ИЗВЕСТИЯ
ПЕНЗЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. Г. БЕЛИНСКОГО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
№26 2011

ПГПУ
ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

IZVESTIA
PENZENSKOGO GOSUDARSTVENNOGO
PEDAGOGICHESKOGO UNIVERSITETA
IMENI V. G. BELINSKOGO
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES
№26 2011

УДК: 514.16.8

$(n-2)$-ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПЕРВОГО ТИПА

© В. Е. БЕРЕЗОВСКИЙ[1], Й. МИКЕШ[2]
[1]Уманский национальный университет (Украина),
кафедра математики и информатики
e-mail: berez.volod@rambler.ru
[2]Университет им. Ф. Палацкого г. Оломоуц (Чехия),
кафедра алгебры и геометрии
e-mail: josef.mikes@upol.cz

Березовский В. Е., Микеш Й. — $(n-2)$-проективные пространства первого типа // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. 2011. № 26. С. 39–43. — В настоящей работе изучаются канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности на плоские пространства. Основные уравнения таких отображений сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров от которых зависит общее решение указанных отображений.
Ключевые слова: почти геодезическое отображение, основные уравнения типа Коши, пространство аффинной связности

Berezovski V. E., Mikeš J. — $(n-2)$-projective spaces of the first type // Izv. Penz. gos. pedagog. univ. im.i V. G. Belinskogo. 2011. № 26. P. 39–43. — In this article we study a first type canonical almost geodesic mappings of manifolds with afine connection. A fundamental equations of these mappings we obtained in form of closed Cauchy type system in covariant derivatives. Denoted number of parameters from depended general solutions of these mappings.
Keywords: almost geodesic mapping, Cauchy type fundamental equations, manifold with affine connection

В в е д е н и е.

В настоящей работе изучаются канонические почти геодезические отображения первого типа π_1 пространств аффинной связности A_n на плоские пространства. Если не сказано иначе, размерность n изучаемых пространств предполагается больше 2. Основные уравнения таких отображений сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров от которых зависит общее решение указанных отображений.

Подобные свойства ранее установлены для геодезических, голоморфно-проективных и F-планарных отображений на (псевдо-) римановы пространства и их обобщений, см., например, [23, 4, 7, 7, 8, 18, 19, 20, 20, 14].

1. Основные понятия и теоремы теории почти геодезических отображений

Напомним основные понятия и теоремы теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, которые изложенные в [23, 4].

Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n, называют *почти геодезической*, если вдоль нее существует двумерная параллельная площадка, содержащая ее касательный вектор.

Диффеоморфизм f между пространствами аффинной связности A_n и $\bar{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x) = \bar{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям:

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\, P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\,\lambda^h,$$

где $A^h_{ijk} = P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}$, Γ^h_{ij} и $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ – объекты аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$, λ^h – произвольный вектор, a и b – некоторые функции переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Здесь и в дальнейшем знак " , " обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n.

В [23, 4] выделены три типа почти геодезических отображений: π_1, π_2 и π_3. Нами доказано [5], что при $n > 5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_1 характеризуются следующими условиями на тензор деформации:

$$A^h_{(ijk)} = \delta^h_{(i}a_{jk)} + b_{(i}P^h_{jk)}, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, b_i – некоторый ковектор, δ^h_i – символы Кронекера, (ijk) – обозначает симметрирование по указанным индексам без деления.

Если в указанном уравнении (1) выполняется условия $b_i \equiv 0$, то отображения называют *каноническими* почти геодезическими отображениями типа π_1.

Известно [23, 4], что любое почти геодезическое отображение типа π_1 можно представить в виде композиции канонического почти геодезического отображения типа π_1 и геодезического отображения. Последнее можно считать тривиальным почти геодезическим отображением.

Известно [23, 4], что тензор Римана R^h_{ijk} пространства A_n связан с тензором Римана $\bar{R}^h_{ijk}$ пространства $\bar{A}_n$ соотношением

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{i[k,j]} + P^h_{\alpha[j}P^\alpha_{k]i}, \tag{2}$$

где $[jk]$ обозначает альтернирование по указанным индексам.

На основании (2) условия (1) представляются в виде

$$3(P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}) = R^h_{(ij)k} - \bar{R}^h_{(ij)k} + \delta^h_{(k}a_{ij)} + b_{(i}P^h_{jk)}. \tag{3}$$

Если при отображениях (3) сохраняется тензор Римана и $b_i = 0$, то фактически такие отображения характеризуются следующими уравнениями

$$P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} = \delta^h_{(k}\tilde{a}_{ij)} \tag{4}$$

где $\tilde{a}_{ij}$ – некоторый симметрический тензор.

Изучая условия интегрируемости уранений (4) находим [7]:

$$\tilde{a}_{ij,k} = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\,\Big(n(P^\alpha_{ij}R_{\alpha k} - P^\beta_{\alpha(i}R^\alpha_{j)k\beta}) + R_{\alpha(i}P^\alpha_{j)k} - P^\beta_{\alpha k}R^\alpha_{(ij)\beta} - P^\beta_{\alpha(i}R^\alpha_{|k|j)\beta} + \\ +(n+1)\cdot(\tilde{a}_{k(i}P^\alpha_{j)\alpha} - \tilde{a}_{\alpha(i}P^\alpha_{j)k}) + 2\,(\tilde{a}_{ij}P^\alpha_{k\alpha} - \tilde{a}_{k\alpha}P^\alpha_{ij})\Big). \tag{5}$$

Очевидно, уравнения (4) и (5) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши относительно функций P^h_{ij} и $\tilde{a}_{ij}$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x) \ \text{ и } \ \tilde{a}_{ij}(x) = \tilde{a}_{ji}(x). \tag{6}$$

Тем самым доказывается

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (4), на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши (4), (5), (6) относительно функций $P^h_{ji}(x)$ и $\tilde{a}_{ij}(x)$.*

Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает $r \leq \frac{1}{2}\, n(n+1)^2$.

Когда тензор $\tilde{a}_{ij}$ тождественно обращается в нуль, то уравнения (4) принимают вид

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k}. \tag{7}$$

Уравнения (7) в аффинном пространстве вполне интегрируемы. Следовательно, имеют решение для любых начальных значений $P^h_{ij}(x_0)$. Если начальные значения такие, что $P^h_{ij}(x_0) \not\equiv \delta^h_i \psi_j(x_0) + \delta^h_j \psi_i(x_0)$, то построенное таким образом решение устанавливает почти геодезическое отображение первого типа, отличное от геодезического, аффинного пространства A_n на аффинное пространство $\bar{A}_n$. Поэтому имеет место

Теорема 2. *Существует почти геодезическое отображение первого типа аффинного пространства на себя, при котором все прямые переходят в плоские кривые, не все из которых являются прямыми.*

Когда пространство $\bar{A}_n$ является плоским, то $\bar{R}^h_{ijk} = 0$. С учетом этого уравнения (3) принимают вид

$$3(P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k}) = R^h_{(ij)k} + \delta^h_{(k} a_{ij)} + b_{(i} P^h_{jk)}. \tag{8}$$

Очевидно, пространства A_n, которые допускают почти геодезические отображения первого типа, характеризующимися уравнениями (8), являются *(n-2)-проективными пространствами первого типа.*

Допустим, что в уравнении (8) тензор $b_i = 0$. Такие отображения, как было указано ранее, являются каноническими почти геодезическими отображениями первого типа.

Таким образом, мы имеем уравнения

$$3(P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k}) = R^h_{(ij)k} + \delta^h_{(k} a_{ij)}. \tag{9}$$

Рассматривая (9) как систему типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij} найдем условия их интегрируемости. Для этого ковариантно продифференцируем (9) по x^m, а затем проальтернируем по индексам k и m. С учетом тождества Риччи после преобразований получим

$$\begin{gathered} \delta^h_{[k} a_{|ij|,m]} + \delta^h_i a_{j[k,m]} + \delta^h_j a_{i[k,m]} = \\ = 3P^h_{\alpha(i} R^\alpha_{j)km} + P^h_{\alpha k} R^\alpha_{(ij)m} - P^h_{\alpha m} R^\alpha_{(ij)k} + a_{m(i} P^h_{j)k} - a_{k(i} P^h_{j)m} + R^h_{(i|km|,j)}. \end{gathered} \tag{10}$$

Условия интегрируемости (10) свернем по индексам h и m. В результате находим

$$a_{k(i,j)} - (n+1)\, a_{ij,k} = 3P^\beta_{\alpha(j} R^\alpha_{i)k\beta} + P^\beta_{\alpha k} R^\alpha_{(ij)\beta} - P^\beta_{\alpha\beta} R^\alpha_{(ij)k} + R_{(i|k|,j)} + a_{\alpha(i} P^\alpha_{j)k} - a_{k(i} P^\alpha_{j)\alpha}. \tag{11}$$

Проальтернируем уравнения (11) по индексам i и k. После преобразований получим

$$a_{kj,i} = a_{ij,k} + \frac{1}{n+2}\, (3P^\beta_{\alpha(j} R^\alpha_{\beta)ki} + 2P^\beta_{\alpha[i} R^\alpha_{|j|k]\beta} + P^\beta_{\alpha[k} R^\alpha_{i]j\beta} + R_{[ik],j} + R_{j[k,i]} + a_{\alpha[i} P^\alpha_{k]j} + a_{j[i} P^\alpha_{k]\alpha}). \tag{12}$$

В уравнении (12) поменяем местами индексы i и j. Получим

$$a_{ki,j} = a_{ji,k} + \frac{1}{n+2}\left(3P^{\beta}_{\alpha(i}R^{\alpha}_{\beta)kj} + 2P^{\beta}_{\alpha[j}R^{\alpha}_{|i|k]\beta} + P^{\beta}_{\alpha[k}R^{\alpha}_{j]i\beta} + R_{[jk],i} + R_{i[k,j]} + a_{\alpha[j}P^{\alpha}_{k]i} + a_{i[j}P^{\alpha}_{k]\alpha}\right). \qquad (13)$$

Подставив (12) и (13) в (11) находим

$$a_{ij,k} = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\Big[4P^{\beta}_{\alpha(j}R^{\alpha}_{|\beta k|i)} + (3n+5)P^{\beta}_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)\beta k} - (n+3)P^{\beta}_{\alpha k}R^{\alpha}_{(ij)\beta} + (n-1)P^{\beta}_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{(ij)k} - \\ -nR_{(i|k|,j)} - R_{k(i,j)} - R_{(ij),k} + 2(a_{ij}P^{\alpha}_{k\alpha} - a_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij}) - (n+1)(a_{\alpha(i}P^{\alpha}_{j)k} - a_{k(i}P^{\alpha}_{j)\alpha})\Big]. \qquad (14)$$

Очевидно, уравнения (9) и (14) в данном пространстве A_n представляют собой систему типа Коши в ковариантных производных относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x) \ \text{ и } \ a_{ij}(x) = a_{ji}(x). \qquad (15)$$

Тем самым доказывается

Теорема 3. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (9), на плоское пространство, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши (9), (14), (15) относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает $r \le \frac{1}{2}\,n(n+1)^2$.

Учитывая, что любое почти геодезическое отображение первого типа можно представить в виде композиции канонического почти геодезического и геодезического отображений, в итоге имеем

Теорема 4. *Все (n–2)-проективные пространства первого типа являются или пространствами A_n, в которых имеет решение смешанная система типа Коши (9), (13), (14) относительно функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$, или пространствами аффинной связности, допускающими геодезическое отображение на указанные пространства A_n.*

Работа выполнена при поддержке грантов Грантового агентства Чешской Республики P201/11/0356 и Правительства Чешской Республики MSM 6198959214.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский В. Е., Микеш Й. Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе – 2011". Одесса: Фонд "Наука", 2011. Т. 30. С. xx.

2. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука. 1966. С. 496.

3. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.

4. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1982. Т. 13. С. 3-26.

5. Berezovski V., Mikeš J. On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces // Proc. Conf. Diff. Geometry and Appl. 1988. Dubrovnik, Yugoslavia, Novi Sad. 1989. P. 41-48.

6. Berezovski V., Mikeš J. On the classification of almost geodesic mapings of affine connection spaces // Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. Rer. Nat. Math. 1996. V. 35. P. 21-24.

7. Berezovski V., Mikeš J., Vanžurová A. On a class of curvature preserving almost geodesic mappings of manifolds with affine connection // 10^{th} Int. Conference APLIMAT. Bratislava. 2011. P. 623-628.

8. Hinterleitner I., Mikeš J. On fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations // J. Math. Sci. New York. 2011. V. 174, № 5, P. 537-554. Translation from Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 2010. V. 124. P. 7-34.

9. Hinterleitner I., Mikeš J. Projective equivalence and manifolds with equiaffine connection // J. Math. Sci. New York. 2011. Translation from Fundam. Prikl. Mat. 2010. V. 16. № 1, P. 47–54.

10. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces // J. Math. Sci. New York. 1996. V. 78. № 3. P. 311-333. Translation from Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 2002. V. 11. P. 121–162.

11. Mikeš J. Holomorphically projective mappings and their generalizations // J. Math. Sci. New York. 1998. V. 89. № 3. 1334–1353. Translation from Geometry – 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 30, VINITI, Moscow, 2002. P. 258–289.

12. Mikeš J., Jukl M., Juklová L. Some results on traceless decomposition of tensors // J. Math. Sci. New York. 2011. P. 1-14. Translation from Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 2010. V. 124. P. 139-158.

13. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations // Olomouc: Palacky University Press. 2009. P. 304.

14. Vavrzhikova H., Mikeš J., Pokorná O., Starko G. On the basic equations of the almost geodesic mappings of type $\pi_2(e)$ // Russian Math. (Iz. VUZ). 2007. V. 51, № 1, 8-12. Translation from Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2007. P. 10–15.