О ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЕРВОГО ТИПА

В. Е. Березовский, Й. Микеш

Уманский государственный аграрный университет,
berez.volod@rambler.ru

Университет им. Палацкого, Оломоуц, mikes@inf.upol.cz

1 Введение

В работе [1] введено понятие почти геодезических отображений типа π_1^* пространств аффинной связности без кручения. Эти отображения являются специальным случаем почти геодезических отображений типа π_1, которые ввел в рассмотрение Н.С. Синюков [5,6].

В настоящей работе изложены общие закономерности отображений π_1^*. В частности, найдены инвариантные объекты относительно этих отображений. Изучаются отображения π_1^* пространств постоянной кривизны и аффинных пространств.

Напомним основные понятия теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, которые изложенны в [5,6].

Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n называют *почти геодезической*, если вдоль нее существует двумерная параллельная площадка, содержащая ее касательный вектор.

Диффеоморфизм $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Для того чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x) \equiv \overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям:

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma \equiv a\, P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\,\lambda^h,$$

где $A^h_{ijk} \equiv P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}$, Γ^h_{ij} $(\overline{\Gamma}^h_{ij})$ – объект аффинной связности пространства A_n $(\overline{A}_n)$, λ^h – произвольный вектор, a и b некоторые функции переменных x^h и λ^h. Здесь и в дальнейшем знак "," обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n..

В [5,6] выделены три типа почти геодезических отображений: π_1, π_2 и π_3. Нами доказано [2], что при $n > 5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_1 характеризуются следующими условиями на тензор деформации:

$$A^h_{(ijk)} = \delta^h_{(i}\, a_{jk)} + b_{(i}\, P^h_{jk)},$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, b_i – некоторый ковектор, δ^h_i – символы Кронекера, (ijk) – обозначает симметрирование по указанным индексам без деления.

2 Почти геодезические отображения π_1^*

Пусть при отображении A_n на $\overline{A}_n$ выполняются условия

$$P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} = a_{ij}\,\delta^h_k, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор.

Эти отображения являются частным случаем почти геодезических отображений типа π_1. В дальнейшем такие отображения будем обозначать через π_1^*.

Рассматривая (1) как систему типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij} найдем условия их интегрируемости. Для этого ковариантно продифференцируем (1) по x^m в A_n, а затем проальтернируем по индексам k и m.

Условия интегрируемости уравнения (1) свернем по индексам h и m. В результате находим

$$(n-1)\, a_{ij,k} = P^{\alpha}_{ij} R_{\alpha k} - P^{\beta}_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)\beta k} - (n-1)\, P^{\alpha}_{ij} a_{\alpha k}, \tag{2}$$

где R^h_{ijk} – тензор Римана в пространстве A_n, $R_{ij} \equiv R^{\alpha}_{ij\alpha}$ – тензор Риччи.

Очевидно, уравнения (1) и (2) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x). \tag{3}$$

Тем самым доказывается

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение π_1^* на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши (1), (2) и (3) относительно функций P^h_{ij} и a_{ij}.*

Условия интегрируемости указанной системы типа Коши имеют вид:

$$-P^{\alpha}_{ij} R^h_{\alpha km} + P^h_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)km} =$$
$$\frac{1}{n-1}\left[(P^{\alpha}_{ij} R_{\alpha m} - P^{\beta}_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)m\beta})\delta^h_k - (P^{\alpha}_{ij} R_{\alpha k} - P^{\beta}_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)k\beta})\delta^h_m\right],$$

$$(n-1) a_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)km} = P^{\alpha}_{ij} R^h_{\alpha[k,m]} + P^{\beta}_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)mk,\beta} +$$
$$+ R_{[mk]} a_{ij} + P^{\beta}_{\gamma[m} R^h_{|i|k]\beta} P^{\gamma}_{\alpha j} + P^{\alpha}_{ij} P^{\beta}_{\alpha\gamma} R^{\gamma}_{[km]\beta} - P^{\alpha}_{ij} P^{\beta}_{\gamma[k} R^{\gamma}_{|\alpha|m]\beta},$$

где $[i\,j]$ обозначает альтернирование по указанным индексам.

3 Инвариантные объекты относительно π_1^*

Если P^h_{ij} – тензор деформации, то, как изветно [5], между тензорами Римана R^h_{ijk} и $\overline{R}^h_{ijk}$ пространств A_n и $\overline{A}_n$ имеется зависимость

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{i[k,j]} + P^{\alpha}_{i[k} P^h_{j]\alpha}. \tag{4}$$

Используя формулы (1) и (4) находим

$$\overline{\overset{*}{W}}{}^{\ h}_{\ ijk} = \overset{*}{W}{}^{\ h}_{\ ijk}, \tag{5}$$

где

$$\overset{*}{W}{}^{\ h}_{\ ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1} R_{i[j}\delta^h_{k]}, \qquad \overline{\overset{*}{W}}{}^{\ h}_{\ ijk} \equiv \overline{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\overline{R}_{i[j}\delta^h_{k]}. \tag{6}$$

Очевидно, $\overset{*}{W}{}^{\ h}_{\ ijk}$ и $\overline{\overset{*}{W}}{}^{\ h}_{\ ijk}$ соответственно представляют собой тензоры типа $\binom{1}{3}$ в пространствах A_n и $\overline{A}_n$. Соотношения (5) показывают, что этот тензор инвариантен относительно почти геодезических отображений π_1^*.

Свертывая формулы (5) по индексам h и i легко убедиться, что имеет место равенство

$$W_{ij} = \overline{W}_{ij}, \tag{7}$$

где

$$W_{ij} \equiv R_{[ij]}, \qquad \overline{W}_{ij} \equiv \overline{R}_{[ij]}, \tag{8}$$

Учитывая (7) формулы (5) можно записать в виде

$$W^h_{ijk} = \overline{W}^h_{ijk}, \tag{9}$$

где W^h_{ijk} и $\overline{W}^h_{ijk}$ – тензоры проективной кривизны Вейля пространств A_n и $\overline{A}_n$ соответственно.

В итоге имеет место

Теорема 2. *Тензор проективной кривизны Вейля W^h_{ijk}, а также тензоры $\overset{*}{W}{}^{\ h}_{\ ijk}$ и W_{ij}, которые определены формулами (6) и (8), являются инвариантными относительно почти геодезических отображений π_1^* геометрическими объектами пространств аффинной связности.*

4 Отображения π_1^* аффинных и проективно-евклидовых пространств

Из теоремы 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Если проективно-евклидово или эквиаффинное пространство допускает почти геодезическое отображение π_1^* на $\overline{A}_n$, то $\overline{A}_n$ является проективно-евклидовым или эквиаффинным пространством соответственно.*

Доказательство теоремы 3, очевидно, следует из того, что в проективно-евклидовом пространстве тензор Вейля обращается в нуль, а в эквиаффинном пространстве $W_{ij} = 0$.

Следовательно, на основании теоремы 2 в пространстве $\overline{A}_n$ обращаются в нуль указанные тензоры. Это означает, что $\overline{A}_n$ является проективно-евклидовым или эквиаффинным пространством соответственно. Таким образом, на основании теоремы 3 проективно-евклидовы или эквиаффинные пространства образуют замкнутые классы относительно отображений π_1^*.

Легко видеть, что тензор Римана сохраняется при отображениях π_1^* тогда и только тогда, когда тензор a_{ij} тождественно обращается в нуль. В этом случае основные уравнения принимают вид:

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k}. \tag{10}$$

Уравнения (10) в аффинном пространстве вполне интегрируемы. Следовательно, имеют решения для любых начальных значений $P^h_{ij}(x_o)$.

Если начальные значения такие, что $P^h_{ij}(x_o) \not\equiv \delta^h_{(i}\psi_{j)}(x_o)$, то построенное таким образом решение устанавливает отображение π_1^*, отличное от геодезического, аффинного пространства A_n на аффинное пространство $\overline{A}_n$. Поэтому имеет место

Теорема 4. *Существует отображение π_1^* аффинного пространства на себя, при котором все прямые переходят в плоские кривые, не все из которых являются прямыми.*

Более того, изучая условия интегрируемости уравнений (1) и (2) в аффинных пространствах убедимся, что они вполне интерируемы.

Имеет место

Теорема 5. *Римановы пространства V_n ненулевой постоянной кривизны допускают негеодезические отображения π_1^*, которые по необходимости являются отображениями π_3 и сохраняют квадратичный комплекс геодезических.*

Доказательство. Пусть риманово пространство V_n ненулевой постоянной кривизны K допускает негеодезическое отображение π_1^*. Условия интегрируемости уравнений (1) принимают вид:

$$K(P^h_{k(i}g_{j)l} - P^h_{l(i}g_{j)k}) + \delta^h_l B_{ijk} - \delta^h_k B_{ijl} = 0, \tag{11}$$

где $B_{ijk} \equiv a_{ij,k} + P^\alpha_{ij}(a_{\alpha k} + K\, g_{\alpha k})$, g_{ij} – метрический тензор пространства V_n.

Из последней формулы следует, что

$$P^h_{ij} = P^h g_{ij}\,, \tag{12}$$

где P^h – некоторый вектор. Тогда отображение является F-планарным [4]. Следовательно, на основании исследований [2], такое отображение является почти геодезическим отображением типа π_3. В работе [2] доказано, что отображения $\pi_1 \cap \pi_3$ сохраняют квадратичный комплекс геодезических [7].

После подстановки (12) в (1) имеем

$$P^h_{,k} + P^h P_k = \alpha \delta^h_k,$$

где α – некоторый инвариант, P_k – некоторый ковектор.

Этими условиями характеризуются концикулярные векторные поля P^h, которые, как известно, всегда существуют в пространствах постоянной кривизны.

5 Примеры почти геодезических отображений π_1^*

Приведем пример почти геодезического отображения типа π_1^* плоского пространства A_n на плоское пространство $\overline{A}_n$.

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^n$ – аффинные координаты пространств A_n и $\overline{A}_n$ соответственно. Точечное отображение

$$\overline{x}^h = \frac{1}{2} C^h_\alpha (x^\alpha - C^\alpha)^2 + x^h_o, \tag{13}$$

где C^h_i, C^h, x^h_o – некоторые постоянные, причем $x^h \neq C^h$, $\det\left|C^h_i\right| \not\equiv 0$, определяют почти геодезическое отображение π_1^* пространства A_n на $\overline{A}_n$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор деформации связности P^h_{ij} в системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеет вид

$$P^i_{ii} = \frac{1}{x^i - C^i}, \qquad i = \overline{1, n}\,,$$

а остальные компоненты равны нулю.

Легко видеть, что при таком строении тензор P^h_{ij} удовлетворяет уравнениям (10). При этом нужно заметить, что такое отображение будет отличным от типов π_2 и π_3.

При таком отображении прямые пространства A_n, которые, как известно, определяются уравнениями $x^h = a^h + b^h\, t$ где t – параметр, переходят в параболы пространства $\overline{A}_n$, определяемые уравнениями

$$\overline{x}^h = D^h + E^h\, t + F^h\, t^2,$$

где

$$D^h = \frac{1}{2} C^h_\alpha (a^\alpha - C^\alpha)^2, \quad E^h = C^h_\alpha (a^\alpha - C^\alpha) b^\alpha, \quad F^h = \frac{1}{2} C^h_\alpha (b^\alpha)^2.$$

Исключение представляют прямые, для которых векторы E^h и F^h коллинеарны. В этом случае их образами являются прямые.

В заключение отметим, что формулы (13) порождают семейство почти геодезических преобразований типа π_1 плоского пространства, если считать коэффициенты C^h_i, C^h и x^h_o непрерывными параметрами.

Работа выполнена при поддержке грантов GA ČR 201/05/2707 и MSM 6198959214 Чешской Республики.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Березовский В.Е. *О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности типа* π_1^*.// Деп. в УкрНИИНТИ от 8.05.1991, N. 654-91 Ук. – 8с.

2. Berezovsky V.E., Mikeš J. *On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces.*// Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl. 1988. – 1989. – C. 41–48.

3. Berezovsky V.E., Mikeš J. *On almost geodesic mappings of the type* π_1 *of Riemannian spaces preserving a system n-orthogonal hypersurfaces.*// Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. – II. – Ser. 59. – 1999. – C. 103–108.

4. Mikeš J. *Holomorphically projective mappings and their generalizations.*// J. Math. Sci., New York. – 89. – No. 3. – 1998. – C. 1334–1353.

5. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* М.: Наука, 1979.

6. Синюков Н.С. *Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.*// Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – М..: ВИНИТИ. – 13. – 1982. С. 3–26. 1

7. Чернышенко В.М. *Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических.*// Научные записки Днепропетровского ун-та. – 55. – 6. –1961. – С. 105–110.