-semisymmetric spaces and concircular vector fields// Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. — 2002. — *69*. — С. 187–193.
98. *Mikeš J., Škodová M.* Concircular vector fields on compact manifolds with affine connections// Publ. De la RSME. — 2007. — *10*. — С. 302–307.
99. *Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc: Publ. Palacky Univ., 2009. — 304 с.
100. *Otsuki T., Tashiro Y.* On curves in Kaehlerian spaces// Math. J. Okayama Univ. — 1954. — *4*. — С. 57–78.

101. *Prvanović M.* Holomorphically projective transformations in a locally product space// Math. Balkanica (N.S.). — 1971. — *1.* — С. 195–213.
102. *Rachůnek L., Mikeš J.* On tensor fields semiconjugated with torse-forming vector fields// Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. — 2005. — *44.* — С. 151–160.
103. *Shiha M.* On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces// Diff. geometry and its appl., Opava, 1992. — С. 157–160; Math. Publ., Silesian Univ. Opava, 1993.
104. *Shiha M., Mikeš J.* On holomorphically projective flat parabolically Kählerian spaces// Contemporary Geom. and Related Topics. Čigoja Publ. Comp. — 2006. — *250.* — С. 467–474.
105. *Škodová M., Mikeš J., Pokorná O.* On holomorphically projective mappings from equiaffine symmetric and recurrent spaces onto Kählerian spaces// Rend. Circ. Mat. Palermo (2). — 2005. — *75.* — С. 309–316.
106. *Sobchuk V. S., Mikeš J., Pokorná O.* On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces// Novi Sad J. Math. — 1999. — *29*, № 3. — С. 309–312.
107. *Stanković M. S., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the first kind// Czechoslovac Math. J. — 2010. — *60*, № 3. — С. 635–653.
108. *Stanković M. S., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind// Int. Electron. J. Geom. — 2010. — *3*, № 2. — С. 26–39, electronic only.
109. *Stanković M. S., Minćić S. M., Velimirović Lj. S.* On equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces// Czechoslovac Math. J. — 2004. — *54*, № 3. — С. 701–715.
110. *Stanković M. S., Minćić S. M., Velimirović Lj. S.* On holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces// Mat. Vesnik. — 2002. — *54*, № 3-4. — С. 195–202.
111. *Tashiro Y.* On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space// Math. J. Okayama Univ. — 1957. — *6.* — С. 147–152.
112. *Vrănceanu G.* Lecons de geometrie differentielle. — Acad. RPR, Bucharest, 1957.
113. *Yano K.* Differential geometry of complex and almost comlex spaces. — Pergamon Press, 1965.
114. *Yano K.* Concircular geometry, I, II, III, IV, V. Proc. Imp. Acad. Japan. — 1940. — *16.* — С. 195–200, 345–360, 442–448, 505–511; 1942. — *18.* — С. 446–451.

115. *Yano K.* On the torse-forming directions in Riemannian spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1944. — *20.* — C. 340–345.

В. Березовский
Уманский национальный университет садоводства,
Умань, Украина
E-mail: `berez.volod@rambler.ru`

J. Mikeš
Univerzita Palackého v Olomouci, Czech Republic
E-mail: `mikes@inf.upol.cz`