

ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.М. Дякон
Л.Є. Ковальов

МОДЕЛІ І МЕТОДИ
ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Підручник

ЗАТВЕРДЖЕНО МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЯК ПІДРУЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Київ
АНФ ГРУП
2013

УДК 519. 85 (058.8)

ББК 22.183.4я73

Д 99

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів
(лист за № 1/11–15295 від 01.10.2012)

Рецензенти:

Євтухов В.М. доктор ф.-м. н., професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь
Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова;

Кіпніс Л.А. доктор ф.-м. н., професор, завідувач кафедри вищої математики Уманського державного педагогічного університету ім. П. Тичини.

Дякон В. М., Ковальов Л. Є.

Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.:

АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.

Підручник містить систематичне викладення основних питань теорії прийняття рішень: прийняття рішень в умовах визначеності – математичне програмування (лінійне, нелінійне, цілочислове та динамічне); прийняття рішень в умовах невизначеності – стохастичне програмування, теорія ігор та статистичних рішень; прийняття багатоцільових рішень; марковські процеси в прийнятті рішень.

Окремий розділ присвячений основам імітаційного моделювання, як альтернативі математичному моделюванню.

Розглянуті деякі питання застосування інтегрованого середовища MathCad для розв'язання задач оптимізації.

Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів. Після кожного розділу подані питання для самоконтролю та вправи для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за інженерними та економічними спеціальностями.

ISBN 978-966-97259-3-6

ЗМІСТ

Зміст	3
Передмова	7
РОЗДІЛ 1 Вступ до теорії прийняття рішень.....	9
1.1. Предмет теорії прийняття рішень.....	9
1.2. Моделювання в економіці. Типи моделей	15
1.3. Класифікація задач дослідження операцій	23
1.4. Приклади задач дослідження операцій	26
1.5. Коротка історична довідка	33
Питання для самоконтролю.....	36
Вправи	37
РОЗДІЛ 2 Основні властивості задач лінійного програмування	40
2.1. Загальна задача лінійного програмування.....	40
2.2. Дві стандартні форми задач лінійного програмування	42
2.3. Канонічна форма основної задачі лінійного програмування	50
2.4. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування	51
2.5. Основні аналітичні властивості задач лінійного програмування	56
2.6. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування	62
Питання для самоконтролю.....	71
Вправи	72
РОЗДІЛ 3 Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	78
3.1. Ідея симплексного методу	78
3.2. Алгоритм знаходження опорного плану	80
3.3. Алгебра симплексного методу	88
3.4. Симплексні таблиці.....	93
3.5. Метод штучного базису (М–метод).....	97
3.6. Альтернативний оптимум та зациклення в задачах лінійного програмування	105
Питання для самоконтролю.....	112
Вправи	113
РОЗДІЛ 4 Двоїстість і аналіз чутливості.....	122
4.1. Визначення двоїстої (спряженої) задачі.....	122
4.2. Співвідношення між оптимальними розв'язками прямої і двоїстої задач	127
4.3. Економічна інтерпретація двоїстості.....	131
4.4. Двоїстий симплексний метод.....	136
4.5. Матричне представлення симплексних обчислень.....	139

4.6.	Аналіз чутливості оптимального розв'язку	145
	Питання для самоконтролю.....	159
	Вправи	160
РОЗДІЛ 5	Транспортна задача	177
5.1.	Постановка транспортної задачі і особливості її структури	177
5.2.	Знаходження опорних планів транспортної задачі.....	182
5.3.	Метод потенціалів знаходження розв'язків транспортної задачі	186
5.4.	Альтернативний оптимум та вироджуваність в транспортних задачах 193	
5.5.	Транспортна задача з обмеженнями на пропускну здатність.....	198
5.6.	Економічний аналіз транспортних задач.....	201
5.7.	Транспортна задача за критерієм часу.....	205
5.8.	Застосування транспортних моделей для розв'язування деяких економічних задач	209
	Питання для самоконтролю.....	214
	Вправи	215
РОЗДІЛ 6	Цілочислове лінійне програмування.....	223
6.1.	Характеристика задач цілочислового програмування і методів їх розв'язування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування 223	
6.2.	Метод Гоморі.....	228
6.3.	Метод віток і границь	235
6.4.	Адитивний алгоритм для задач з булевими змінними.....	238
	Питання для самоконтролю.....	245
	Вправи	246
РОЗДІЛ 7	Нелінійне програмування	252
7.1.	Загальна постановка задачі.....	252
7.2.	Графічний метод.....	255
7.3.	Класичні методи оптимізації	261
7.4.	Опукле програмування.....	273
7.5.	Квадратичне програмування.....	286
7.6.	Нелінійні задачі з сепарабельними функціями	292
7.7.	Задачі дробово-лінійного програмування	299
7.8.	Багатокритеріальні задачі оптимізації.....	309
	Питання для самоконтролю.....	318
	Вправи	319
РОЗДІЛ 8	Динамічне програмування.....	328
8.1.	Метод динамічного програмування	328

8.2. Деякі економічні задачі, які розв'язуються методами динамічного програмування	341
8.3. Загальна постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності	360
Питання для самоконтролю.....	364
Вправи	365
РОЗДІЛ 9 Стохастичне програмування.....	375
9.1. Формулювання стохастичних задач.....	375
9.2. Методи розв'язування задач стохастичного програмування	377
9.3. Імовірнісне динамічне програмування	386
Питання для самоконтролю.....	395
Вправи	396
РОЗДІЛ 10 Детерміновані моделі управління запасами.....	400
10.1. Узагальнена модель управління запасами	400
10.2. Класична задача економічного розміру замовлення	402
10.3. Задача економічного розміщення замовлення з розривами цін ...	407
10.4. Модель виробничих постачань.....	411
Питання для самоконтролю.....	416
Вправи	417
РОЗДІЛ 11 Системи масового обслуговування (СМО)	421
11.1. Марковські процеси. Потік подій.....	421
11.2. Формулювання задачі, характеристики та класифікація СМО	424
11.3. Моделі народження і загибелі	427
11.4. Деякі прості СМО.....	436
Питання для самоконтролю.....	449
Вправи	450
РОЗДІЛ 12 Методи мережевого (сітьового) планування.....	453
12.1. Основні поняття	453
12.2. Метод критичного шляху	458
12.3. Мінімізація мережі.....	464
12.4. Задача знаходження найкоротшого шляху	466
12.5. Врахування вартісних факторів при реалізації мережевого графіка	467
Питання для самоконтролю.....	476
Вправи	477
РОЗДІЛ 13 Теорія ігор і прийняття рішень.....	483
13.1. Класифікація умов прийняття рішень	483
13.2. Метод аналізу ієрархій	484
13.3. Прийняття рішень в умовах ризику	492

13.4.	Прийняття рішень в умовах невизначеності.....	502
13.5.	Основні поняття теорії ігор	507
13.6.	Методи розв'язування антагоністичних матричних ігор.....	509
	Питання для самоконтролю.....	520
	Вправи	521
РОЗДІЛ 14	Імітаційне моделювання	528
14.1.	Типи імітаційних моделей.....	528
14.2.	Ідея методу Монте-Карло	531
14.3.	Основні елементи статистичного моделювання	536
14.4.	Методи генерування вибірових значень	541
14.5.	Методи збору статистичних даних.....	549
14.6.	Системи імітаційного моделювання	553
	Питання для самоконтролю.....	556
	Вправи	557
РОЗДІЛ 15	Використання інтегрованого середовища MathCad для розв'язування задач оптимізації.....	559
15.1.	Основні характеристики MathCad.....	559
15.2.	Початок роботи у середовищі MathCad.....	562
15.3.	Основи роботи в MathCad.....	565
15.4.	Розв'язання задач лінійного програмування.....	567
15.5.	Розв'язання задач нелінійного програмування	575
15.6.	Розв'язання задач управління запасами.....	578
15.7.	Задачі масового обслуговування.....	582
15.8.	Метод Монте-Карло в системі MathCad.....	585
	Питання для самоконтролю.....	588
	Вправи	589
	Список використаних джерел.....	590
	Додатки	592

ПЕРЕДМОВА

В підручнику розглядається математичний аспект науки про прийняття рішень.

В деяких публікаціях пропонується вважати, що теорія прийняття рішень починається там, де виникає проблема вибору за багатьма критеріями. Тобто, намагаються провести межу між теорією прийняття рішень і дослідженням операцій на основі концепції багатокритеріальної оптимізації. Ми не є прихильниками такого підходу та вважаємо, як і автори робіт [4, 23], що основою теорії прийняття рішень є дослідження операцій.

Пропонований підручник може бути використаний при викладанні курсів „Теорія прийняття рішень” „Математичне програмування” „Дослідження операцій”, „Вища та прикладна математика”.

У підручнику розглянуті необхідні основи математичного апарату і приклади його використання у сучасних економічних застосуваннях. Він містить систематичне викладення основних питань теорії прийняття рішень: прийняття рішень в умовах визначеності – математичне програмування (лінійне, нелінійне, цілочислове та динамічне); прийняття рішень в умовах невизначеності – стохастичне програмування, теорія ігор та статистичних рішень; прийняття багатоцільових рішень; марковські процеси в прийнятті рішень.

Окремий розділ присвячений основам імітаційного моделювання, як альтернативи математичному моделюванню.

У розділі 15 розглянуті основи роботи в інтегрованому середовищі MathCad та приклади розв’язування задач оптимізації за його допомогою.

Викладання матеріалу проведене майже без доведення – основний наголос зроблений на оволодіння навиків використання математичного апарату. Кожен розділ супроводжується розв’язанням характерних за-

дач. Підручник містить питання для самоконтролю і значну кількість вправ до кожного розділу.

Завдяки різноманітному матеріалу і значній кількості прикладів та економічних застосувань, пропонована книга може служити довідниковим посібником для фахівців, які працюють у різних галузях.

Автори підручника – кандидати фізико-математичних наук, доценти О.М. Дякон і Л.Є. Ковальов.

Ми будемо вдячні читачам за відгуки про навчальний посібник. Всі зауваження і побажання щодо змісту книги просимо надсилати на електронну адресу: leo@bira.ck.ua

РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Термін *прийняття рішень* зустрічається в різних наукових галузях, у тому числі в економіці, когнітивній психології, політології та прикладній математиці.

Прийняття рішень – один з основоположних термінів у науковому напрямі, який відомий під назвою *дослідження операцій*.

В інформатиці та обчислювальній техніці останнім часом значна увага приділяється побудові систем підтримки прийняття рішень.

Створення методів прийняття рішень вимагає розгляду математичних, психологічних та комп'ютерних проблем.

В пропонованому посібнику розглядаються математичні проблеми процесу прийняття рішень. Отже, під *теорією прийняття рішень* ми в основному розуміємо *дослідження операцій*.

Теорія прийняття рішень – це сукупність математичних методів і моделей, призначених для обґрунтування рішень, які приймаються на етапах аналізу, розробки та експлуатації складних систем різної природи: організаційно-економічних, виробничих, технічних, інформаційних та ін.

Сучасна економічна теорія на мікро- та на макрорівні містить як необхідний елемент математичні моделі і методи. Використання математики в економіці дозволяє, по-перше, виділяти і формально описувати найбільш важливі, суттєві зв'язки економічних змінних й об'єктів: вивчення такого складного об'єкту передбачає високу ступінь абстракції. По-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримати висновки, адекватні об'єкту, який вивчається. По-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримати нові знання про об'єкт: оцінювати форму і пара-

метри залежностей його змінних, які у найбільшій мірі відповідають наявним спостереженням. Нарешті, по-четверте, використання мови математики дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Найбільш значущими напрямками теорії прийняття рішень є:

- прийняття рішень в умовах визначеності – математичне програмування (лінійне, нелінійне, цілочислове та динамічне);
- прийняття рішень в умовах невизначеності – стохастичне програмування, теорія ігор та статистичних рішень;
- прийняття багатоцільових рішень;
- марковські процеси в прийнятті рішень.

Математичне програмування є одним із основних інструментів дослідження операцій – науки, що займається оптимізацією структури і функціонування великих організаційно-управлінських систем, незалежно від їх суспільного призначення. Прикладом систем можуть бути як народне господарство в цілому, так і окремі його галузі, а також великі підприємства, системи охорони здоров'я, освіти тощо.

Зміст математичного програмування складають теорія та методи розв'язування задач про знаходження екстремумів функції на множині, які визначаються лінійними і нелінійними обмеженнями (рівностями і нерівностями).

Теорія прийняття рішень включає всі етапи вивчення складних систем, починаючи з виявлення мети роботи системи і мети дослідження та закінчуючи встановленням робочих процедур приведенням системи до стану оптимального функціонування. Роль дослідження операцій полягає в знаходженні надійних і якомога простіших методів розв'язування відповідних математичних задач (моделей). Оскільки цей етап посідає одне з центральних місць у всьому дослідженні, розвитку математичного програмування приділяється постійна увага і тепер воно є найбільш досконалим і дійовим засобом дослідження операцій.

Кожна велика система функціонує заради досягнення певної мети. В ідеальному випадку ступінь її досягнення і вся сукупність операцій, що відбуваються в системі, мають кількісну міру, тобто можуть бути описані математично. Деякі з таких кількісних характеристик, позначимо їх c_k ($k = 1, 2, \dots, l$), бувають незмінними, постійними для певної системи чи певних умов. Це так звані *параметри задачі* або *сталі фактори*. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні поділяють на дві групи:

- x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – *ендогенні змінні* (керовані змінні або залежні фактори), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі;
- α_i ($i = 1, 2, \dots, s$) – *екзогенні змінні* (некеровані змінні), значення яких не залежить від волі людей і визначається комплексом зовнішніх умов або ж параметрами системи; їх можна вважати *змінними параметрами задачі*.

При цих умовах, як правило, вдається встановити функціональну залежність між величиною z , якою вимірюється ступінь досягнення мети системи, і незалежними змінними та параметрами системи.

$$z = f(x_j, \alpha_i, c_k). \quad (1.1)$$

Ця функція називається *цільовою функцією*, або *функцією ефективності*, або ж *оптимізуючою формою*, оскільки її значення є мірою ефективності роботи системи по досягненню певної мети.

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j , які б надавали функції ефективності екстремального значення (максимуму або мінімуму), тобто слід знайти

$$z^* = \max_{x_j} f(x_j, \alpha_i, c_k) \text{ або } z^* = \min_{x_j} f(x_j, \alpha_i, c_k)$$

Однак можливості вибору значень керованих змінних практично завжди обмежені. Обмеження ці залежать насамперед від зовнішніх щодо системи умов, а також і від параметрів самої системи. Усі ці обмежен-

ня в ідеальному випадку також можна описати системою математичних рівностей та нерівностей

$$g_r(x_j, \alpha_i, c_k) \leq \geq 0^1 \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

Система (1.2) називається *системою обмежень*, або *системою умов* задачі.

Всякий набір змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) , що задовольняє систему обмежень (1.2), називається *допустимим розв'язком* або *допустимим планом задачі математичного програмування*. Очевидно, кожний такий план зумовлює певний спосіб, стратегію, програму дій його реалізації, певне рішення стосовно роботи системи. Саме з словом „програма” (дій) і пов'язана назва предмета „математичне програмування”. Сукупність усіх розв'язків системи (1.2), тобто *множина допустимих планів*, утворює *область допустимих значень*, або *область означення* задачі математичного програмування.

Задача оптимізації цільової функції (1.1) при умовах (1.2), накладених на незалежні змінні, і є *загальною задачею математичного програмування*. Саме ця задача є *об'єктом* математичного програмування, а знаходження оптимуму цільової функції – його *метою*. Отже, *загальна задача математичного програмування – це задача відшукування умовного екстремуму цільової функції (1.1) при умовах (1.2)*.

Допустимий план, що надає цільовій функції оптимального значення, називається оптимальним. Оптимальний план і є розв'язком задачі математичного програмування (1.1)–(1.2).

Як відомо, упорядкована сукупність значень n змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) є точкою n -вимірного простору. В подальшому цю точку будемо позначати $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а сам оптимальний розв'язок $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

¹ Набір символів $(\leq \geq)$ означає, що для деяких значень біжучого індексу r має місце нерівність (\leq) , для інших – рівність $(=)$, для решти – нерівність (\geq) .

Оптимальні значення цільової функції записують одним з таких виразів:

$$z^*, z(x^*), \text{opt } z, z_{\text{opt}}, \max z, z_{\max}, \min z, z_{\min}.$$

Зауважимо, що в теоретичному плані всі задачі математичного програмування можна розглядати тільки як задачі мінімізації чи тільки як задачі максимізації. Справді, кожну задачу максимізації можна звести до задачі мінімізації, змінивши знак цільової функції. Дійсно, якщо в точці x_0 $z = f(x)$ досягає \max , то $z_1 = -f(x)$ в точці x_0 досягає \min (рис. 1.1). Так само задачі мінімізації можна звести до задач максимізації.

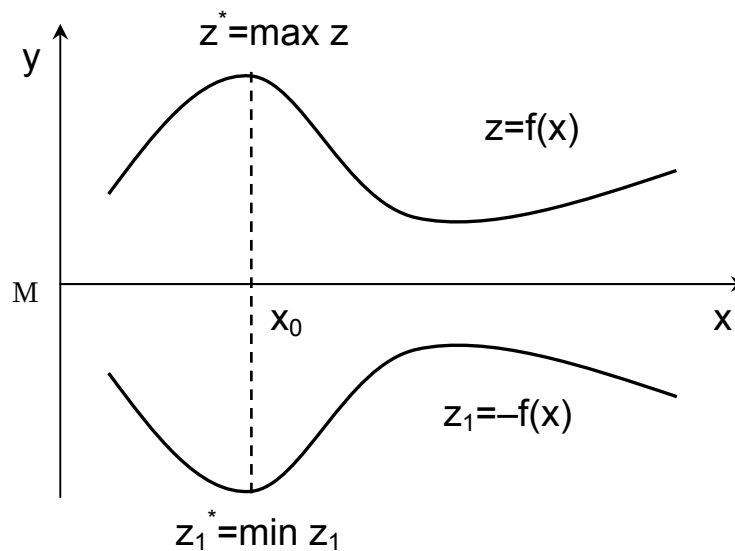


Рис. 1.1.

Система обмежень (1.2) задачі може бути сумісною або несумісною. Сумісна система обмежень визначає в m -вимірному точковому (векторному) просторі область означення задачі, інакше, множину допустимих планів. В більшості задач область означення обмежена, але трапляються випадки необмеженості множини допустимих планів. Це часто зумовлює необмеженість зверху чи знизу цільової функції задачі, що, звичайно, не відповідає дійсності і є результатом некоректної (неточної чи неправильної) постановки задачі, означаючи найчастіше відсутність якогось істотного обмеження. Формулювання задачі також буде некоректним, якщо система обмежень задачі несумісна, суперечлива; тоді мно-

жина допустимих планів задачі не містить, очевидно, жодного плану і буде порожньою. Таке положення найчастіше виникає через введення в задачу зайвих, насправді неістотних обмежень. Зауважимо також, що коректність постановки задачі потребує її стійкості в малому, тобто такої її структури, при якій всякій малій зміні параметрів задачі відповідає мала зміна або незмінність її розв'язку. Ця вимога пов'язана з тим, що параметри всякої конкретної практичної задачі визначаються наближено, з певною точністю; при цьому задана точність визначення параметрів не повинна впливати на результати розв'язку.

Під прийняттям рішень у дослідженні операцій розуміють складний процес, в якому можна виділити наступні чотири етапи:

1-й етап. Побудова якісної моделі проблеми, що розглядається, тобто виявлення факторів, які є найбільш важливими, і встановлення закономірностей, яким вони підпорядковуються.

Звичайно, цей етап виходить за межі математики.

2-й етап. Побудова математичної моделі проблеми, що розглядається, тобто запис у математичних термінах якісної моделі. Таким чином, математична модель – це записана у математичних символах абстракція реального явища, так сконструйована, щоб аналіз її давав можливість проникнути у сутність явища.

Цей етап включає побудову цільової функції (1.1) і системи обмежень (1.2).

В результаті цих двох етапів формується відповідна математична задача.

Другий етап вже потребує залучення математичних знань.

3-й етап. Дослідження впливу змінних на значення цільової функції.

Цей етап передбачає володіння математичним апаратом для розв'язання математичних задач, які виникають на другому етапі проце-

су прийняття рішень. Теорія й методи розв'язання цих задач як раз і складають зміст математичного програмування.

4-й етап. Співставлення результатів обчислень, отриманих на 3-оному етапі, з об'єктом, який моделювався, тобто експертна перевірка результатів (критерій практики).

Таким чином, на цьому етапі встановлюється ступінь адекватності моделі і об'єкту у межах точності вихідної інформації.

1.2. МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ. ТИПИ МОДЕЛЕЙ

В наш час в літературних джерелах нараховується декілька десятків визначень поняття „модель”, які відрізняються одне від одного. Проте це поняття відомо кожному: наприклад, іграшковий літак, паперовий голуб – моделі літака. Менш звичне уявлення про те, що фотознімок пейзажу, географічна карта – це модель місцевості. Знайома з шкільних років формула шляху $S = vt$ – математична модель. *Під моделлю будемо розуміти умовний образ якого-небудь об'єкту, який наближено відтворює цей об'єкт за допомогою деякої мови.*

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (економіко-математичні моделі) і практики (статистичні дані). Ми використовуємо теоретичні моделі для опису і пояснення процесів, що спостерігаються, та збираємо статистичні дані з метою емпіричної побудови і обґрунтування моделей.

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують їх спрощені формальні описи, які називаються економіко-математичними моделями. *Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного економічного процесу.* В економіко-математичних моделях об'єктом є економічний процес (наприклад, використання ресурсів, розподіл виробів між різними типами обладнання і т.п.), а мовою – класичні або спеціально розроблені математичні методи.

Прикладами економіко-математичних моделей є моделі споживацького вибору, моделі фірми, моделі економічного росту, моделі рівно-

ваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Будуючи моделі економісти виявляють суттєві фактори, які визначають досліджуване явище і відкидають деталі, які несуттєві для розв'язку поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні.

Процедура економіко-математичного моделювання замінює трудомісткі натуральні експерименти, що дорого коштують, розрахунками. Дійсно, при використанні економіко-математичних методів достатньо швидко і дешево робиться на ЕОМ порівняння багаточисельних варіантів планів і управлінських рішень. В результаті обираються найбільш оптимальні варіанти.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Розглянемо наступних два простих приклади.

Приклад 1.1. Нехай треба визначити, яку суму коштів слід покласти у банк при заданій ставці проценту (20% річних), щоб через рік отримати €12000?

Розв'язання. Введемо формальні позначення для величин, які фігурують в задачі:

початкова сума – M_0 ,

кінцева сума – M_1 ,

ставка процента – R

і записавши співвідношення між ними

$$M_1 = M_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right),$$

знайдемо шукану величину з розв'язку основного рівняння моделі

$$M_0 = \frac{M_1}{1 + R/100} = \frac{12000}{1,2} = 10000.$$

Шукана сума дорівнює €10000.

Приклад 1.2. Нехай треба визначити, який був об'єм випуску продукції заводу, якщо в результаті технічного переобладнання середня продуктивність праці збільшилась на 20%, і завод став випускати 1200 одиниць продукції.

Розв'язання. Введемо формальні позначення для величин, які фігурують в задачі:

початковий випуск – Q_0 ,

кінцевий випуск – Q_1 ,

процент приросту продуктивності – R

і записавши співвідношення між ними (виходячи з визначення середньої продуктивності праці $L = Q/T$, де T – нормативний період часу)

$$\frac{Q_1}{L_1} = \frac{Q_0}{L_0}, \quad Q_1 = Q_0 \frac{L_1}{L_0} = Q_0 \left(1 + \frac{L_1 - L_0}{L_0} \right) = Q_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right),$$

знайдемо шукану величину з розв'язку основного рівняння моделі

$$Q_0 = \frac{Q_1}{1 + R/100} = \frac{12000}{1,2} = 10000.$$

Порівнюючи отримані моделі і результати, ми можемо помітити, що математична форма моделі

$$X_1 = X_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right)$$

та навіть числові значення величин, що входять в модель, в обох випадках однакові, однак економічна ситуація, яка описується моделлю, економічна інтерпретація моделі і результатів розрахунку абсолютно різні. Таким чином, одні й ті ж математичні моделі і методи можуть бути використані для розв'язку різних економічних задач.

Економіко-математичні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічного об'єкту і на основі цього передбачати майбутню поведінку об'єкта при зміні яких-небудь параметрів. Передбачення майбутніх змін, наприклад, підвищення обмінного курсу, погіршення економічної кон'юнктури, падіння прибутку може спиратися ли-

ше на інтуїцію. Однак при цьому можуть бути упущені, невірно оцінені, важливі взаємозв'язки економічних показників, які впливають на ситуацію, що розглядається. В моделі всі взаємозв'язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш якісний і надійний прогноз.

Для будь якого економічного суб'єкту можливість прогнозування ситуації означає, перш за все, одержання кращих результатів або уникнення збитків, у тому числі й в державній політиці.

За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна і, отже, неповна, оскільки виділяючи найбільш суттєві фактори, які визначають закономірності функціонування економічного об'єкту, вона абстрагується від інших факторів, які, незважаючи на свою відносну малість, все ж у сукупності можуть визначати не тільки відхилення у поведінці об'єкту, але й саму його поведінку. Так, у простішій моделі, попит на який-небудь товар визначається його ціною і доходом споживача. На справді ж на величину попиту впливає також ряд інших факторів: смаки і очікування споживача, ціни на інші товари, вплив реклами, моди та інші. Звичайно вважають, що всі фактори, які не враховані в економіко-математичній моделі, впливають на об'єкт у тому аспекті, що нас цікавить, відносно мало. Склад врахованих в моделі факторів та її структура можуть бути уточнені в процесі удосконалення моделі.

Математична модель економічного об'єкту – це його гомоморфне² відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відношень, графіків. Гомоморфне відображення об'єднує групи відношень елементів об'єкту, що вивчається, в аналогічні відношення елементів моделі. Передбачається, що вивчення моделі дає нові знання про об'єкт, або дозволяє визначити найкраще рішення у тій чи іншій ситуації.

Для опису основних видів елементів економіко-математичної моделі розглянемо конкретну ситуацію і побудуємо відповідну їй модель.

² Гомоморфізм – відображення, яке зберігає базові операції та відношення.

Нехай, ϵ фірма, яка випускає декілька видів продукції. У процесі виробництва використовуються три види ресурсів: обладнання, робоча сила і сировина; ці ресурси однорідні, кількість їх відома і у даному виробничому циклі збільшені бути не можуть. Задані витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції кожного виду. Задані ціни продуктів. Необхідно визначити об'єми виробництва з метою максимізації вартості випущеної продукції (або, у припущенні, що вся вона знайде збут на ринку – загального прибутку від реалізації).

Для розв'язку поставленої задачі необхідно побудувати математичну модель, наповнити її інформацією, а потім провести по ній необхідні розрахунки. На початку при побудові моделі необхідно визначити індекси, екзогенні і ендогенні змінні і параметри. В нашій задачі свій індекс повинен мати кожен вид продукції (нехай це індекс j , який змінюється від 1 до n), а також вид ресурсів. Далі опишемо екзогенні змінні – ті, які задаються зовні моделі, тобто відомі заздалегідь, і параметри – це коефіцієнти рівнянь моделі. Часто екзогенні змінні і параметри в моделях не розділяють. В нашій задачі задані екзогенні змінні – кількість обладнання P , робочої сили R і сировини Q , які є в наявності (їм можна надати індекс i , якій змінюється від 1 до 3); задані параметри – коефіцієнти їх витрат на одиницю j -ої продукції p_j, r_j і q_j відповідно. Ціни продуктів c_j також відомі.

Далі вводяться позначення для ендогенних змінних – тих, що визначаються в процесі розрахунків по моделі і не задаються в ній зовні. В нашому випадку – це невідомі об'єми виробництва продукції кожного j -го виду, які позначимо x_j .

Після закінчення опису змінних і параметрів переходять до формалізації умов задачі та опису її допустимої множини і цільової функції. В нашій задачі допустима множина – це сукупність всіх варіантів вироб-

ництва, які забезпечуються наявними ресурсами. Вона описується за допомогою системи нерівностей:

$$\begin{array}{ll}
 p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq P & \sum_{j=1}^n p_jx_j \leq P \\
 r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \leq R & \text{або} \quad \sum_{j=1}^n r_jx_j \leq R \\
 q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n \leq Q & \sum_{j=1}^n q_jx_j \leq Q
 \end{array}$$

До цих обмежень по ресурсам додаються вимоги невід'ємності змінних

$$x_j \geq 0$$

Якщо який-небудь ресурс необхідно було б використати повністю (наприклад, повністю зайняти всю робочу силу), то відповідна нерівність перетворилась би у рівність. Це звужило б допустиму множину і, можливо, виключило би з нього початковий найкращий розв'язок.

Якщо модель є оптимізаційною (а дана модель така), то поряд з обмеженнями повинна бути виписана цільова функція. Для даної задачі максимізується величина вартості виготовленої продукції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max.$$

Поставлена задача далеко не завжди добре описує ситуацію і відповідає задачам особи, що приймає рішення. Наприклад, може бути, що:

- 1) ресурси у деякій степені взаємозамінні;
- 2) затрати ресурсів не строго пропорційні випуску (є сталі затрати, які не пов'язані з об'ємом випуску; граничні затрати змінюються);
- 3) об'єми ресурсів не строго фіксовані, вони можуть закуповуватись і продаватись, братися або здаватися в оренду;
- 4) всередині кожного виду ресурсів можна виділити складові, які функціонально або якісно розрізняються, у тій чи іншій мірі замінюючи

або доповнюючи одна одну і по-різному впливаючи на об'єм випуску;

- 5) ціна продукту може залежати від об'єму її реалізації, теж саме стосується ціни ресурсу;
- 6) фірма може використовувати одну з кінцевого набору технологій (або поєднувати декілька таких технологій), які характеризуються певною комбінацією ресурсів, які використовуються;
- 7) різні одиниці отриманого прибутку можуть мати різну цінність для особи, що приймає рішення (це обумовлено, наприклад, особливостями податкової системи);
- 8) інтереси і переваги суб'єкту не обмежуються максимізацією об'єму прибутку, тому цільова функція повинна враховувати й інші кількісні і якісні показники;
- 9) для суб'єкту реальна задача не обмежується одним моментом або періодом часу, важливими є динамічні взаємозв'язки;
- 10) на ситуацію можуть впливати випадкові фактори, які необхідно прийняти до уваги.

Багато розділів економічної теорії присвячені вивченню, опису и моделюванню (з тією чи іншою ступеню деталізації та у різних комбінаціях) перерахованих аспектів на різних рівнях господарської діяльності.

Математичні моделі, які використовуються в економіці, можна поділити на класи за рядом ознак, які відносяться до особливостей об'єкту, мети моделювання і використаного інструментарію: моделі макро- і мікроекономічні, теоретичні і прикладні, оптимізаційні і рівноважні, статичні і динамічні.

Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, зв'язуючи між собою укрупнені матеріальні і фінансові показники: валовий національний продукт, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість коштів та інші. *Мікроекономічні моделі* описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки, або по-

ведінку окремої такої складової у ринковому середовищі. Внаслідок розмаїтості типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку, мікроекономічне моделювання займає основну частину економіко-математичної теорії. Найбільш важливі теоретичні результати в мікроекономічному моделюванні в останні роки отримані при дослідженні стратегічної поведінки фірм в умовах олігополії з використанням апарату теорії ігор.

Теоретичні моделі дозволяють вивчати загальні властивості економіки та її характерних елементів дедукцією висновків з формальних передумов. *Прикладні моделі* дають можливість оцінити параметри функціонування конкретного економічного об'єкту і сформулювати рекомендації для прийняття практичних рішень. До прикладних відносяться перш за все економічні моделі, які оперують числовими значеннями економічних змінних і дозволяють статистично оцінювати їх на основі наявних спостережень.

У моделюванні ринкової економіки особливе місце займають *рівноважні моделі*. Вони описують такі стани економіки, коли результуюча всіх сил, які намагаються вивести її з даного стану, рівна нулю. У неринковій економіці нерівновага за одними параметрами (наприклад, дефіцит), компенсується іншими факторами (чорний ринок, черги і т.п.). Рівноважні моделі дескриптивні, описові. В Україні тривалий час переважав нормативний підхід у моделюванні, який заснований на *оптимізації*. Оптимізація у теорії ринкової економіки присутня в основному на мікрорівні (максимізація корисності споживачів або прибутку фірми); на макрорівні наслідком раціонального вибору поведінки економічних суб'єктів є деякий стан рівноваги.

У *статичних моделях* описується стан економічного об'єкту в конкретний момент або період часу; *динамічні моделі* містять взаємозв'язки змінних у часі. В статичних моделях звичайно зафіксовані значення ряду величин, які є змінними у динаміці, – наприклад, капітальних ресур-

сів, цін і т.п. Динамічна модель не зводиться до простої суми ряду статичних, а описує сили і взаємодії в економіці, які визначають хід процесів у ній. Динамічні моделі звичайно використовують апарат диференціальних і різницевих рівнянь, варіаційного числення.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі. *Стохастичні моделі* допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Класифікація задач дослідження операцій залежить від критерію, згідно за яким вона проводиться. Маючи на увазі, насамперед, застосування математичних методів в економіці, можна було б провести таку класифікацію за якісно відмінними між собою типами економічних процесів. Однак такий підхід більш природний при класифікації моделей економічних процесів. Дослідження операцій передусім строго математична дисципліна і тому критеріями класифікації мають бути, в основному, математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування.

В дослідженні операцій можна виділити два напрямки. До першого відносяться детерміновані задачі. До другого – стохастичні задачі. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, що підлягають статистичним розподілам. Очевидно, і у відповідних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі. Якщо ж ці явища становлять суть процесу чи помітно впливають на його перебіг, то адекватна математична модель буде стохастичною, тобто такою, що містить випадкові функції і величини. Відповідний розділ математичного програмування, що займається вивченням структури і розв'язуванням цих задач, називається *стохастичним програмуванням*.

Два великих і основних класи становлять *лінійні* і *нелінійні* задачі. Критерієм лінійності задач є лінійність цільової функції (1.1) та всіх обмежень (1.2), тобто вони не повинні містити інших, ніж одиниця і нуль, степенів змінних x_j та будь-яких добутків цих змінних. В усіх інших випадках задача буде нелінійною. Величезною перевагою лінійних задач є те, що вони завжди розв'язуються; створено універсальні відносно прості методи знаходження їх розв'язку (симплексний метод). Однак часто лінійна модель буває неадекватною і доводиться будувати нелінійні моделі, розв'язати які набагато складніше. Загального універсального методу знаходження розв'язку таких задач немає. Для окремих типів нелінійних задач розроблено значну кількість спеціальних методів розв'язування. Тому і математичне програмування поділяють на два основні розділи: *лінійне програмування* і *нелінійне програмування*.

В лінійному програмуванні існують класи задач, структура яких дозволяє створити спеціальні методи їх розв'язування, які вигідно відрізняються від методів розв'язування задач загального характеру. Так, в лінійному програмуванні з'явився розділ *транспортних задач*.

Нелінійне програмування прийнято підрозділяти наступним чином:

Опукле програмування – коли опукла цільова функція (якщо розглядається задача її мінімізації) і опукла множина, на якій розв'язується екстремальна задача.

Квадратичне програмування – коли цільова функція квадратична, а обмеження – лінійні рівності і нерівності.

Дробово-лінійне програмування – коли цільова функція дробово-лінійна, а обмеження – лінійні рівності і нерівності.

Багатоекстремальні задачі. Тут звичайно виділяють спеціалізовані класи задач, які часто зустрічаються у застосуваннях, наприклад, задачі про мінімізацію на опуклій множині угнутих функцій.

Далі розрізняють *дискретні* та *неперервні* задачі. Дискретною називають задачу з усіма або деякими змінними, які набувають лише певних дискретних, зокрема цілочисельних значень. Методи розв'язування таких задач увійшли до розділу *дискретного*, зокрема *цілочисельного програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати всіх значень у деяких інтервалах числової осі, то задача буде *неперервною*.

Тепер розглянемо відмінність між однокроковими і багатокроковими, або *динамічними* і *статичними* задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування, пов'язана насамперед з багатовимірністю задачі, коли, послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних. Необхідність приймати рішення поетапно пов'язана також і з тим, що істотну роль в задачі відіграє фактор часу чи деяка визначена послідовність операцій. Методи розв'язування багатокрокових задач об'єднано в розділ, що називається *динамічним програмуванням*. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти вектора оптимального плану задачі визначають одночасно за один останній крок алгоритму. Багато задач математичного програмування можна розглядати і як однокрокові, і як багатокрокові, залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язати як однокрокову, методи динамічного програмування недоцільні. Проте цілий ряд задач можна розв'язати лише при умові послідовного прийняття певних рішень.

У чому специфіка задач дослідження операцій?

По-перше, до задач дослідження операцій не можна, як правило, застосувати методи класичного аналізу для відшукання умовних екстремумів, так як навіть у найбільш простих задачах – лінійних – екстремум досягається у кутових точках границі множини допустимих значень, тобто у точках, де порушується диференційованість. Та найбільш сильний метод розв'язування екстремальних задач в класичному аналізі –

метод множників Лагранжа, розроблений для випадку, коли множина умов задається системою рівностей, а не системою нерівностей.

Другою специфічною особливістю є те, що в практичних задачах число змінних і обмежень настільки велике, що якщо просто перебирати всі точки, які „підозрілі на екстремальність” (наприклад, всі кутові точки множини допустимих значень), то навіть сучасній ЕОМ буде не легко впоратись з цією задачею у розумні терміни.

У зв'язку зі сказаним, метою дослідження операцій є створення, де це можливо, аналітичних методів пошуку розв'язків, а при відсутності таких методів – створення ефективних обчислювальних способів наближеного розв'язування.

1.4. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Багато різних за реальним змістом задач лінійного програмування мають подібну математичну структуру, певні особливості якої можна успішно використати при побудові алгоритмів розв'язування цих задач. Виходячи з цієї подібності, всі задачі лінійного програмування часто поділяють на дві великі групи. Типовими задачами першої групи є задачі на добір оптимальної суміші сплавів та на складання оптимального раціону. За ними закріпилась назва *задачі про раціон*.

Типовими задачами другої групи є транспортна задача і задача про оптимальний добір. Ці задачі називаються *задачами розподільчого типу*.

Задача на складання суміші сплаву. Нехай потрібно виплавити новий сплав, що містить $a\%$ свинцю, $b\%$ цинку і $d\%$ олова. Припустимо, що в розпорядженні підприємства є n різних сплавів, кожний з яких містить $p_{1j}\%$ свинцю, $p_{2j}\%$ цинку і $p_{3j}\%$ олова і може бути використаний для виробництва нового сплаву. Ціна одного кілограма j -го сплаву дорівнює c_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Завдання полягає в тому, щоб визначити, яку кількість кожного сплаву потрібно затратити на кожний кілограм

нового сплаву, щоб він був найдешевшим. Позначивши шукані величини x_j , одержимо цільову функцію

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

яку слід мінімізувати при такій системі обмежень

$$\sum_{j=1}^n p_{1j} x_j = a$$

$$\sum_{j=1}^n p_{2j} x_j = b \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{3j} x_j = d$$

$$x_j \geq 0. \quad (1.5)$$

Задача про оптимальний добір в племінній справі. Велике значення в підвищенні ефективності тваринництва має племінна робота. Одним з найважливіших завдань при цьому є правильний добір самця-плідника до самок маточного поголів'я. В умовах штучного запліднення, яке тепер є основним, за одним самцем закріплюється ціла група маток, кількістю від кількох сотень до кількох тисяч. Нехай, у певному господарстві, чи зоні, що включає групу господарств, усе маточне поголів'я розподілене на N груп згідно з деякою сукупністю ознак, які визначають продуктивність нащадків, наприклад, належність до однієї породи та лінії, умови утримання, годівлі тощо. Позначимо кількість кожної групи n_j ($j = 1, 2, \dots, N$), так що $\sum_{j=1}^N n_j = n$ – загальне число маток. При-

пустимо, що кожний з наявних у господарстві m самців-плідників випробуваний на певній кількості маток кожної j -ї групи, в результаті чого добуто відповідні статистичні (вибіркові) середні продуктивної якості нащадків кожного i -го самця по кожній j -й групі маток. Позначимо ці величини c_{ij} , а максимальну здатність i -го самця-плідника ($i = 1, 2, \dots, m$) в

рік – через p_i , що означає максимально можливе число маток, запліднюваних i -м самцем. Тепер задачу лінійного програмування можемо сформулювати так. Знайти цілочислову матрицю

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

таку, щоб лінійна форма

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1.6)$$

набувала максимального значення при системі умов:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = n_j \quad (j = 1, 2, \dots, N); \quad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq p_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (1.8)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq n_j, \quad (1.9)$$

де x_{ij} – означає кількість маток j -ї групи, що запліднюються i -м самцем.

Наведемо приклади задач нелінійного програмування.

Задача оптимального вибору факторів виробничої функції. Нехай, z – кількість деякого продукту, на виробництво якого витрачаються певні ресурси в кількостях x_j ($j = 1, 2, \dots, n$). При цьому, якщо вартість одиниці j -го ресурсу c_j , то загальні витрати виробництва

$$w = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (1.10)$$

Нехай, відома також залежність величини z , вираженої в натуральних чи вартісних одиницях, від кількостей використаних в процесі виробництва ресурсів x_j , які виступають як фактори виробництва,

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.11)$$

Вид та параметри функції (1.11) залежать від технології виробництва і, як правило, встановлюються статистичними методами. Найбільше застосування дістала виробнича функція Коббо-Дугласа

$$z = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}. \quad (1.11a)$$

Зрозуміло, що

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.12)$$

В даному випадку можна сформулювати дві взаємозв'язаних задачі математичного програмування протилежного змісту.

Перша задача: при заданому об'ємі загальних витрат на виробництво продукції $w = const$, тобто при заданих асигнуваннях максимізувати випуск продукції $z \rightarrow \max$.

Друга задача: при заданому об'ємі виробництва даної продукції $z = const$ мінімізувати величину загальних витрат на її виробництво $w \rightarrow \min$.

Цільовою функцією першої задачі є функція (1.11), а обмеженнями – співвідношення (1.10), (1.12); для другої задачі цільовою функцією являється функція (1.10), а обмеженнями – співвідношення (1.11), (1.12).

Задача оптимізації розмірів закупаваних партій товарів.

Припустимо, що деякій організації на плановий період необхідні певні матеріали в об'ємах a_1, a_2, \dots, a_n . Ці матеріали витрачаються рівномірно в часі і зберігаються на одному складі, місткістю b об'ємних одиниць, причому $b < a_1 + a_2 + \dots + a_n$, так що одночасно розмістити на складі всі матеріали неможливо і необхідно провести кілька закупок цих матеріалів партіями по x_j об'ємних одиниць кожного j -го товару ($j = 1, 2, \dots, n$). Вартість зберігання на складі об'ємної одиниці j -го матеріалу дорівнює c_j , так що зберігання x_j одиниць товару протягом часу його використання коштуватиме $\frac{1}{2} c_j x_j$. Припустимо, що вартість кожної закупки j -го матеріалу не залежить від розміру партії x_j і дорівнює s_j . Необхідно ви-

значити оптимальні розміри закупаваних партій так, щоб мінімізувати загальні витрати на зберігання і закупку матеріалів. Отже, цільова функція задачі

$$z = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} c_j x_j + s_j \frac{a_j}{x_j} \right) \rightarrow \min \quad (1.13)$$

при умові, що сумарний об'єм закупаваних партій не перевищить місткості складу

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b. \quad (1.14)$$

Очевидно,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.15)$$

Задача про режим роботи енергосистеми. В якості приклада задачі опуклого програмування розглянемо простішу задачу про оптимальне ведення режиму роботи енергосистеми.

Розглядається ізольована енергосистема, яка складається з теплоелектростанцій, зв'язаних лініями передач з вузлом, в якому зосереджене навантаження. Ставиться задача розподілу активних потужностей між електростанціями у заданий момент часу. Розподіл здійснюється за критерієм мінімізації сумарних паливних витрат на генерацію активної потужності.

Позначимо через x_j активну потужність, яка генерується на j -й електростанції. Потужності x_j лежать у межах, які визначаються технічними умовами: $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$. Крім того, повинно виконуватись умова балансу потужностей, тобто загальна потужність, що генерується, повинна відповідати потужності P , яка споживається, з урахуванням загальних втрат π у лініях передач:

$$\sum_{j=1}^m x_j = P + \pi.$$

Втрати палива на генерацію потужності x_j являють собою функцію $T_j(x_j)$, яка опукла на відрізку $[\alpha_j, \beta_j]$.

Таким чином, задача приймає вигляд:

$$\sum_{j=1}^m T_j(x_j) \rightarrow \min \quad (1.16)$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^m x_j = P + \pi \quad (1.17)$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1.18)$$

Побудована модель є типовою задачею опуклого програмування з лінійними обмеженнями. Розв'язок цієї задачі дає вельми грубе наближення до дійсно оптимального режиму роботи енергосистеми. У реальній ситуації не можна вважати все навантаження зосередженим в одному вузлі, а слід розглядати n вузлів. Крім того, втрати в системі, природно не є сталими, а залежать від параметрів ліній передач та величин потужностей, що передаються.

В якості наступного наближення можна розглядати задачу, в якій π є білінійною функцією x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), де параметри управління x_{ij} означають кількість активної потужності, яка передається з j -ї електростанції у i -й вузол.

Очевидно, що в цієї нової моделі умови будуть містити нелінійності ($\pi(x_{ij})$ в рівнянні балансу).

Задача про розміщення. Ця простіша задача про розміщення є прикладом багатоекстремальної задачі.

Є m можливих пунктів виробництва, причому відома для кожного i -го пункту залежність вартості виробництва f_i від об'єму виробництва x_i (передбачається, що у вартість виробництва $f_i(y_i)$ включені капітальні витрати). Дані n пунктів споживання із заданим об'ємом споживання b_j у кожному пункті. Нарешті, задана матриця транспортних витрат (a_{ij}) (a_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції з i -го пункту виробництва

в j -й пункт споживання). Необхідно знайти такі об'єми виробництва

$y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$, які мінімізують сумарні витрати; інакше кажучи, шукається

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i(y_i) \rightarrow \min \quad (1.19)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (1.20)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (1.21)$$

Оскільки собівартість одиниці продукції звичайно спадає при збільшенні об'єму виробництва, то функції $f_i(y_i)$, як правило, монотонно зростають і опуклі вгору. Множина значень x_{ij} , що задовольняє обмеження задачі, утворює опуклий многокутник, вершини якого є точками локальних мінімумів функції $L(x_{ij})$ (рис.1.2).

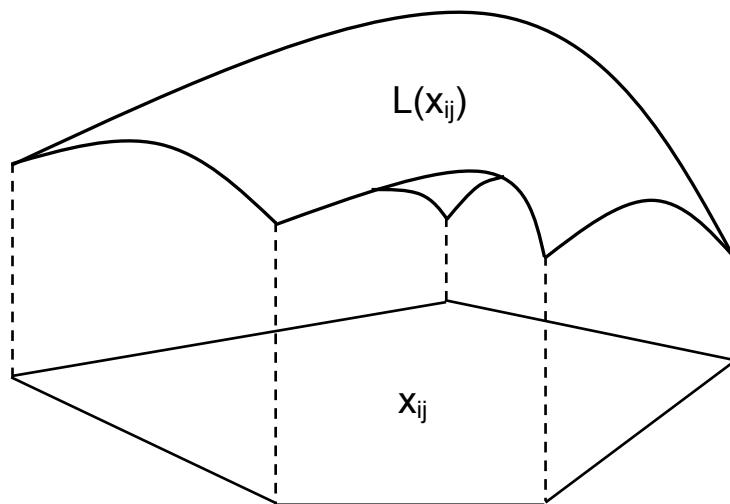


Рис. 1.2

Звідси й назва подібних задач – багатоекстремальні.

Доцільно зазначити, що за своїм реальним змістом більшість задач математичного програмування є задачами або мінімізації витрат ресурсів на виробництво заданих кількостей продукції, або ж максимізації випуску продукції (прибутку) при заданих обмежених кількостях ресурсів.

1.5. КОРОТКА ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Історія предмета включає в себе, з одного боку, історію математичних джерел та методів, а з другого – історію застосування цих методів у прикладних галузях, насамперед в економіці.

Як найпершу економічну модель, що містила деякі найпростіші ідеї лінійного програмування, слід назвати „Економічні таблиці” лейб-медика короля Людовика XV Ф. Кене, складену ним близько 1758 р., в якій було запропоновано кількісну модель національної економіки. У цій праці він поділив економіку Франції на три частини:

- 1) виробничий сектор, включаючи великих власників землі;
- 2) сектор торгівлі, що складався із купців та ремісників;
- 3) сектор нерухомості, що включав майно дворянства, церкви та королів.

Математичні моделі використовувались з ілюстративними і дослідницькими цілями також А. Смітом (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі).

З відомих нам математичних робіт основному методу лінійного програмування – симплексному – передували праці Ш. Фур'є (1823 р.), який розглядав задачу визначення найменшого максимального відхилення в розв'язках систем рівнянь. Ним ця задача була зведена до знаходження найнижчої точки многогранника n -вимірному простору, яку визначали послідовним перебором усіх вершин многогранника. Ідея Фур'є і лягла в основу симплексного методу.

У XIX сторіччі великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт). В 1874 р. Л. Вальрас запропонував складну математичну модель економіки, що містила технологічні коефіцієнти.

У XX сторіччі математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням зв'язані практично всі роботи, визначені Нобелівською премією в економіці (Д. Хігс, Р. Солоу, В. Леонт'єв,

П. Самуельсон). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін зв'язано з усе більш високим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики.

У 1926 р. в СРСР був опублікований баланс народного господарства, що містив усі основні ідеї і риси моделі міжгалузевого балансу, яка є методом математичного аналізу міжгалузевих економічних зв'язків.

Ґрунтуючись на цих ідеях, американський економіст В. Леонт'єв створив кількісну модель американської економіки, яка давала можливість простежити вплив урядової політики і тенденції у сфері покупок на цілий ряд промислових галузей, тісно взаємозв'язаних між собою.

Вперше задачу оптимізації плану перевезень з метою мінімізації їх сумарного кілометражу було поставлено в роботі радянського економіста А. Н. Толстого в 1930 р.

Угорський математик Б. Егерварі в 1931 р. сформулював задачу оптимального вибору і дав метод її розв'язування, що дістав назву угорського методу.

Проте, справжнім початком математичного (лінійного програмування) в його сучасному вигляді слід вважати праці радянського математика академіка Л. В. Канторовича, який у 1939 р., зайнявшись плануванням роботи агрегатів фанерної фабрики, розв'язав декілька задач: про найкраще завантаження обладнання, про розкрій матеріалів з найменшими втратами, про вантажі по декільком видам транспорту та ін. Л.В. Канторович сформулював новий клас умовно-екстремальних задач і запропонував універсальний метод їх розв'язування, що поклало початок новому напрямку прикладної математики – лінійному програмуванню.

Значний внесок у формування і розвиток дослідження операцій внесли зарубіжні вчені Р. Акоф, Р. Белман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Не-

йман, Т. Сааті, Р. Черчмен, А. Кофман. Так, наприклад, американський математик Р. Белман заклав основи динамічного програмування (1954).

У 1960 – 80-і роки економіко-математичний напрямок на Україні був пов'язаний в основному зі спробами формально описати „систему оптимального функціонування соціалістичної економіки”. Будувалися багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційні моделі галузей і підприємств. Зараз важливою задачею є моделювання процесів перехідного періоду.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому необхідно використання математики в економіці?
2. Які змінні економіко-математичної моделі називаються екзогенними, а які – ендогенними?
3. Що є загальною задачею математичного програмування?
4. Що називається оптимальним планом?
5. Що таке економіко-математична модель?
6. Нехай, в моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, уся сировина повинна бути використана повністю. Як при цьому зміниться обмеження на сировину?
7. Якщо в моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, припустити, що кількість робочої сили може змінюватись, то чи необхідно буде змінювати обмеження або цільову функцію?
8. В моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, ресурси являються взаємозамінними чи ні?
9. За якими ознаками класифікуються задачі дослідження операцій?
10. Які основні типи задач лінійного програмування?
11. Як підрозділяється нелінійне програмування?
12. Які основні періоди розвитку дослідження операцій як прикладної науки?

ВПРАВИ

Побудувати економіко-математичні моделі до задач у загальних постановках та вказати, які змінні будуть екзогенними, а які – ендогенними? До якого типу відноситься модель задачі: макроекономічних чи мікроекономічних?

1.1. Нехай підприємство має m видів ресурсів у заданих кількостях b_1, b_2, \dots, b_m , які використовуються для виготовлення n різних типів готової продукції. Відомі собівартості одиниці продукції j -го типу – p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) і нормативні витрати a_{ij} i -го ресурсу ($i = 1, 2, \dots, m$) на її виготовлення. Потрібно визначити обсяги випуску продукції кожного типу, щоб загальна собівартість усієї продукції була найнижчою.

1.2. Для виробництва одного виду продукції використовується n різних технологій із m видів ресурсів. При цьому, j -та технологія дає p_j одиниць готової продукції за одиницю часу та використовує a_{ij} одиниць i -го ресурсу, загальна кількість якого b_i ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Знайти час використання j -ої технології для того, щоб із даних ресурсів було випущено найбільше продукції.

1.3. Торгівельне підприємство планує свою роботу на період T . Ресурси підприємства на цей період становлять: торговельні площі – b_1 м²; фонд робочого часу – b_2 годин; витрати обігу – b_3 гривень. Якими повинні бути кількості x_1, x_2, \dots, x_n різних товарів на даний період функціонування T , щоб мати найбільший прибуток, якщо відомі час реалізації кожного з видів товару t_1, t_2, \dots, t_n , прибутки від продажу відповідної одиниці товару p_1, p_2, \dots, p_n , нормативні витрати торговельної площі a_{1k} та витрати обігу a_{3k} ($k = 1, 2, \dots, n$).

- 1.4. n клієнтів мають можливість взяти кредит у розмірах g_1, g_2, \dots, g_n гривень на строки t_1, t_2, \dots, t_n відповідно. Які суми кредитів повинен запропонувати банк кожному клієнту, щоб прибуток був найбільшим за умови, що кожний кредитор розрахується в кінці вказаних термінів, а кредитний ресурс банку становить G гривень з річним відсотком $p\%$ на даний момент.
- 1.5. В n пунктах A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) виробляється деякий однорідний товар та в m пунктів B_j ($j = 1, 2, \dots, m$) він доставляється у заданих кількостях b_j . Відпускна ціна виробленої одиниці готового товару в i -му пункті g_i та вартості її доставки в j -й пункт постачання c_{ij} . У яких кількостях x_{ij} потрібно брати товар у виробників, щоб сукупні витрати на купівлю і доставку були найменшими і повністю задовольняли потреби споживачів.
- 1.6. Нехай маємо n працівників, яких можна призначити на одну з n видів різних робіт. При цьому відома продуктивність праці c_{ij} i -го працівника на кожному j -му робочому місці ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Потрібно закріпити працівників так, щоб кожний виконував тільки один вид роботи і підсумкова ефективність була найвищою.
- 1.7. Нехай підприємству задано план q_1, q_2, \dots, q_n з випуску продукції p_1, p_2, \dots, p_n за деякий час T . Продукція обробляється m взаємозамінним устаткуванням b_1, b_2, \dots, b_m з різними потужностями. Задаються такі величини: a_{ij} – норми часу на обробку одиниці продукції i -го виду на j -му устаткуванні; A_j – фонд часу j -го устаткування; c_{ij} – собівартість обробки i -го виду продукції на j -му устаткуванні. Треба так спланувати випуск продукції p_j , щоб її вартість була найменшою і план з випуску продукції було виконано.
- 1.8. На підприємство надходять матеріали у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для виробничого використання його

доводиться розрізати на частини, щоб одержати m різні заготовки необхідної величини і форми. Нехай: B_j – план випуску заготовок i -го виду ($i = 1, 2, \dots, m$); n – кількість різних способів розкрою стандартного матеріалу; b_{ij} – число заготовок (кількість одиниць) i -го виду, одержаних за допомогою j -го способу розкрою; c_j – величина відходів при j -му способі розкрою. Необхідно мінімізувати відходи матеріалу при виконанні плану випуску.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У більшості прикладних задач математичного програмування на невідомі змінні накладається умова їх невід'ємності, що зумовлено реальною природою розглядуваних явищ. Умову невід'ємності часто називають *природними обмеженнями* задачі. Ці обмеження мають основне значення в теорії задач лінійного програмування та побудові алгоритмів їх розв'язування, і тому їх завжди виділяють в окрему групу умов. Інколи, в реальних ситуаціях, на змінні або не можна накладати обмеження по знаку, або навіть слід прийняти умову недодатності деяких змінних.

В розглянутих у першому розділі задачах математичного програмування на знаходження максимуму або мінімуму цільової функції системи обмежень одних з них мали форму нерівностей, а інших форму рівнянь; в деяких з них обмеження задавались як нерівностями так і рівняннями.

Отже, щоб представити задачу лінійного програмування в найбільш загальній формі, з якої можна добути всі окремі випадки, слід відмовитись від умови невід'ємності всіх змінних задачі та розглянути всі типи обмежень (нерівності обох знаків і рівняння).

Загальною формою задачі лінійного програмування є задача на знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень, що включає як рівності, так і нерівності обох знаків, і при невідомих змінних, з яких одні зв'язані умовою невід'ємності, другі – умовою недодатності, а на знак третіх ніяких умов не накладено, тобто задача має вигляд

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \quad (2.2)$$

.....,

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n \leq b_{k+1}, \quad (2.3)$$

.....,

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n \leq b_s, \\ a_{s+1,1}x_1 + a_{s+1,2}x_2 + \dots + a_{s+1,n}x_n \geq b_{s+1}, \quad (2.4)$$

.....,

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (2.5)$$

$$x_j \leq 0 \quad (j = r + 1, r + 2, \dots, l), \quad (2.6)$$

$$x_j \forall (j = l + 1, l + 2, \dots, n)^3. \quad (2.7)$$

Назвемо групу обмежень (2.2) – (2.4) *основними обмеженнями*, а групу (2.5) – (2.6) – *обмеженнями на знаки змінних*. Отже, загальна форма задачі є формою із змішаною системою обмежень на знаки невідомих і змішаною системою основних умов.

³ Символ \forall означає, що x може приймати будь-яке значення, тобто на знак змінної обмеження не накладається і (3.7) не є обмеженнями задачі.

2.2. ДВІ СТАНДАРТНІ ФОРМИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна форма задачі лінійного програмування (2.1) – (2.6) не придатна для побудови досить простих і ефективних методів розв’язування її, причиною чого є неоднорідність системи умов (2.2) – (2.6). Тому, як правило, задачу зводять до *стандартної форми*.

В залежності від методів, які застосовуються, розрізняють дві стандартні форми:

основна задача лінійного програмування з обмеженнями-рівностями або перша стандартна форма;

основна задача лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями або друга стандартна форма.

Формулювання основної задачі лінійного програмування у **першій стандартній формі** полягає в наступному: серед усіх невід’ємних розв’язків системи основних обмежень-рівнянь знайти такий, при якому цільова функція набуває найбільшого або найменшого значення:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.8)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....,

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.10)$$

Або у короткому запису

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.8a)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.9a)$$

Основна задача лінійного програмування може бути також записана у скалярно-векторній, матричній і векторній формах, якщо скористатись позначеннями:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n); \quad \vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n});$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}); \quad \vec{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Тут \vec{X} – вектор-стовпець змінних, \vec{B} – вектор-стовпець вільних членів, A – матриця системи основних обмежень, \vec{P}_j ($j=1,2,\dots,n$) – вектор-стовпець матриці A ; \vec{c} – вектор-рядок коефіцієнтів цільової функції, \vec{a}_i ($i=1,2,\dots,m$) – вектор-рядок матриці A .

Скалярно-векторна форма:

$$z = \vec{c}\vec{X} \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.8б)$$

$$\vec{a}_i\vec{X} = b_i \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (2.9б)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.10б)$$

Матрична форма:

$$z = \vec{c}\vec{X} \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.8в)$$

$$A\vec{X} = \vec{B}, \quad (2.9в)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.10в)$$

Векторна форма:

$$z = \vec{c}\vec{X} \rightarrow opt : \max/\min, \quad (2.8г)$$

$$\vec{P}_1x_1 + \vec{P}_2x_2 + \dots + \vec{P}_nx_n = \vec{B}, \quad (2.9г)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.10г)$$

Лема 2.1. Будь-яку задачу лінійного програмування у загальній формі можна звести до першої стандартної форми.

Доведення. Покажемо, що будь-яку нерівність, введенням додаткової невідомої можна звести до рівності. Дійсно, нехай деяке обмеження має вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Перепишемо його таким чином:

$$b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) \geq 0.$$

Введемо позначення $y = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)$.

За побудовою $y \geq 0$ є невід'ємною величиною. Крім того останнє співвідношення є рівняння відносно невідомих x_1, x_2, \dots, x_n, y :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y = b_i, \quad y \geq 0.$$

Отже ми прийшли до рівності еквівалентній вихідної нерівності.

За таким самим алгоритмом можна звести до рівності й нерівність з протилежним знаком, але завжди треба нові невідомі додавати до менших частин нерівностей, бо у протилежному випадку вони не будуть невід'ємними величинами.

Наступний крок полягає в зведенні до однорідної системи обмежень на знак. Умови недодатності (2.6) легко перетворюються в умови невід'ємності за допомогою заміни відповідних змінних $x'_j = -x_j$ ($j = r + 1, r + 2, \dots, l$). Складніше позбутися змінних, на знак яких обмежень не накладено. Цього можна досягти двома способами.

1-й спосіб. Якщо число таких змінних (2.7) менше, ніж число обмежень основної групи і вектори-стовпці коефіцієнтів при них разом з деякими іншими утворюють базисний мінор, то, розв'язавши добуту нами систему обмежень-рівностей відносно згаданих змінних, виключаємо їх як з системи умов, так і з цільової функції, залишаючи без уваги формули, що виражають їх через невід'ємні змінні, підставляючи які у залишені вирази, дістаємо й оптимальні значення змінних (2.7).

Хоч цей спосіб придатний для більшості практичних випадків, однак буває, що умови необхідні для його використання, не виконуються.

Тоді цим способом можна виключити лише частину вільних змінних, а до тих, що залишилися у задачі, застосувати 2-й спосіб.

2-й спосіб. Кожну змінну, на знак якої не накладено обмежень, подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних

$$x_j = x_j'' - x_j', \text{ де } x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0. \quad (2.11)$$

Визначивши оптимальні значення x_j' та x_j'' , можемо знайти за (2.11) і оптимальне значення відповідних x_j .

Приклад 2.1. Звести до першої стандартної форми таку задачу лінійного програмування:

$$z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \rightarrow opt,$$

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 8,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \forall, x_4 \forall.$$

Розв'язання. Введенням однієї додаткової змінної x_5 та заміною $x_2' = -x_2$ зводимо задачу до вигляду

$$z = 6x_1 - 3x_2' - 4x_3 + 5x_4 \rightarrow opt,$$

$$2x_1 - 6x_2' - 2x_3 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 + x_2' - 2x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 - x_2' - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 8,$$

$$x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_3 \forall, x_4 \forall, x_5 \geq 0.$$

Хоч тут кількість змінних без обмеження на знак і менша від кількості основних обмежень, їх не можна вивести з задачі, оскільки вектори-стовпці їхніх коефіцієнтів пропорційні і не можуть разом входити до базисного мінору. Тому виведемо одну з них, а другу замінимо різницею двох невід'ємних змінних.

Запишемо задачу в таблицю (в нульовий рядок записане рівняння, що відповідає цільової функції: $z - 6x_1 + 3x_2' + 4x_3 - 5x_4 = 0$).

№ рядка	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	b
0	-6	3	4	-5	0	0
1	2	-6	-2	1	0	12
2	3	1	-2	1	0	6
3	1	-1	-4	2	1	8

Вибравши $a_{14} = 1$ ключовим елементом, переходимо до нової таблиці.

№ рядка	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	-27	-6	0	0	60
1	2	-6	-2	1	0	12
2	1	7	0	0	0	-6
3	-3	11	0	0	1	-16

Виписуючи окремо 1-й рядок (виразивши з нього x_4) $x_4 = 12 - 2x_1 + 6x'_2 + 2x_3$ і замінивши $x_3 = x''_3 - x'_3$, дістаємо першу стандартну форму задачі

$$z' = -4x_1 + 27x'_2 + 6x''_3 - 6x'_3 \rightarrow opt,$$

$$x_1 + 7x'_2 = -6,$$

$$-3x_1 + 11x'_2 + x_5 = -16,$$

$$x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0, x_5 \geq 0,$$

де $z' = z - 60$.

Основна задача лінійного програмування у **другій стандартній формі** полягає в тому, що серед всіх невід'ємних розв'язків системи основних обмежень-нерівностей треба знайти такий, при якому цільова функція буде мати оптимальне значення:

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k \rightarrow opt : \max / \min, \quad (2.12)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \leq \beta_1, \quad (2.13)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \leq \beta_2,$$

.....,

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sk}x_k \leq \beta_s,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (2.14)$$

Або у короткому запису

$$z = \sum_{j=1}^k \gamma_j x_j \rightarrow opt : \max / \min, \quad (2.12a)$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.13a)$$

Скалярно-векторна форма:

$$z = \vec{\gamma} \vec{X} \rightarrow opt : \max / \min, \quad (2.12б)$$

$$\vec{a}_i \vec{X} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.13б)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.14б)$$

Матрична форма:

$$z = \vec{\gamma} \vec{X} \rightarrow opt : \max / \min, \quad (2.12в)$$

$$A \vec{X} \leq \vec{B}, \quad (2.13в)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.14в)$$

Векторна форма:

$$z = \vec{\gamma} \vec{X} \rightarrow opt : \max / \min, \quad (2.12г)$$

$$\vec{P}_1 x_1 + \vec{P}_2 x_2 + \dots + \vec{P}_n x_n \leq \vec{B}, \quad (2.13г)$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}. \quad (2.14г)$$

Лема 2.2. Перша стандартна форма основної задачі лінійного програмування завжди може бути зведена до другої стандартної форми.

Доведення. Припустимо, що невідомі x_1, x_2, \dots, x_k є вільними; $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ – базисними; ранг матриці системи обмежень (2.9) дорівнює s ($k + s = n$).

Розв'яжемо систему рівнянь (2.9) відносно базисних невідомих і нехай розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k, \\
 x_{k+2} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_n &= \beta_s + \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \dots + \alpha_{sk}x_k.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Всі невідомі невід'ємні, тому

$$x_{k+1} \geq 0, x_{k+2} \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Враховуючи це, поставимо у відповідність отриманому розв'язку (2.15) еквівалентну систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k &\geq 0, \\
 \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k &\geq 0, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \beta_s + \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \dots + \alpha_{sk}x_k &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Введемо позначення $a'_{ij} = -\alpha_{ij}$ і помноживши всі нерівності на -1 отримуємо систему обмежень:

$$\begin{aligned}
 a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1k}x_k &\leq \beta_1, \\
 a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2k}x_k &\leq \beta_2, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 a'_{s1}x_1 + a'_{s2}x_2 + \dots + a'_{sk}x_k &\leq \beta_s, \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).
 \end{aligned}$$

Очевидно, що остання система обмежень збігається з (2.13) і рівно-сильна системі обмежень (2.9) у тому розумінні, що будь-якому розв'язку (x_1, x_2, \dots, x_k) системи нерівностей відповідає певний розв'язок $(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ системи рівнянь (2.9).

Для завершення доведення леми підставимо у цільову функцію (2.8) замість базисних невідомих $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ їхні вирази (2.15). Якщо згрупувати подібні члени, то цільова функція набуде вигляду (2.12).

Приклад 2.2. Звести до другої стандартної форми задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \rightarrow opt,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10,$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Розв'язання. Випишемо матрицю системи обмежень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right),$$

і шукаємо ранг матриці. Базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Отже, ранг $r = 2$. Базисні невідомі: x_2, x_3 ; вільні невідомі: x_1, x_4 .

Розв'язуємо систему відносно базисних невідомих:

$$x_2 = 9 - 3x_1 + x_4,$$

$$x_3 = 1 + x_1 + 2x_4.$$

Так як $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, то

$$9 - 3x_1 + x_4 \geq 0,$$

$$1 + x_1 + 2x_4 \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Запишемо цільову функцію z через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Отже, задача, рівносильна вихідній, має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4 \rightarrow \text{opt},$$

$$3x_1 - x_4 \leq 9,$$

$$-x_1 - 2x_4 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Із лем 2.1, 2.2 випливає така теорема.

Теорема 2.1. Основна задача лінійного програмування у першій стандартній формі і основна задача лінійного програмування у другій стандартній формі еквівалентні між собою.

2.3. КАНОНІЧНА ФОРМА ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розв'язуючи систему основних обмежень основної задачі лінійного програмування у першій стандартній формі відносно m базисних невідомих та виключаючи їх одночасно з цільової функції, дістанемо **канонічну форму основної задачі лінійного програмування** з обмеженнями рівностями (надалі просто канонічна форма), а саме:

$$\begin{aligned} z' &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k \rightarrow opt, \\ \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1k} x_k + x_{k+1} &= \beta_1, \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2k} x_k + x_{k+2} &= \beta_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \dots + \alpha_{mk} x_k + x_n &= \beta_m, \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

де $z' = z - Q$, а Q – значення цільової функції при даному базисному розв'язку $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$; $x_{k+1} = \beta_1, x_{k+2} = \beta_2, \dots, x_n = \beta_m$. Тут базисними є останні m змінних ($k = n - m$).

Канонічна форма основної задачі лінійного програмування задовольняє наступним трьом умовам:

1. Система основних обмежень-рівнянь зображена в такому вигляді, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Якщо деякі рівняння системи поміняти місцями так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то базисний мінор у цьому випадку утворює одиничну матрицю. Така система рівнянь називається системою з базисом.
2. Вільні члени системи обмежень невід'ємні.
3. Цільова функція залежить лише від вільних невідомих.

Щоб задача лінійного програмування була канонічною, достатньо так вибрати базисні невідомі, щоб виконувались умови 1,2. Таку систему інколи називають *канонічною системою обмежень*. Якщо до форми входять базисні невідомі, а система обмежень канонічна, то задачу лінійного програмування називають *майже канонічною*. Для того, щоб звести її до канонічної, треба підставити у цільову функцію замість базисних невідомих їх значення через вільні невідомі.

Слід зауважити, що канонічна форма задачі лінійного програмування дає змогу формалізувати відшукування оптимального розв'язку її за симплекс-таблицями.

2.4. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Геометрична інтерпретація аналітичних задач дає можливість наочно представити їх структуру, що сприяє засвоєнню їхніх основних властивостей та відкриває шляхи виявлення і дослідження інших, більш складних властивостей цих задач. У найпростіших випадках геометричне подання дає змогу знайти розв'язок задачі, однак навіть у тривимірному просторі геометричне розв'язування ускладнюється і створює ряд труднощів у побудові відповідних геометричних фігур, а в просторах вимірності, більшої за три, таке розв'язування і зовсім неможливе.

Можливі різноманітні форми і способи геометричного представлення задач лінійного програмування. Доцільність вибору кожного способу зумовлюється метою, якої хочуть досягти даною геометричною інтерпретацією та особливостями структури самої задачі, в тому числі й формою її представлення.

Для геометричної інтерпретації візьмемо основну задачу лінійного програмування у другій стандартній формі. Для наочності розглянемо найпростіший випадок, коли в системі обмежень (2.13) і цільовій функції (2.12) є лише дві змінних x_1, x_2 .

Розглянемо розв'язування нерівностей.

Лема 2.3. Множина розв'язків нерівності з двома змінними

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$$

є однією з двох півплощин, на які вся площина ділиться прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, включаючи й цю пряму, а інша півплощина з тією ж прямою є множиною розв'язків нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i.$$

Доведення. Гранична пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ перпендикулярна до вектора нормалі $\vec{N} = (a_{i1}, a_{i2})$ (рис. 2.1). Вектор нормалі (його ще називають напрямним вектором) є градієнтом лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ і показує напрям зростання її значень

($\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2$, де \vec{e}_1, \vec{e}_2 – одиничні вектори вздовж осей Ox_1 і Ox_2

відповідно; таким чином, $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (a_{i1}, a_{i2})$). Справді, нехай

$a_{i1} \geq 0, a_{i2} \leq 0$. Візьмемо на прямій, яка визначається вектором \vec{N} точку $\vec{N}' = (a'_{i1}, a'_{i2})$, причому нехай $a'_{i1} \geq a_{i1}$, тобто точка \vec{N}' лежить далі від початку координат, ніж точка \vec{N} . Очевидно також, що $|a'_{i2}| > |a_{i2}|$. У точці \vec{N} числове значення f_1 лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ дорівнює $f_1 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2$. Аналогічно в точці \vec{N}' значення $f_2 = a_{i1}a'_{i1} + a_{i2}a'_{i2}$. Ураховуючи, що $a'_{i1} \geq a_{i1}$ і $|a'_{i2}| > |a_{i2}|$, дістанемо $f_2 > f_1$.

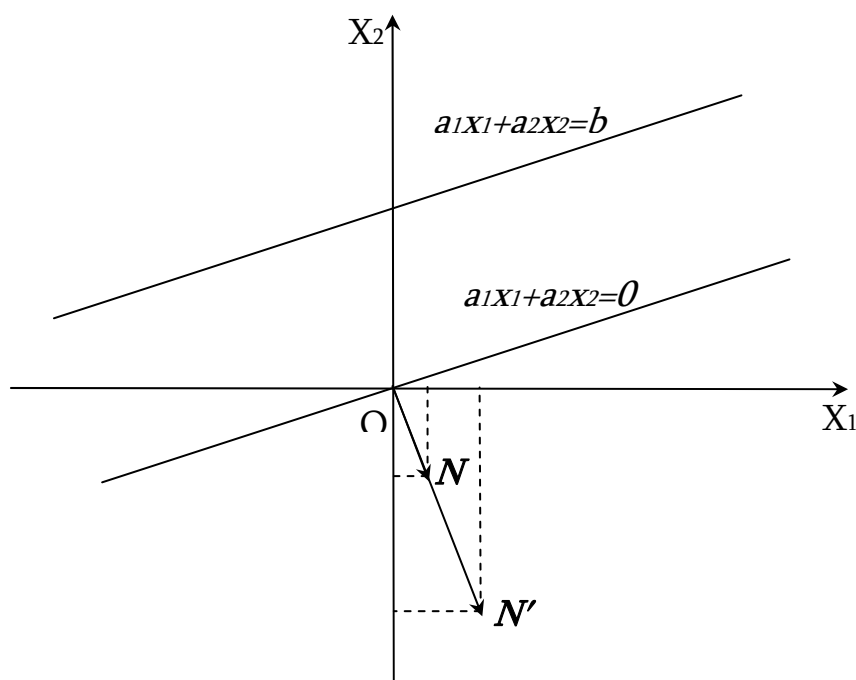


Рис. 2.1

Аналогічно можна пересвідчитись, що напрям зменшення значень лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ збігається з напрямним вектором $-\vec{N} = (-a_{i1}, -a_{i2})$.

Прямі лінії на площині Ox_1x_2 , які паралельні прямій, що визначається рівнянням $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$ називають *лініями рівнів* лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$. Користуючись поняттям напрямного вектора $\vec{N} = (a_{i1}, a_{i2})$, можемо визначити розміщення півплощин $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ і $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$ на координатній площині Ox_1x_2 . Півплощина $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ розміщена по той бік прямої $f = b_i$, куди показує напрямний вектор $-\vec{N}$. Аналогічно вектор \vec{N} показує, де розміщена півплощина $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$ відносно прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Приклад 2.3. Побудувати множину розв'язків нерівності

$$3x_1 - 2x_2 \geq 4.$$

Розв'язання. Відповідно лемі 2.3, множина розв'язків нерівності є півплощина. Щоб визначити, по який бік від граничної прямої $3x_1 - 2x_2 = 4$ розміщена півплощина, що відповідає заданій нерівності,

побудуємо напрямний вектор $\vec{N} = (3, -2)$. Напрямний вектор міститься у шуканій півплощині (рис. 2.2).

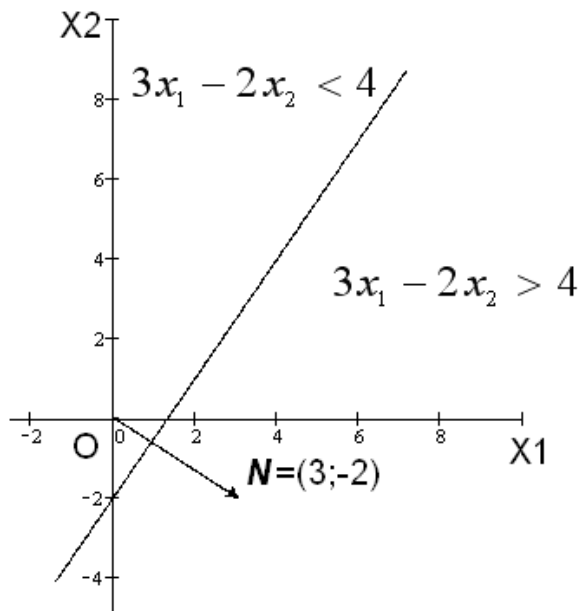


Рис. 2.2

Для перевірки розміщення шуканої півплощини рекомендується задати довільну контрольну точку, яка не лежить на граничній прямій. Якщо нерівність виконується в контрольній точці, то вона виконується й для всіх точок півплощини, яка містить контрольну точку, та не виконується у всіх точках іншої півплощини.

В якості контрольної точки зручно взяти початок координат $O(0,0)$, якщо він не лежить на граничній прямій. Координати точки O не задовольняють нерівність $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq 4$, отже, розв'язком даної нерівності є нижня півплощина, яка не містить контрольну точку O .

Якщо врахувати, що множина точок, яка задовольняє рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (2.16)$$

при $n = 3$, є півплощина, а при $n > 3$ — гіперплощина в n -вимірному просторі, то лемі 2.3 можна поширити на випадок трьох і більше змінних.

Теорема 2.2. Множиною всіх розв'язків лінійної нерівності з n змінними

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

є одним з півпросторів, на які весь простір розділяється площиною або гіперплощиною (2.16), включаючи й саму площину (гіперплощину).

Розглянемо множину розв'язків систем нерівностей.

Теорема 2.3. Множиною розв'язків сумісної системи m лінійних нерівностей з двома змінними

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

.....,

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$$

є опуклим многокутником.

Доведення. Кожна з нерівностей відповідно до леми 2.3 визначає одну з півплощин, які є опуклими множинами точок. Множиною розв'язків сумісної системи лінійних нерівностей є множина точок, які належать півплощинам-розв'язкам усіх нерівностей, тобто належать їх перетину. Згідно із теоремою про перетин опуклих множин ця множина є опуклою і містить скінчене число кутових точок, тобто є опуклим многокутником.

Теорема 2.4. Множина розв'язків сумісної системи m лінійних нерівностей з n змінними є опуклим многогранником в n -вимірному просторі.

Теорема 2.5. Множиною всіх допустимих розв'язків сумісної системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m < n$) є опуклим многогранником в n -вимірному просторі.

Доведення цієї та наступної теорем приведено у підрозділі 2.5.

Теорема 2.6. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многогранника розв'язків системи обмежень.

Результати цього підрозділу дають змогу так інтерпретувати задачі лінійного програмування:

У многограннику (многокутнику у випадку двох змінних) розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування знайти таку вершину, де цільова функція набуває оптимального (найбільшого або найменшого) значення.

2.5. ОСНОВНІ АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В даному підрозділі будемо розглядати основну задачу лінійного програмування у першій стандартній формі.

В підрозділі 2.4 була сформульована, але не доведена наступна теорема.

Теорема 2.7. Множина усіх допустимих розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування є опуклою.

Доведення. Нехай $\vec{X}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ і $\vec{X}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ – два допустимих розв'язка задачі (2.8в) – (2.10в), яка задана в матричній формі. Тоді $A\vec{X}_1 = \vec{B}$ і $A\vec{X}_2 = \vec{B}$. Розглянемо опуклу лінійну комбінацію розв'язків \vec{X}_1 і \vec{X}_2 , тобто

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 \text{ при } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0 \text{ і } \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

та покажемо, що вона також є допустимим розв'язком системи (2.9в). Насправді

$$A\vec{X} = A(\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2) = \alpha_1 A\vec{X}_1 + (1 - \alpha_1)A\vec{X}_2 = \alpha_1 \vec{B} + (1 - \alpha_1)\vec{B} = \vec{B},$$

тобто розв'язок \vec{X} задовольняє системі (2.9в). Але так як $\vec{X}_1 \geq \vec{0}, \vec{X}_2 \geq \vec{0}, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, то і $\vec{X} \geq \vec{0}$, тобто розв'язок \vec{X} задовольняє і умову (2.10в).

Отже, доведено, що множина усіх допустимих розв'язків задачі лінійного програмування є опуклою, а точніше, являє собою многогранник, який у подальшому будемо називати одним терміном – *многогранником розв'язків*.

Відповідь на запитання, в якій точці многогранника розв'язків можливий оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, дається в наступній фундаментальній теоремі, яка також була сформульована у підрозділі 2.4.

Теорема 2.8. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення в одній з кутових точок многогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення більше ніж в одній кутовій точці, то вона приймає його у будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією цих точок.

Доведення. Будемо вважати, що многогранник розв'язків є обмеженим. Позначимо його кутові точки через $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p$, а оптимальний розв'язок (наприклад, максимум) – через \vec{X}^* . Тоді $z(\vec{X}^*) \geq z(\vec{X})$ для всіх точок \vec{X} многогранника розв'язків. Якщо \vec{X}^* – кутова точка, то перша частина теореми доведена.

Припустимо, що \vec{X}^* не є кутовою точкою, тоді \vec{X}^* можна представити як опуклу лінійну комбінацію кутових точок многогранника розв'язків, тобто

$$\vec{X}^* = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_p \vec{X}_p,$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1.$$

Так як $z(\vec{X})$ – лінійна функція, то отримуємо

$$z(\vec{X}^*) = z(\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_p \vec{X}_p) = \alpha_1 z(\vec{X}_1) + \alpha_2 z(\vec{X}_2) + \dots + \alpha_p z(\vec{X}_p). \quad (2.17)$$

В цьому розкладі серед значень $z(\vec{X}_j)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) виберемо максимальне. Нехай, воно відповідає кутовій точці \vec{X}_k ($1 \leq k \leq p$); позначимо його через M , тобто $z(\vec{X}_k) = M$. Замінімо у виразі (2.17) кожне зна-

чення цим максимальним значенням M . Тоді, враховуючи, що

$$\alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1, \text{ знайдемо}$$

$$z(\vec{X}^*) \leq \alpha_1 M + \alpha_2 M + \dots + \alpha_p M = M \sum_{j=1}^p \alpha_j = M.$$

За припущенням \vec{X}^* – оптимальний розв'язок, тому, з одного боку, $z(\vec{X}^*) \geq z(\vec{X}_k) = M$, але, з другого боку, доведено, що $z(\vec{X}^*) \leq M$, отже, $z(\vec{X}^*) = M = z(\vec{X}_k)$, де \vec{X}_k – кутова точка. Отже, існує кутова точка \vec{X}_k , в якій цільова функція приймає максимальне значення.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що $z(\vec{X})$ приймає максимальне значення більше ніж в одній кутовій точці, наприклад, в точках $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_q$, де $1 \leq k \leq q$. Тоді $z(\vec{X}_1) = z(\vec{X}_2) = \dots = z(\vec{X}_q) = M$.

Нехай \vec{X} – опукла лінійна комбінація цих кутових точок, тобто

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_q \vec{X}_q, \alpha_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,q), \sum_{j=1}^q \alpha_j = 1.$$

У цьому випадку, враховуючи, що функція $z(\vec{X})$ – лінійна, отримуємо

$$\begin{aligned} z(\vec{X}) &= z(\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_q \vec{X}_q) = \alpha_1 z(\vec{X}_1) + \alpha_2 z(\vec{X}_2) + \dots + \alpha_q z(\vec{X}_q) = \\ &= \alpha_1 M + \alpha_2 M + \dots + \alpha_q M = M \sum_{j=1}^q \alpha_j = M \end{aligned}$$

тобто, лінійна функція $z(\vec{X})$ приймає максимальне значення у довільній точці \vec{X} , яка є опуклою лінійною комбінацією кутових точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_q$.

Зауваження. Вимога обмеженості многогранника розв'язків в теоремі є суттєвою, так як у випадку необмеженої області не кожену точку такої області можна представити опуклою комбінацією її кутових точок.

Доведена теорема є фундаментальною, так як вона вказує на принциповий шлях розв'язування задач лінійного програмування. Дійсно,

згідно з цією теоремою замість дослідження нескінченної множини допустимих розв'язків для знаходження серед них оптимального розв'язку необхідно досліджувати лише скінчене число кутових точок многогранника розв'язків.

Наступна теорема присвячена аналітичному методу знаходження кутових точок.

Теорема 2.9. **Кожному допустимому базисному розв'язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка многогранника розв'язків, і навпаки, кожній кутовій точці многогранника розв'язків відповідає допустимий базисний розв'язок.**

Доведення. Нехай $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ – допустимий базисний розв'язок системи обмежень (2.9в) задачі, в якому перші m компонент – базисні змінні, а інші $n - m$ компоненти – вільні змінні, які рівні нулю у базисному розв'язку (якщо це не так, то відповідні змінні можна переіменувати). Покажемо, що \vec{X} – кутова точка многогранника розв'язків.

Застосовуючи метод доведення від супротивного, припустимо, що \vec{X} не є кутовою точкою. Тоді точку \vec{X} можна представити як внутрішню точку відрізка, який з'єднує дві різні, не співпадаючі з \vec{X} , точки

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, 0, 0, \dots, 0), \\ \vec{X}_2 &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}, 0, 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

іншими словами, – опуклої лінійної комбінації точок \vec{X}_1 і \vec{X}_2 многогранника розв'язків, тобто

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2, \tag{2.18}$$

де $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (вважаємо, що $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, бо у протилежному випадку точка \vec{X} співпадає з точкою \vec{X}_1 або \vec{X}_2).

Запишемо векторну рівність (2.18) у координатній формі:

$$x_1 = \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)},$$

.....,

$$x_m = \alpha_1 x_m^{(1)} + \alpha_2 x_m^{(2)},$$

$$0 = \alpha_1 x_{m+1}^{(1)} + \alpha_2 x_{m+1}^{(2)},$$

.....,

$$0 = \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)}.$$

Оскільки $x_j^{(1)} \geq 0, x_j^{(2)} \geq 0, (j = 1, 2, \dots, n), \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, то з останніх $n - m$ рівностей випливає, що $x_{m+1}^{(1)} = 0, x_{m+1}^{(2)} = 0, \dots, x_n^{(1)} = 0, x_n^{(2)} = 0$, тобто в розв'язках \vec{X}_1, \vec{X}_2 та \vec{X} системи рівнянь (3.9в) значення $n - m$ компонентів рівні у даному випадку, нулю. Ці компоненти можна вважати значеннями вільних змінних, але значення вільних змінних однозначно визначають значення базисних, отже, $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = x_1, \dots, x_m^{(1)} = x_m^{(2)} = x_m$. Таким чином, усі n компоненти в розв'язках \vec{X}_1, \vec{X}_2 та \vec{X} співпадають, що суперечить припущенню. Отже, \vec{X} – кутова точка многогранника розв'язків.

Доведемо обернене твердження. Нехай, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ – кутова точка многогранника розв'язків і перші її m координати додатні. Покажемо, що \vec{X} – допустимий базисний розв'язок.

Якщо вектори-стовпці $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ лінійно незалежні, то ранг r матриці A_m , яка складена з компонентів цих векторів, дорівнює m , тобто мінор $|A_m| \neq 0$ і буде базисним мінором матриці A , отже, змінні $x_1, x_2, \dots, x_m \in$ базисними, і розв'язок $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ – допустимий базисний, тобто твердження доведено.

Розглянемо протилежний випадок, тобто припустимо, що вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ лінійно залежні. Тоді в рівності

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_m \vec{P}_m = \vec{0} \tag{2.19}$$

хоча б один з коефіцієнтів α_j буде відмінним від нуля.

Якщо підставити координати кутової точки \vec{X} многогранника розв'язків в систему обмежень (2.9г), то вона матиме вигляд

$$\vec{P}_1 x_1 + \vec{P}_2 x_2 + \dots + \vec{P}_m x_m = \vec{B}. \quad (2.20)$$

Помножимо рівність (2.19) на деяке додатне число μ

$$\mu \alpha_1 \vec{P}_1 + \mu \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \mu \alpha_m \vec{P}_m = \vec{0}. \quad (2.21)$$

Додаючи (2.21) до (2.20) і віднімаючи від неї, одержимо вирази:

$$\vec{P}_1(x_1 + \mu \alpha_1) + \vec{P}_2(x_2 + \mu \alpha_2) + \dots + \vec{P}_m(x_m + \mu \alpha_m) = \vec{B},$$

$$\vec{P}_1(x_1 - \mu \alpha_1) + \vec{P}_2(x_2 - \mu \alpha_2) + \dots + \vec{P}_m(x_m - \mu \alpha_m) = \vec{B},$$

з яких випливає, що система умов (3.9г) має два розв'язки:

$$\vec{X}^{(1)} = (x_1 + \mu \alpha_1, x_2 + \mu \alpha_2, \dots, x_m + \mu \alpha_m, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{X}^{(2)} = (x_1 - \mu \alpha_1, x_2 - \mu \alpha_2, \dots, x_m - \mu \alpha_m, 0, 0, \dots, 0),$$

які можуть і не бути допустимими розв'язками, бо при певних μ та α_j не задовольнятимуть умови невід'ємності компонентів. Внаслідок того, що x_j ($j = 1, 2, \dots, m$) додатні і μ довільне додатне число, то його можна вибрати настільки малим, що всі компоненти векторів $\vec{X}^{(1)}$ та $\vec{X}^{(2)}$ будуть невід'ємними, а отже будуть допустимими розв'язками задачі. Але тоді випливає, що $\vec{X} = \frac{1}{2}(\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$, тобто кутова точка многогранника розв'язків є опуклою лінійною комбінацією деяких двох допустимих розв'язків, що неможливо. Отже, вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ – лінійно незалежні та \vec{X} – допустимий базисний розв'язок.

З теорем (2.8) і (2.9) безпосередньо випливає важливий наслідок: якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він співпадає, принаймні, з одним її допустимим базисним розв'язком.

Отже, оптимум цільової функції задачі лінійного програмування слід шукати серед скінченного числа її допустимих базисних розв'язків.

2.6. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Найбільш простим і наочним методом розв'язування задач лінійного програмування є графічний метод. Він застосовується для розв'язування задач лінійного програмування заданих у другій стандартній формі з двома змінними та з багатьма змінними у першій стандартній формі при умові, що вони містять не більше двох вільних змінних.

Алгоритм розв'язування задач графічним методом:

1. Будуємо многокутник розв'язків. Він складатиметься з перетину окремих півплощин розв'язків системи обмежень задачі. В силу обмежень $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься у першому квадранті.
2. Будуємо вектор нормалі $\vec{N} = (c_1, c_2)$ прямої $z = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const} = c$.
3. Проводимо лінію рівня $z = c_1x_1 + c_2x_2 = c$, яка перпендикулярна вектору \vec{N} .
4. Знаходимо оптимальну точку. Пересуваючи лінію рівня перпендикулярно до \vec{N} в напрямку, який вказує вектор нормалі, ми знайдемо вершину, де z набуває найбільшого значення. Для відшукування точки мінімуму треба лінію рівня зсувати в напрямку, протилежному до \vec{N} . Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін многокутника розв'язків, то в цьому випадку оптимум досягається у всіх точках відповідної сторони, а задача лінійного програмування буде мати нескінченну множину розв'язків. Кажуть, що така задача має *альтернативний оптимум*, а її розв'язок знаходиться за формулою $\vec{X}_{opt} = (1-t)\vec{X}_1 + t\vec{X}_2$, де $0 \leq t \leq 1$, \vec{X}_1, \vec{X}_2 – оптимальні розв'язки в кутових точках многокутника розв'язків.
5. Обчислюємо оптимальні значення цільової функції. Для цього знаходимо координати вершин максимуму і мінімуму як спільний

розв'язок рівнянь відповідних граничних прямих, що перетинаються в оптимальних вершинах. Знайдені координати підставляємо у цільову функцію і обчислюємо z_{\max} і z_{\min} .

Приклад 2.4. Фірма випускає два види морозива: вершкове і шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються два вихідних продукти: молоко та наповнювачі; норми витрат яких і добові запаси задані у таблиці:

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів на 1 кг морозива		Запаси, кг
	Вершкове	Шоколадне	
Молоко	0,8	0,5	400
Наповнювачі	0,4	0,8	365

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне не більше, ніж на 100 кг. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг за добу. Роздрібна ціна 1 кг вершкового морозива 16 грн., шоколадного – 14 грн.

Яку кількість морозива кожного виду повинна виготовляти фірма, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Розв'язання. Позначимо: x_1 – добовий об'єм виготовлення вершкового морозива, кг; x_2 – добовий об'єм виготовлення шоколадного морозива, кг.

Складемо математичну модель задачі.

Цільова функція буде мати вигляд

$$z = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400,$$

$$0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365,$$

$$x_1 - x_2 \leq 100,$$

$$x_2 \leq 350,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

OABCDE – многокутник розв'язків (рис. 2.3). Побудуємо вектор $\vec{N} = (16, 14)$. Лінія рівня z_0 задається рівнянням

$$16x_1 + 14x_2 = \text{const}.$$

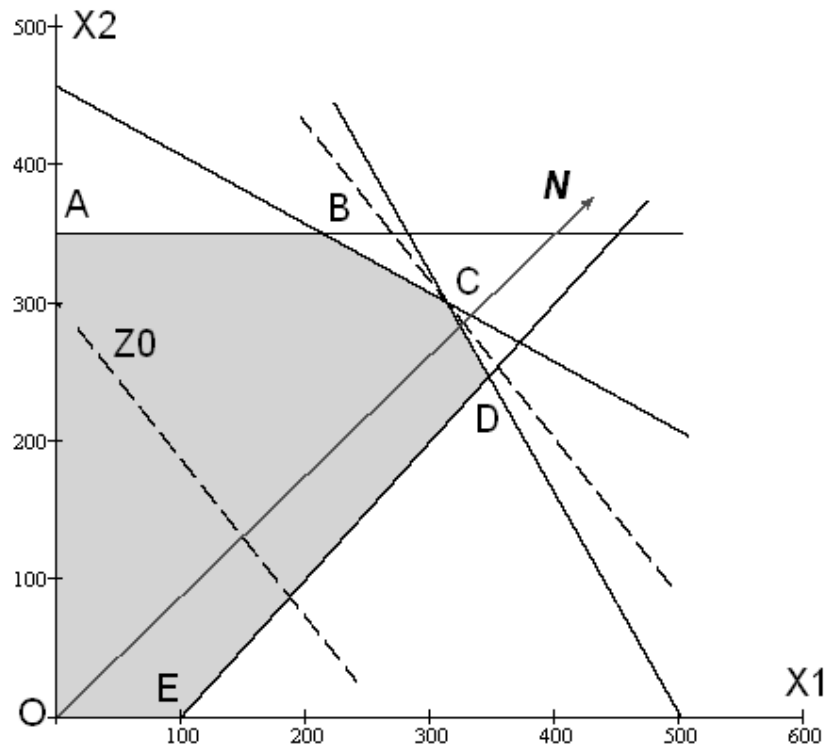


Рис. 2.3

Рухаючись за лініями рівня в напрямку вектора \vec{N} , ми переконуємось, що z_{\max} міститься в точці C, координати якої визначаються як перетин граничних прямих, що задаються рівняннями:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 400,$$

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 365.$$

Розв'язуючи систему, отримуємо координати точки $C(312,5; 300)$, в якій і буде оптимальний розв'язок, тобто

$$x_1 = 312,5; \quad x_2 = 300,$$

при цьому

$$z_{\max} = 16 \cdot 312,5 + 14 \cdot 300 = 9200.$$

Таким чином, фірма повинна виготовляти за добу 312,5 кг вершкового і 300 кг шоколадного морозива, при цьому прибуток від реалізації становить 9200 грн.

Проведемо економічний аналіз розглянутої задачі по виготовленню морозива.

Економіко-математична модель задачі має вигляд

$$z = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400 \text{ (обмеження за молоком),} \quad (2.22)$$

$$0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365 \text{ (обмеження за наповнювачами),} \quad (2.23)$$

$$x_1 - x_2 \leq 100 \text{ (ринкове обмеження за попитом),} \quad (2.24)$$

$$x_2 \leq 350 \text{ (ринкове обмеження за попитом),} \quad (2.25)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Визначимо, як впливає на оптимальний розв'язок збільшення або зменшення запасів вихідних продуктів. Для аналізу визначимо, що нерівності системи обмежень можуть бути активними і пасивними. Якщо гранична пряма проходить через точку, в якій знаходиться оптимальний розв'язок, то будемо вважати, що відповідне їй *обмеження активне*. В протилежному випадку *обмеження пасивне*.

Якщо обмеження активне, то будемо вважати, що відповідний ресурс є дефіцитним, так як він використовується повністю. Якщо обмеження пасивне, то воно недефіцитне і є у фірмі з надлишком.

Розглянемо збільшення ресурсу правої частини обмеження (2.22) за молоком (рис. 2.4). При переміщенні паралельно собі прямої (2.22) вправо до перетину з прямими (2.23) і (2.24) у точці F обмеження буде залишатися активним. Точку F визначимо як точку перетину прямих (2.23) і (2.24):

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 365,$$

$$x_1 - x_2 = 100.$$

Звідки отримуємо $F(370,83; 270,3)$.

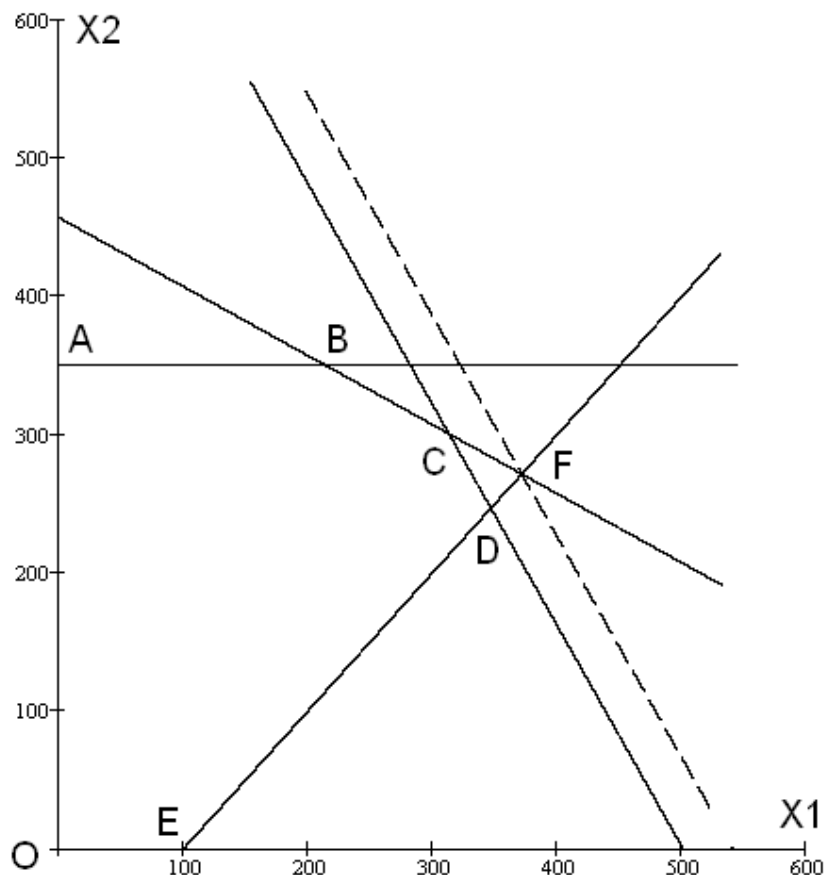


Рис. 2.4

Підставляючи координати точки F в рівняння (2.22), отримуємо гранично допустимий добовий запас молока:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8 \cdot 370,83 + 0,5 \cdot 270,3 = 432,1 \text{ кг,}$$

при цьому величина прибутку складатиме

$$z = 16 \cdot 370,83 + 14 \cdot 270,3 = 9724,9 \text{ грн.}$$

Розглянемо збільшення обмеження за наповнювачами (рис. 2.5). При переміщенні паралельно собі прямої (2.23) вправо до перетину з прямими (2.22) і (2.25) в точці M обмеження (2.23) буде залишатись активним. Точку M визначимо як перетин прямих

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 400,$$

$$x_2 = 350.$$

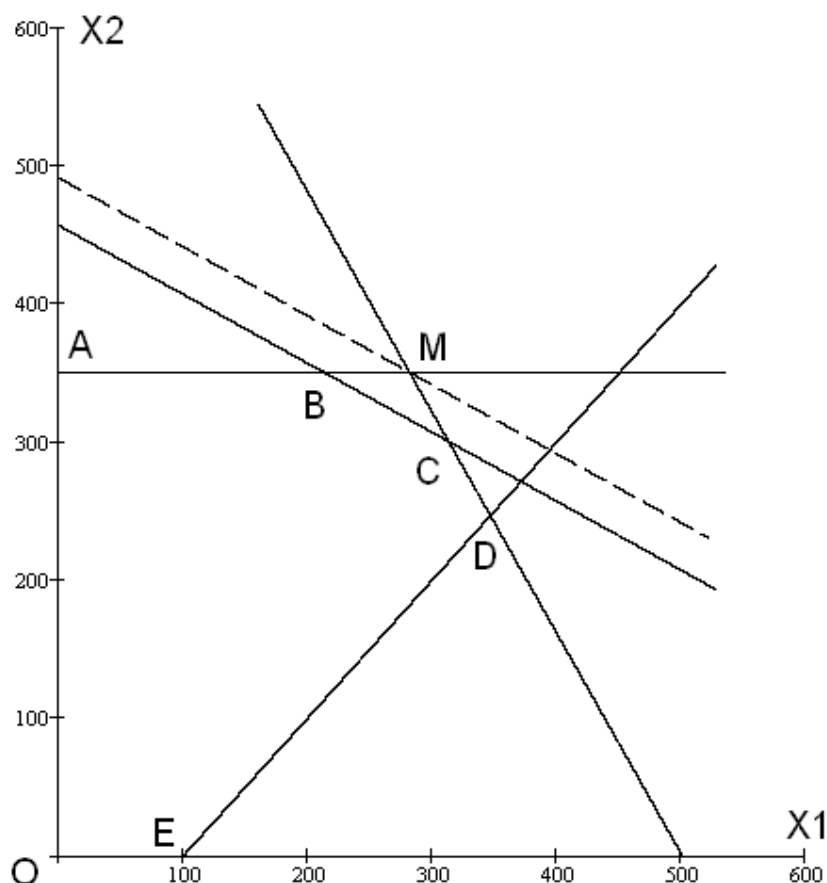


Рис. 2.5

Звідки отримуємо $M(281,25; 350)$.

Гранично допустимий добовий запас наповнювачів можна збільшити до значення

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 0,4 \cdot 281,25 + 0,8 \cdot 350 = 392,5 \text{ кг},$$

при цьому величина прибутку складатиме

$$z = 16 \cdot 281,25 + 14 \cdot 350 = 9400 \text{ грн.}$$

Розглянемо можливість зміни правої частини пасивних обмежень (2.24) і (2.25). Не змінюючи оптимального розв'язку (рис. 2.6), пряму (2.24) можна переміщувати паралельно собі вгору до перетину з точкою $C(312,5; 300)$, тобто праву частину обмеження (2.24) можна зменшувати до величини

$$312,5 - 300 = 12,5 \text{ кг.}$$

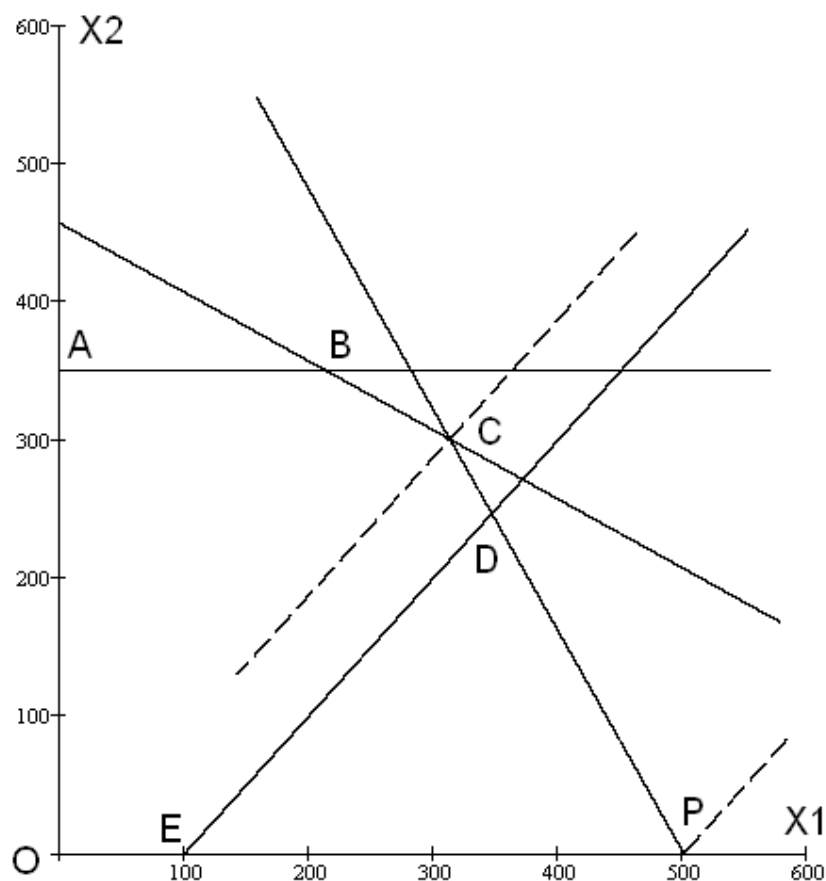


Рис. 2.6

Пряму (2.24) можна переміщувати паралельно собі донизу до перетину з віссю Ox_1 в точці $P(500; 0)$, тобто праву частину можна збільшувати до 500 кг.

Таким чином, при незмінному оптимальному розв'язку різниця у споживчому попиті на вершкове і шоколадне морозиво може змінюватись в діапазоні від 12,5 до 500 кг.

Аналогічно, не змінюючи оптимального розв'язку (рис. 2.7), пряму (2.25) можна переміщувати паралельно собі вгору до перетину з віссю Ox_2 в точці $R(0; 456,25)$ або вниз до перетину з прямою (2.22) в точці $C(312,5; 300)$.

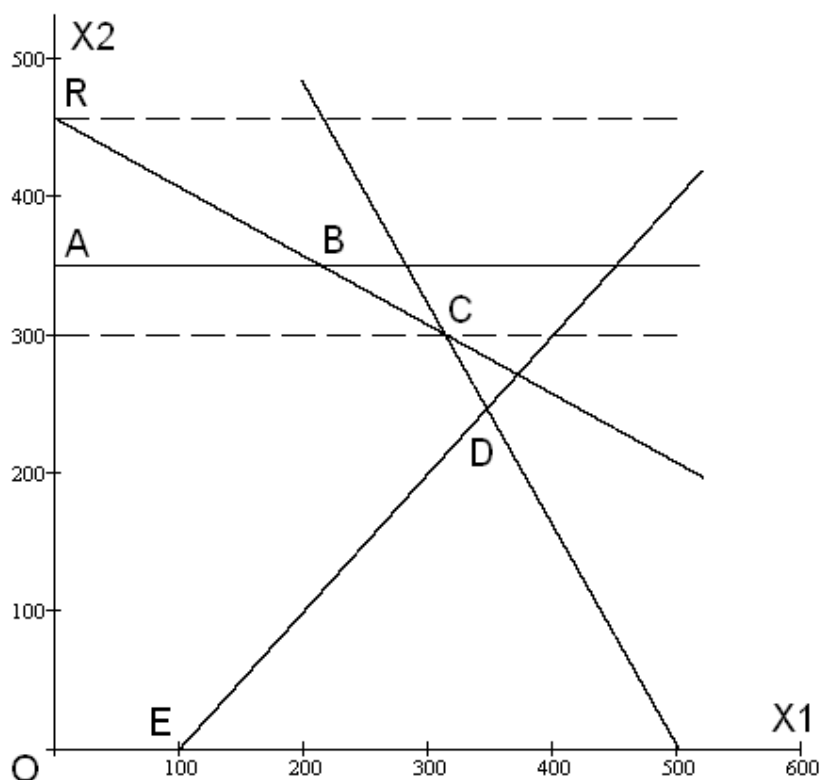


Рис. 2.7

Таким чином, при незмінному оптимальному розв'язку споживчий попит на шоколадне морозиво може змінюватись в діапазоні від 300 до 456,25 кг.

Проведемо аналіз задачі за границями можливої зміни коефіцієнтів цільової функції, тобто по діапазону роздрібних цін на морозиво, при яких не відбувається зміни оптимального розв'язку.

Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил лінії рівня. Рівняння лінії рівня записується в загальному вигляді (рис. 2.3):

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої (2.22):

$$K_1 = -8/5.$$

Так як прямі співпадають, то $K = K_1$, звідки $c_{1\max} = 22,4$ при $c_2 = 14$. Коефіцієнт c_1 можна зменшувати до збігу лінії рівня з прямою (2.23), тому

$$-c_1/14 = -1/2, \quad c_{1\min} = 7.$$

Таким чином, оптимальний розв'язок задачі не зміниться, якщо роздрібна ціна 1 кг вершкового морозива лежатиме в діапазоні від 7 до 22,4 грн., при цьому прибуток фірми буде від 6387,5 до 11200 грн.

Аналогічні міркування для випадку $c_1 = 16$ дозволяють зробити висновок, що роздрібна ціна 1 кг шоколадного морозива лежить в діапазоні від 10 до 32 грн., при цьому прибуток фірми буде від 8000 до 14600 грн.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Відмінності запису задач лінійного програмування у загальній, стандартній і канонічній формах.
2. Способи переходу від загальної форми задачі лінійного програмування до стандартної.
3. Спрощені записи задач лінійного програмування.
4. Умови графічного розв'язування задач лінійного програмування.
5. Характерні особливості лінії рівня лінійної функції та її градієнта.
6. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування графічним методом.
7. Економічний аналіз задач з використанням графічного методу.

ВПРАВИ

Знайти графічним методом оптимальні розв'язки задач 2.1 –

2.18:

2.1. $z = 3x_1 + 3x_2,$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15,$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 12,$$

$$2x_1 \leq 6,$$

$$2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.2. $z = 8x_1 + 6x_2,$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12,$$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 35,$$

$$0 \leq x_1 \leq 3,$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{19}{3}.$$

2.3. $z = 3x_1 + 4x_2,$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 36,$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 32,$$

$$2x_1 \geq 2,$$

$$x_2 \geq 0.$$

2.4. $z = x_1 - 2x_2,$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.5. $z = 10x_1 + 14x_2,$

$$5x_1 + 7x_2 \geq 35,$$

$$2x_1 \geq 4,$$

$$x_2 \geq 1.$$

2.6. $z = 5x_1 + 3x_2,$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.7. $z = x_1 + 3x_2,$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.8. $z = x_1 + x_2,$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.9. $z = 2x_1 + 3x_2,$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \geq 0,$$

2.10. $z = 2x_1 + 3x_2,$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.11. \quad z = -3x_1 + 6x_2,$$

$$5x_1 - 2x_2 \geq 4,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -4,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.13. \quad z = -2x_1 + x_2,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.15. \quad z = -x_1 + 2x_2,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 37,$$

$$x_1 - x_2 \leq -1,$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 19,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.12. \quad z = -3x_1 + 6x_2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10,$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 15,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.14. \quad z = 2x_1 - 4x_2,$$

$$8x_1 - 5x_2 \leq 16,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2,$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 9,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2.16. \quad z = x_1 + 4x_2,$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 23,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 11,$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 13,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.17. В майстерні освоїли виробництво столів і тумбочок для торгівельної мережі. На їх виготовлення є два види деревини: D_1 – 72 м³ і D_2 – 56 м³. На кожен виріб необхідно одного й другого виду деревини у м³:

	D_1	D_2
Стіл	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

Від виготовлення одного стола майстерня отримує чистого прибутку 11 грн. та від виробництва однієї тумбочки – 7 грн. Визначити, скільки столів і тумбочок повинна виготовляти майстерня з наявних матеріалів, щоб забезпечити максимальний прибуток.

2.18. У добовий раціон включають два продукти харчування Π_1 і Π_2 , причому продукту Π_1 повинно увійти не менше 200 одиниць. Вартість 1 од. продукту Π_1 складає 0,02 грн., продукту Π_2 – 0,04 грн. Вміст поживних речовин, мінімальні норми споживання вказані у таблиці:

Поживні речовини	Мінімальна норма споживання	Вміст поживних речовин в 1 од. продукту	
		Π_1	Π_2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Визначити оптимальний раціон харчування, вартість якого буде найменшою.

Задачі 2.19 – 2.24 привести до другої стандартної форми та розв'язати з використанням графічного методу:

2.19. $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$, 2.20. $z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$,

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = -1,$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$$

$$x_1 - 3x_2 - x_4 = -13,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 4).$$

$$4x_1 + x_2 + x_5 = 26,$$

$$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6).$$

2.21. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \rightarrow \min$, 2.22. $z = x_1 - x_2 \rightarrow \max$,

$$-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15,$$

$$10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25,$$

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 5).$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 5).$$

2.23. $z = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \rightarrow \max$, 2.24. $z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$,

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10,$$

$$4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25,$$

$$4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13,$$

$$x_1 + x_2 - x_6 = 3,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, 6).$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9,$$

$$6x_2 + x_3 + x_4 = 36,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, 6).$$

В задачах 2.25 – 2.27 цільова функція містить параметр λ . Визначити проміжки значень λ , при яких оптимальний розв'язок буде співпадати з однією й тією ж кутовою точкою множини розв'язків. В яких проміжках задача не має розв'язків? При яких значеннях λ буде нескінченна множина розв'язків?

2.25. $z = 2x_1 + \lambda x_2 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.26. $z = 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 27,$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0, (j=1, \dots, 5).$$

2.27. $z = -x_1 + \lambda x_2 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

В задачах 2.28 – 2.30 обмеження містять параметр μ . Визначити, при яких значеннях цього параметра задачі будуть мати розв'язки, а при яких ні:

2.28. $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$\mu x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.29. $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 + x_2 \geq 9,$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1,$$

$$\mu x_1 - x_2 \leq -2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.30. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$

$$2x_2 + \mu x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_3 \geq 0.$$

Провести аналіз задач 2.31 – 2.33 з використанням графічного методу:

2.31. $z = x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max),$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 9,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.32. Фірма випускає вироби двох типів: А і В. При цьому використовується сировина чотирьох видів. Витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції та запаси сировини подані у таблиці.

Вироби	Сировина			
	1	2	3	4
А	2	1	0	2
В	3	0	1	1
Запаси сировини	21	4	6	10

Випуск одиниці виробу типу А приносить прибуток 30 грн., одного виробу типу В – 20 грн. Скласти план виробництва, який забезпечував би фірмі найбільший прибуток.

2.33. Обробка деталей А і В може виконуватись на трьох станках, причому кожна деталь повинна послідовно оброблятися на кожному із станків. Прибуток від реалізації деталі А – 10 грн., деталі В – 16 грн. Вихідні дані наведені у таблиці.

Станки	Норми часу на обробку однієї деталі, год.		Час роботи станка, год.
	A	B	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Визначити виробничу програму, яка максимізує прибуток при умові: попит на деталь A – не менше 300 шт., на деталь B – не більше 200 шт.

РОЗДІЛ 3

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. ІДЕЯ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

У розділі 2 були розглянуті основні теореми лінійного програмування, з яких випливає, що якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він відповідає хоча б одній кутовій точці многогранника розв'язків і співпадає, принаймні, з одним із допустимих базисних розв'язків системи обмежень. Таким чином, для того щоб знайти оптимальний розв'язок будь-якої задачі лінійного програмування, необхідно перебрати скінченне число допустимих базисних розв'язків системи обмежень і вибрати серед них той, на якому цільова функція приймає оптимальне значення. Геометрично це означає, що необхідно перебрати усі кутові точки многогранника розв'язків. Такий шлях в решті-решт приведе до оптимального розв'язку (якщо він існує), однак його практичне здійснення пов'язане із значними труднощами, оскільки для реальних задач число допустимих базисних розв'язків хоча і скінченне, але може бути досить великим.

Число допустимих базисних розв'язків, які перебираються, можна скоротити, якщо виконувати перебір не хаотично, а з урахуванням змін значення цільової функції, які відбуваються при переході від одного допустимого розв'язку до іншого.

Основою алгоритму симплексного методу і є ідея цілеспрямованого перебору вершин многогранника планів задачі, при якому забезпечується монотонна зміна значення цільової функції в потрібному напрямі – монотонне зростання чи зменшення залежно від того, що треба знайти – максимум чи мінімум цільової функції. При цьому стає можливим обстеження лише невеликої кількості з усього числа вершин множини

розв'язків. Оскільки число вершин опуклого многогранника завжди скінченне, то тим самим забезпечується скінченність алгоритму; виняток становить випадок так званого „зациклювання”, коли можливе повторення циклу обстеження тих самих вершин, проте на практиці цього не буває.

Для подальшого викладення введемо означення *опорних розв'язків*.

Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати опорним.

Обстеження вершин многогранника розв'язків можна почати лише після визначення якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план задачі. Тому весь алгоритм симплексного методу поділяють на два етапи: перший – знаходження початкового опорного плану задачі і другий – знаходження оптимального плану.

Вперше симплексний метод був запропонований американським вченим Дж. Данцигом у 1949 р., однак ще в 1939 р. ідеї метода були розроблені Л.В. Канторовичем.

Симплексний метод, який дозволяє знайти розв'язок будь-якої задачі лінійного програмування є універсальним. В даний час він використовується для комп'ютерних розрахунків, однак нескладні приклади із застосуванням симплексного методу можна розв'язувати і ручним способом.

Алгоритм симплексного методу застосовується лише до першої стандартної форми задачі лінійного програмування. Отже, щоб розв'язати задачу, яку подано в загальній чи другій стандартній формі симплексним методом, її слід представити в першій стандартній формі. При цьому часто вдається представити задачу у канонічній формі так, що знаходження опорного плану стає зайвим, оскільки в канонічній формі всі вільні члени системи обмежень будуть невід'ємні і дорівнюють, очевидно, значенням базисних змінних деякого опорного плану. Це мо-

жна завжди зробити в задачах, де система обмежень складається з одних лише нерівностей, що зводяться до типу

$$a_i x \geq -b_i \text{ або } a_i x \leq b_i, \text{ де } b_i \geq 0.$$

Однак в інших випадках опорний план знаходять, використовуючи загальний алгоритм симплексного методу.

3.2. АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНОГО ПЛАНУ

Розглянемо задачу лінійного програмування у першій стандартній формі (2.8) – (2.10). Щоб знайти опорний план, треба насамперед мати довільний базисний розв'язок системи обмежень (2.9). Це легко зробити, застосовуючи метод повних виключень Жордана-Гаусса. Нагадаємо, що при цьому одночасно вирішується питання про сумісність системи (2.9) та наявність у ній неістотних обмежень, тобто рівнянь, які є лінійними комбінаціями інших, так що надалі вважатимемо систему (2.9) сумісною і всі її рівняння лінійно-незалежними. Запишемо задачу (2.8) – (2.10) у вигляді таблиці:

№ рядка	x_1	x_2	...	x_n	b
0	$-c_1$	$-c_2$...	$-c_n$	0
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

(3.1)

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Нульовий рядок в (4.1) відповідає цільовій функції, яка записана у вигляді рівняння $z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n = 0$.

Вибравши ключеві елементи $a_{ij} \neq 0$ послідовно в кожному рядку ($i = 1, 2, \dots, m$) і зробивши m кроків жорданових виключень, матимемо задачу лінійного програмування (3.2), в якій виконані умови 1 і 3 для канонічної форми (п.2.3). Покладаючи вільні змінні отриманої форми рів-

ними нулю, знайдемо базисний розв'язок основної системи обмежень

$$(2.9): x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = \beta_1, \dots, x_{k+i} = \beta_i, \dots, x_n = \beta_m.$$

№	x_1	...	x_j	...	x_k	x_{k+1}	...	x_{k+i}	...	x_n	b
0	γ_1	...	γ_j	...	γ_k	0	...	0	...	0	Q
1	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1k}	1	...	0	...	0	β_1
...
i	α_{i1}	...	α_{ij}	...	α_{ik}	0	...	1	...	0	β_i
...
m	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mk}	0	...	0	...	1	β_m

(3.2)

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Розглянемо два випадки, що стосуються вільних членів (3.2). Перший – усі $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Тоді ми матимемо канонічну форму задачі лінійного програмування, в якій базисний розв'язок системи (2.9) і буде опорним планом задачі.

Другий випадок – серед вільних членів β_j є від'ємні $\beta_p < 0$ ($p = 1, 2, \dots, s \leq m$). Тоді базисний розв'язок основної системи обмежень не задовольняє умову невід'ємності змінних і тому не є планом задачі лінійного програмування. В цьому випадку слід приступити до здійснення першого етапу симплексного методу – знаходження опорного плану.

Для цього відмітимо в (3.2) всі рядки з від'ємними вільними членами.

Введемо означення.

Систему основних обмежень задачі лінійного програмування будемо називати сумісною в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.

Має місце така теорема.

Теорема 3.1. Якщо в системі основних обмежень (3.2) є рівняння з від'ємним вільним членом, всі коефіцієнти при вільних змінних якого невід'ємні, то система обмежень несумісна в області невід'ємних значень і в цьому випадку не можна знайти опорний план.

Доведемо справедливості цього твердження.

Справді, нехай таким рівнянням буде рівняння, яке відповідає i -му рядку. Випишемо його окремо виразивши базисну змінну через вільні змінні

$$x_{k+i} = \beta_i - \alpha_{i1}x_1 - \alpha_{i2}x_2 - \dots - \alpha_{ik}x_k.$$

Оскільки $\alpha_{ij} \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$) і $\beta_i < 0$, то неможливо одночасно задовольнити вимогу невід'ємності всіх змінних, що входять до цього рівняння, іншими словами, суперечливою буде та частина системи основних обмежень задачі, яка складається з аналогічних рівнянь і обмеження на знаки змінних $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Це положення залишається справедливим на будь-якому кроці знаходження опорного плану задачі.

Припустимо, що система умов задачі сумісна в області невід'ємних значень. Тоді в (3.2), якщо вона містить від'ємні вільні члени у відповідних рядках, обов'язково знайдуться від'ємні коефіцієнти $\alpha_{pq} < 0$. Нехай таким рядком буде i -й рядок (3.2), в якому $\alpha_{ij} < 0$. Пригадуючи алгоритм повних виключень Жордана-Гаусса, можна легко зрозуміти, що, беручи елемент α_{ij} за ключовий після здійснення одного кроку такого виключення в i -му рядку, дістанемо додатний вільний член

$$\beta'_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} > 0.$$

Отже, якби при цьому всі інші вільні члени зберегли свої знаки, то загальне число від'ємних вільних членів зменшилося на одиницю. Застосо-

вуючи цей крок послідовно, можна було б перейти до таблиці без від'ємних вільних членів.

Однак при такому способі дій у колонці вільних членів нової таблиці кількість від'ємних елементів може навіть збільшитись, оскільки деякі з додатних вільних членів можуть перетворитись на від'ємні.

Розглянемо умови, при яких забезпечується послідовне зменшення числа від'ємних елементів у стовпці вільних членів при перетворенні системи (3.2) способом повних виключень Жордана-Гаусса з означеним вище ключовим елементом α_{ij} . Вільні члени, відмінні від вибраного β_i , перетворюються за формулою

$$\beta_s = \beta'_s - \frac{\alpha_{sj}\beta_i}{\alpha_{ij}},$$

переписавши яку у вигляді

$$\beta'_s = \alpha_{sj} \left(\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} - \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \right), \quad (3.3)$$

легко дістати умови збереження в довільному s -му рядку ($s \neq i$) знака вільного члена при перетворенні системи обмежень. Справді, співвідношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} > 0$ має місце завжди; розглянемо співвідношення $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$. При

$\beta_s \geq 0$ та $\alpha_{sj} < 0$, $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \leq 0$, тобто в круглих дужках виразу (3.3) стоятиме

від'ємна величина, а добуток її на від'ємне α_{sj} дає в результаті $\beta'_s > 0$.

Отже, в цьому випадку вільний член в s -му рядку нової таблиці залишається додатним. При $\beta_s \geq 0$ та $\alpha_{sj} > 0$, $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} > 0$ і $\beta'_s \geq 0$ лише при умові

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \geq \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}},$$

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \geq \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}},$$

тобто елемент α_{ij} можна лише тоді вибрати ключовим, коли він буде знаменником найменшого з усіх додатних відношень вільних членів таблиці до відповідних їм (по рядках) елементів ключового стовпчика.

Цьому правилу не суперечать і випадки, коли $\beta_s < 0$, бо якщо при цьому $\alpha_{sj} > 0$, то $\beta'_s < 0$. Те ж саме дістанемо і при $\beta_s < 0$, $\alpha_{sj} < 0$ та

$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \geq \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$; $\beta'_s < 0$, тобто в усіх цих випадках знак s -го вільного члена нової

таблиці буде тим самим, що і знак s -го вільного члена в попередній таблиці, за винятком, звичайно, β_i . Нехай нарешті, деякі з вільних членів

$\beta_s = 0$; тоді для довільного додатного співвідношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ знак β'_s зале-

жатиме від знака α_{sj} і для $\alpha_{sj} > 0$, $\beta'_s < 0$ і навпаки для $\alpha_{sj} < 0$, $\beta'_s > 0$. Од-

нак, приписуючи відношенню $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} = 0$ знак плюс, бачимо, що саме воно

буде найменшим серед додатних відношень, а отже, s -й вільний член нової таблиці лише тоді дорівнюватиме нулю (навіть при $\alpha_{sj} > 0$), коли і

$\beta_i = 0 \left(\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = 0 \right)$, тобто коли ключовий елемент взято у рядку з нульовим

вільним членом. При цьому решта елементів, відмінних від нуля, зберігають, як це впливає з аналізу формули (3.3), свій знак.

Зазначене вище можна використати для послідовного зменшення кількості від'ємних вільних членів системи обмежень (3.2) у випадку,

коли серед них немає нулів та відношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ є найменшим з усіх дода-

тних відношень $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} > 0$ ($s = 1, 2, \dots, m$).

Справді, за кожним таким перетворенням таблиці в стовпчику вільних членів один від'ємний елемент, а саме вільний член ключового рядка, перетворюється на додатний. Однак зрозуміло, що в багатьох ви-

падках система обмежень (3.2) не допускає здійснення цього способу дій, бо знаменником найменшого додатного відношення в ключовому стовпчику може бути додатний елемент. В цьому випадку залишається зробити єдине – взявши цей елемент за ключовий, перейти до нової таблиці, сподіваючись дістати в ній стовпчик, від'ємний елемент якої буде знаменником найменшого додатного співвідношення, чисельником якого буде від'ємний елемент стовпчика вільних членів. Зробивши скінченне число перетворень таблиці, матимемо лише два результати:

- 1) або переконаємось у суперечливості умов задачі;
- 2) або ж дістанемо таблицю, яка містить у деякому стовпчику від'ємний елемент, що буде знаменником найменшого додатного відношення елементів стовпчика вільних членів до елементів даного стовпчика, тобто випадок, коли можна застосовувати формулу (3.3).

Скінченність алгоритму знаходження опорного плану впливає з скінченності числа базисних розв'язків основної системи обмежень задачі лінійного програмування у першій стандартній формі, яке не більше ніж C_n^m , а описана вище спрямованість пошуку опорного плану включає необхідність обстеження (перебору) всіх базисних розв'язків основної системи обмежень (2.9) і зводить його до перевірки невеликого числа базисних розв'язків.

Сформулюємо **правила алгоритму знаходження опорного плану задачі лінійного програмування** (2.8) – (2.10):

1. Діставши довільний базисний розв'язок основної системи обмежень (2.9) задачі у вигляді (3.2), розглянемо стовпчик вільних членів. Може бути два випадки:

- а) якщо в стовпчику вільних членів немає від'ємних, то знайдений базисний розв'язок і є опорним планом задачі;
- б) якщо стовпчик вільних членів містить хоча б один від'ємний елемент, то базисний розв'язок не є планом задачі і слід приступити до знаходження опорного плану.

2. Відмічаємо який-небудь від'ємний вільний член (для упорядкування вибору беруть, звичайно, хоч це і не обов'язково, найбільший за модулем від'ємний вільний член), розглядаємо елементи відповідного йому рядка. Може бути два випадки:

- а) рядок не містить від'ємних елементів, крім вільного члена, і тоді система умов задачі несумісна в області невід'ємних розв'язків;
- б) серед елементів рядка є від'ємні елементи і тоді стовпчик, який містить шуканий від'ємний елемент, беремо за ключовий.

3. Розглядаємо всі невід'ємні співвідношення елементів стовпчика вільних членів до відповідних їм (по рядках) елементів ключового стовпчика і відмічаємо серед них найменше. Якщо відмічене співвідношення не дорівнює нулю, то його знаменник вибирають ключовим елементом. Якщо ж відмічене мінімальне співвідношення дорівнює нулю, то його знаменник беруть ключовим елементом лише тоді, коли він додатний; якщо ж цей елемент від'ємний, то ключовим елементом слід взяти знаменник найменшого додатного відношення, відмінного від нуля.

4. Робимо крок повного жорданового виключення з вибраним ключовим елементом і переходимо до нової таблиці.

5. Розглядаємо нову таблицю і, в разі потреби, повторюємо дії, описані в правилах 1–4 доти, поки не матимемо таблицю з невід'ємними вільними членами – опорний план задачі.

Приклад 3.1. Наведемо приклад числової реалізації описаного алгоритму.

Знайдемо якийсь з опорних планів задачі

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6;$$

$$x_1 - 4x_2 + x_4 = 0;$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 3;$$

$$-2x_1 - x_2 + x_6 = -2;$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_7 = -3;$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 7).$$

Запишемо систему основних обмежень у вигляді таблиці:

№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β	$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$
0	-1	-2	0	0	0	0	0	0	-
1	1	1	1	0	0	0	0	6	6/1
2	1	-4	0	1	0	0	0	0	0/1
3	-1	2	0	0	1	0	0	3	3/(-1)
4	-2	-1	0	0	0	1	0	-2	-2/(-2)
5	-1	-2	0	0	0	0	1	-3	-3/(-1)

Відмічаємо п'ятий рядок, що містить більший за модулем від'ємний вільний член -3 . Виберемо перший стовпчик за ключовий, оскільки у цьому стовпчику і п'ятому рядку стоїть від'ємний елемент $\alpha_{51} = -1$. Зрозуміло, що другий стовпчик також можна було б взяти за ключовий, оскільки $\alpha_{52} = -2 < 0$. Взявши за ключовий перший стовпчик,

розглянемо всі невід'ємні відношення $\frac{\beta_s}{\alpha_{s1}} = \frac{6}{1}; \frac{0}{1}; \frac{-2}{-2}; \frac{-3}{-1}$. Серед них най-

меншим буде $\frac{0}{1} = 0$. Оскільки в знаменнику цього відношення стоїть додатний елемент, то беремо його за ключовий.

№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β	$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$
0	0	-6	0	1	0	0	0	0	-
1	0	5	1	-1	0	0	0	6	6/5
2	1	-4	0	1	0	0	0	0	0/(-4)
3	0	-2	0	1	1	0	0	3	3/(-2)
4	0	-9	0	2	0	1	0	-2	-2/(-9)
5	0	-6	0	1	0	0	1	-3	-3/(-6)

Розглянемо знову останній рядок і згідно з наведеними правилами вибираємо ключовий елемент $\alpha_{42} = -9$. Переходимо до нової таблиці:

№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β	$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$
0	0	0	0	$-3/9$	0	$-6/9$	0	$12/9$	–
1	0	0	1	$1/9$	0	$5/9$	0	$44/9$	$44/5$
2	1	0	0	$1/9$	0	$-4/9$	0	$8/9$	-2
3	0	0	0	$5/9$	1	$-2/9$	0	$31/9$	$-31/2$
4	0	1	0	$-2/9$	0	$-1/9$	0	$2/9$	-2
5	0	0	0	$-3/9$	0	$-6/9$	1	$-15/9$	$15/6$

Зробивши ще один крок з ключовим елементом $-6/9$, дістаємо таблицю, яка містить опорний план $\vec{X} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 4, \frac{5}{2}, 0\right)$:

№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β
0	0	0	0	0	0	0	-1	3
1	0	0	1	$-1/6$	0	0	$5/6$	$7/2$
2	1	0	0	$-1/2$	0	0	$-2/3$	2
3	0	0	0	$2/3$	1	0	$-1/3$	4
4	0	1	0	$-1/6$	0	0	$-1/6$	$1/2$
5	0	0	0	$1/2$	0	1	$-3/2$	$5/2$

3.3. АЛГЕБРА СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

Приступимо до другого етапу симплексного методу – знаходження оптимального плану. Оптимальний план задачі лінійного програмування знаходиться серед опорних планів цієї задачі. Тому слід знайти спосіб визначення всіх опорних планів задачі.

Нехай знайдено деякий з опорних планів задачі лінійного програмування. Отже задачу можна записати в канонічній формі (3.2)

$$\begin{aligned}
 z &= Q + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k \rightarrow \max, \\
 \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1j} x_j + \dots + \alpha_{1k} x_k + x_{k+1} &= \beta_1, \\
 \dots, \\
 \alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{ij} x_j + \dots + \alpha_{ik} x_k + x_{k+i} &= \beta_i, \\
 \dots, \\
 \alpha_{m1} x_1 + \dots + \alpha_{mj} x_j + \dots + \alpha_{mk} x_k + x_n &= \beta_m, \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

а її опорний план

$$\bar{X}_1 = (x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = \beta_1, \dots, x_{k+i} = \beta_i, \dots, x_n = \beta_m),$$

що надає цільовій функції значення $z(\bar{X}_1) = Q$.

Поставимо задачу переходу до такого нового опорного плану задачі, який надавав би цільовій функції значення, ближчого до шуканого екстремуму. Нехай цим екстремумом буде максимум цільової функції. В (3.4) функція мети представлена як функція вільних змінних x_1, x_2, \dots, x_k . Можна вважати, що коефіцієнти при базисних невідомих у цільовій функції дорівнюють нулю. Розглянемо знаки коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ цільової функції z . Може бути два випадки: 1) всі $\gamma_q \leq 0$; 2) деякі або всі $\gamma_q > 0$.

Розглянемо перший випадок. Цілком зрозуміло, що при всіх $\gamma_q \leq 0$ перехід до будь-якого іншого опорного плану, відмінного від \bar{X}_1 , може лише зменшити цільову функцію. Справді, нехай від (3.4) зроблено перехід до нової форми задачі, де всі $\beta'_p \geq 0$, тобто маємо другий опорний план, причому змінна x_j перейшла в базис замість змінної x_{k+i} , тоді маємо $z' = z(\bar{X}_2) = Q + \gamma_j x_j$. Оскільки $\gamma_j \leq 0$ і $x_j = \beta'_i \geq 0$, то

$$z(\bar{X}_1) = Q \geq z(\bar{X}_2) = Q + \gamma_j x_j = Q + \gamma_j \beta'_i.$$

Отже, опорний план \bar{X}_1 в цьому випадку буде оптимальним і ознакою оптимальності при знаходженні максимуму цільової функції буде недодатність коефіцієнтів цільової функції z .

Розглянемо другий випадок. Нехай деяке з γ_q , наприклад, $\gamma_j > 0$.

Тоді, вводячи в базис вільну змінну x_j дістанемо нерівність

$$z(\bar{X}_2) = Q + \gamma_j x_j \geq Q = z(\bar{X}_1),$$

і, отже, новий опорний план може надати цільовій функції значення, більшого від попереднього.

Знайдемо правила переходу до нового опорного плану, який надавав би цільовій функції значення більшого за попереднє.

Нехай $\gamma_j > 0$. Виберемо j -й стовпчик основної системи обмежень (3.4). Може бути два випадки: 1) у вибраному стовпчику є додатні коефіцієнти α_{ij} ; 2) вибраний стовпчик не містить додатних коефіцієнтів, тобто всі $\alpha_{ij} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Розглянемо перший випадок. Оскільки $\gamma_j > 0$, збільшення x_j збільшує форму на допустимому плані $(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$, на якому задача (4.4) має вигляд

$$\begin{aligned} z &= Q + \gamma_j x_j \rightarrow \max, \\ \alpha_{1j} x_j + x_{k+1} &= \beta_1, \\ \dots, \\ \alpha_{ij} x_j + x_{k+i} &= \beta_i, \\ \dots, \\ \alpha_{mj} x_j + x_n &= \beta_m, \\ x_j \geq 0, x_{k+1} \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Розіб'ємо рівності в (3.5) на дві групи: до першої віднесемо ті, в яких коефіцієнти $\alpha_{ij} \leq 0$, до другої – ті, де $\alpha_{ij} > 0$. З'ясуємо, якого найбільшого значення може набувати x_j . Візьмемо довільну рівність з (3.5)

$$x_{k+s} = \beta_s - \alpha_{sj} x_j, \quad 1 \leq s \leq m.$$

Оскільки для рівнянь першої групи $\alpha_{sj} \leq 0$, то при будь-яких $x_j \geq 0$, $\beta_s - \alpha_{sj}x_j \geq 0$, тому ці рівності не накладають на x_j жодних обмежень зверху. Інша картина в рівностях другої групи. При

$$x_j = \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \quad (\alpha_{sj} > 0)$$

базисна невідома x_{k+s} перетворюється на нуль і при подальшому збільшенні x_j стає від'ємною, що недопустимо. Для того щоб розв'язок залишався допустимим, x_j може набувати найбільшого значення, яке визначається співвідношенням

$$\Delta = \min_{1 \leq s \leq m} \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \quad (\alpha_{sj} > 0) \quad (3.6)$$

Елемент α_{sj} , який реалізує рівність (3.6), вибирається за ключовий.

Розглянемо другий випадок. З правил вибору ключового елемента можна зробити такий важливий висновок.

Якщо деякий коефіцієнт цільової функції $\gamma_j > 0$, а в системі основних обмежень всі коефіцієнти $\alpha_{ij} \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, то така задача лінійного програмування не має розв'язку.

Дійсно, всі рівності системи основних обмежень (3.4) мають належати до першої групи. Невідома x_j може набувати будь-яких великих значень та цільова функція є необмеженою зверху

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty} (Q + \gamma_j x_j) = +\infty.$$

Тому задача лінійного програмування не має оптимального плану.

Припустимо, що ключовим є елемент α_{ij} . Перехід до нового опорного плану задачі означає, що x_j переводиться в базисні змінні, а замість неї x_{k+i} повинна стати вільною. Запишемо канонічну форму, що відповідає новому базису. З i -го рівняння (3.4) знаходимо

$$x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} x_k \right) \quad (3.7)$$

В інші рівняння (3.4) замість x_j підставимо (3.7)

$$\begin{aligned} & \alpha_{s1}x_1 + \dots + \alpha_{sj-1}x_{j-1} + \\ & + \alpha_{sj} \left[\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} x_k \right) \right] + \\ & + \alpha_{sj+1}x_{j+1} + \dots + \alpha_{sk}x_k = \beta_s. \end{aligned}$$

Звівши подібні члени, для $1 \leq s \leq m$ (за винятком i -го рівняння), дістанемо

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{s1} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} \right) x_1 + \dots + \left(\alpha_{sj-1} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{\alpha_{sj}}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \\ & + \left(\alpha_{sj+1} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{sj+1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j+1} + \dots + \left(\alpha_{sk} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} \right) x_k + x_{k+s} = \beta_s - \alpha_{sj} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

На місці i -го рівняння буде таке:

$$\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \dots + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} x_k + x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}. \quad (3.9)$$

Цільова функція має вигляд:

$$\begin{aligned} z' = Q + \gamma_j \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} + & \left(\gamma_1 - \gamma_j \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} \right) x_1 + \dots + \left(\gamma_{j-1} - \gamma_j \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{\gamma_i}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \\ & + \left(\gamma_{j+1} - \gamma_j \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j+1} + \dots + \left(\gamma_k - \gamma_j \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} \right) x_k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Формули (3.8) – (3.10) обґрунтовують правила вибору за методом Жордана-Гаусса наступного опорного плану, якщо попередній не був оптимальним.

Подивимось, як зміниться критерій оптимальності опорного плану задачі лінійного програмування, якщо треба відшукати мінімум цільової функції.

Пригадавши, що задача на мінімізацію цільової функції зводиться до задачі на максимізацію зміною знаків цільової функції на протилеж-

ні, приходимо до висновку, що ознакою оптимальності опорного плану при знаходженні мінімуму цільової функції буде невід'ємність коефіцієнтів цільової функції.

3.4. СИМПЛЕКСНІ ТАБЛИЦІ

Практичні розрахунки при розв'язуванні реальних задач симплексним методом виконуються за допомогою ЕОМ. Однак якщо розрахунки здійснюються без застосування ЕОМ, то зручно використовувати так звані симплексні таблиці.

Немає потреби при кожній ітерації вписувати формули (3.8) – (3.10), тому що можна формалізувати, використовуючи симплексні таблиці. При роботі з симплексними таблицями не розрізняють, де обмеження, а де оптимізуюча функція. Тому записують цільову функцію у вигляді рівняння $z - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \dots - \gamma_k x_k = Q$.

Наведемо **алгоритм роботи із симплексними таблицями**.

1. Задачу лінійного програмування записану в канонічній формі заносять у першу симплексну таблицю. В нульовий рядок таблиці заносять рівняння, що відповідає цільовій функції. В стовпчик „Базис” таблиці заносяться базисні змінні, а в стовпчик „ОП” (опорний план) – вільні члени. Останній стовпчик підготовлений для оціночних відношень Δ вільних членів до відповідних чисел ключового стовпчика, які необхідні для визначення ключового елемента. В робочу частину таблиці (починаючи з п'ятого стовпчика і першого рядка) заносять коефіцієнти α_{ij} при змінних.
2. Перевіряють виконання критерію оптимальності. Якщо цільова функція максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, хіба що, стовпчика „ОП”), то опорний план є оптимальним. Якщо цільова функція мінімізується, то критерієм оптимальності розв'язку є відсутність додатних членів в нульовому рядку.

3. Якщо критерій оптимальності не виконаний, то найбільший за модулем від'ємний коефіцієнт в нульовому рядку задачі на максимум (найбільший за модулем додатний коефіцієнт задачі на мінімум) визначає ключовий стовпчик j .
4. Складають оціночні відношення кожного рядка за такими правилами: а) ∞ , якщо $\alpha_{sj} \leq 0$; б) 0, якщо $\beta_s = 0$ і $\alpha_{sj} > 0$; в) $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$, якщо $\beta_s \neq 0$ і

$\alpha_{sj} > 0$. Визначають $\min_s \left(\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \right)$. Якщо скінченного мінімуму не має, то

задача лінійного програмування не має скінченного оптимуму. Якщо мінімум скінченний, то обирають рядок i , на якому він досягається, за ключовий. На перетині ключового рядка і ключового стовпчика знаходиться ключовий елемент α_{ij} .

5. Переходять до наступної таблиці за правилами:

а) у стовпчику „Базис” записують новий базис: замість базисної змінної x_i вводять вільну змінну x_j ;

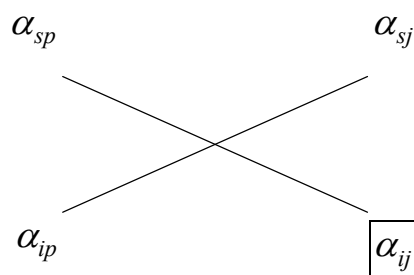
б) у стовпчиках, які відповідають базисним змінним, проставляють нулі і одиниці: 1 – напроти „своїх” базисної змінної, 0 – напроти „чужої” базисної змінної, 0 – в нульовому рядку для усіх базисних змінних;

в) новий рядок на місці ключового (рядок з номером i) отримують діленням старого на ключовий елемент α_{ij} ;

г) всі інші елементи α'_{sp} обчислюють за *правилом прямокутника*:

$$\alpha'_{sp} = \alpha_{sp} - \frac{\alpha_{sj}\alpha_{ip}}{\alpha_{ij}}$$

$$\beta'_s = \beta_s - \frac{\alpha_{sj}\beta_i}{\alpha_{ij}}$$



Далі переходять до п. 2 алгоритму.

Правила роботи із симплексними таблицями розглянемо на прикладі

Приклад 3.2.

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12,$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 4,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

I ітерація. Запишемо цільову функцію у вигляді рівняння

$$z - 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Вихідна задача є канонічною формою і тому заповнюємо першу симплексну таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ
	0	z	0	-3	-2	0	0	-
I	1	x_3	12	2	3	1	0	6
	2	x_4	4	2	-1	0	1	2

Цільова функція в задачі максимізується, тому у випадку оптимального плану в нульовому рядку повинні бути відсутні від'ємні числа. У нашому випадку в нульовому рядку є два від'ємні числа (-3 і -2). Беремо найбільше за модулем (-3). Столпчик „ x_1 ” буде ключовим.

Для вибору ключового елемента складаємо відношення вільних членів (чисел столпчика „ОП”) до відповідних чисел ключового столпчика: 1) $12:2=6$; 2) $4:2=2$.

Друге відношення менше, тому число „2” другого рядка буде ключовим елементом. Ключовий елемент у таблиці позначаємо квадратом і переходимо до другої ітерації.

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ
II	0	z	6	0	$-7/2$	0	$3/2$	–
	1	x_3	8	0	4	1	–1	2
	2	x_1	2	1	$-1/2$	0	$1/2$	∞

II ітерація. Після заповнення таблиці перевіряємо її опорний план на оптимальність. Помічаємо, що нам треба перейти до наступного опорного плану, оскільки у нульовому рядку стовпчика „ x_2 ” є від’ємне число ($-7/2$). Відношення $8:4=2$ (у другому рядку відношення дорівнює ∞) вказує, що за ключовий елемент слід взяти число 4.

III ітерація. У симплексній таблиці замість базисної змінної x_3 тепер буде нова базисна змінна x_2 .

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4
III	0	z	13	0	0	$7/8$	$5/8$
	1	x_2	2	0	1	$1/4$	$-1/4$
	2	x_1	3	1	0	$1/8$	$3/8$

У нульовому рядку вже немає від’ємних чисел, тому опорний план є оптимальним. Виписуємо його із стовпчика „ОП”:

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, z_{\max} = 13.$$

Зауваження 1. Кожній таблиці відповідає своя канонічна форма запису основної задачі лінійного програмування. Так, за останньою таблицею можна записати таку канонічну форму:

$$z = 13 - \frac{7}{8}x_3 - \frac{5}{8}x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 2,$$

$$x_1 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = 3,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Зауваження 2. Контролювати правильність обчислення опорних планів і оптимального значення цільової функції можна за вихідною формулою:

$$z_{\max} = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13.$$

Зауваження 3. При розв'язуванні задачі симплексним методом таблиці послідовно записують одна під одною. У нашому прикладі вони мають такий вигляд:

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ
I	0	z	0	-3	-2	0	0	-
	1	x_3	12	2	3	1	0	6
	2	x_4	4	2	-1	0	1	2
II	0	z	6	0	-7/2	0	3/2	-
	1	x_3	8	0	4	1	-1	2
	2	x_1	2	1	-1/2	0	1/2	∞
III	0	z	13	0	0	7/8	5/8	
	1	x_2	2	0	1	1/4	-1/4	
	2	x_1	3	1	0	1/8	3/8	

Зауваження 4. При знаходженні оптимального плану слід насамперед обчислювати елементи цільового рядка (нульовий рядок). Якщо всі вони задовольняють (у новій таблиці) умову оптимальності, то можна обчислити лише нові значення змінних оптимального плану задачі у стовпчику „ОП”, а решту величин не обчислювати.

3.5. МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ (М–МЕТОД)

Як зазначалось в п. 3.3, система умов задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю і всі вільні члени невід'ємні; тим самим припускалось, що опорний план задачі відомий. Якщо цього немає,

то необхідно знайти деякий базисний розв'язок основної системи обмежень, після чого перейти до знаходження опорного плану.

Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень записана у другій стандартній формі:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень канонічної форми:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + x_{n+i} = \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Але така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях.

Метод штучного базису, або М-метод, дає можливість сумістити етапи знаходження деякого базисного і опорного розв'язків системи обмежень. Завдяки чому вдається скоротити загальний обсяг обчислень і, крім того, встановити одночасно, чи існує взагалі хоча б один план задачі, чи система її умов суперечлива. Ідея методу полягає в тому, що до лівої частини кожного i -го рівняння – обмеження задачі, яка задана у першій стандартній формі і не має одиничного базису, додають по одній штучній змінній $u_i \geq 0$, утворюючи таким чином штучний базис. Отже, в початковій таблиці всі основні (природні) змінні будуть вільними і мають дорівнювати нулю в штучному базисному розв'язку (штучному опорному плані), а *штучні змінні* (фактичні нулі) дорівнюватимуть правим частинам основної системи обмежень:

$$\vec{X} = (x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, u_1 = \beta_1, u_2 = \beta_2, \dots, u_m = \beta_m).$$

Отже, план, який містить хоча б одну штучну змінну, відмінну від нуля (тобто в базисі), є суперечливим. Щоб знайти деякий план задачі, треба всі штучні змінні вивести з базису. Якщо цього зробити не можна, то це свідчить про суперечливість умов задачі.

Метод штучного базису дозволяє у разі нерівностей зі знаком „ \geq ” нескладними перетвореннями дістати додатний базис. Для цього в задачі із мішаними обмеженнями необхідно взяти рівняння з додатним вільним членом ($\beta_i > 0$). Нерівності зі знаком „ \geq ” ділять на такі числа, щоб після ділення вільні члени були менші за β_i . Після цього переходять до обмежень рівнянь і віднімають їх послідовно від вибраного рівняння. Всі штучні невідомі у здобутих рівняннях матимуть коефіцієнт +1 і додатні плани. Розглянемо приклад мішаної системи обмежень.

Приклад 3.3.

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$2x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

В першу нерівність введемо додаткову змінну x_3 , а другу нерівність поділимо на 2 і додамо додаткову змінну x_4 з коефіцієнтом -1 :

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Віднімемо від третього рівняння друге і запишемо результат замість другого рівняння:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Тепер для вибору кінцевого базису досить лише ввести штучну змінну y_1 для третього рівняння:

Задача (3.12), (3.13) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних змінних y_1, y_2, \dots, y_m . Залишається у формі (3.13) із системи обмежень (3.12) виразити штучні змінні y_1, y_2, \dots, y_m через вільні невідомі x_1, x_2, \dots, x_n .

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень (3.11) в області невід'ємних значень.

Теорема 3.2. Для того, щоб система обмежень (3.11) була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (3.12)

$$f_{\min} = 0.$$

Необхідність. Нехай система обмежень (3.11) має допустимий розв'язок $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Побудуємо розширену систему обмежень і розглянемо розв'язок задачі (3.12), (3.13):

$$\vec{Y}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*).$$

Оскільки $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то $y_i^* = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) і $f(\vec{Y}^*) = 0$.

В силу невід'ємності штучних змінних завжди $f \geq 0$, тому розв'язок $\vec{Y}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, 0, \dots, 0)$ є оптимальним для задачі (3.12), (3.13) і $f_{\min} = 0$.

Достатність. Нехай $\vec{Y}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – розв'язок задачі (3.12), (3.13) і $f(\vec{Y}^*) = f_{\min} = 0$. Тоді $y_1^* + y_2^* + \dots + y_m^* = 0$. Але сума невід'ємних чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожне з них є нулем. Звідси, $y_1^* = y_2^* = \dots = y_m^* = 0$. Отже, $\vec{Y}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, 0, \dots, 0)$ і система обмежень (3.12) збігається із системою обмежень (3.11), для якої розв'язок $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є допустимим.

З теореми 3.2 випливає такий наслідок.

Наслідок. Якщо оптимальний план задачі (3.12), (3.13) містить хоча б одну штучну змінну y_i ($i = 1, 2, \dots, m$), то вихідна задача (3.11) не

має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.

Теорема 3.2 дає практично, крім критерію існування допустимого плану, і метод його відшукування. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним.

Розглянемо на прикладі методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

Приклад 3.4.

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \rightarrow \min ,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6 ,$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 ,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 14 ,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Цілком зрозуміло, що в цьому випадку слід ввести лише дві штучні змінні $y_1 \geq 0$ та $y_2 \geq 0$ відповідно в перше і друге обмеження, оскільки третьою базисною змінною буде додаткова змінна $x_5 \geq 0$, що вводиться в третє обмеження. Отже, М-задача буде такою:

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \rightarrow \min ,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + y_1 = 6 ,$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 10 ,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14 ,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 .$$

Введемо штучну форму

$$f = y_1 + y_2 = 16 - (5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)$$

і запишемо задачу в початкову симплексну таблицю.

Зробимо декілька зауважень щодо заповнення симплексної таблиці.

Зауваження 1. Щоб знайти опорний план, треба перевести штучні невідомі з базисних у вільні. Оскільки, після переходу у вільні, штучна невідома нас вже не буде цікавити, то відповідні стовпчики таблиці можна не заповнювати.

Зауваження 2. Нульовий рядок заповнюємо за цільовою функцією, а останній рядок – за штучною формою. Останній можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків рівнянь, які містять штучні змінні.

Зауваження 3. Методом штучного базису можна окремо (без цільової функції) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли є деякі ознаки того, що система обмежень не може мати допустимих планів.

Результати обчислень наведені в таблиці:

№ ітер.	№ ряд.	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Δ
I	0	z	0	-2	1	-1	7	0	0	0	-
	1	y_1	6	1	2	0	3	0	1	0	6
	2	y_2	10	4	-1	1	-1	0	0	1	5/2
	3	x_5	14	-1	3	2	1	1	0	0	-
		f	16	5	1	1	2	0	0	0	-
II	0	z	5	0	1/2	-1/2	13/2	0	0		-
	1	y_1	7/2	0	9/4	-1/4	13/4	0	1		14/13
	2	x_1	5/2	1	-1/4	1/4	-1/4	0	0		∞
	3	x_5	33/2	0	11/4	9/4	3/4	1	0		22
		f	7/2	0	9/4	-1/4	13/4	0	0		-
III	0	z	-2	0	-4	0	0	0			
	1	x_4	14/13	0	9/13	-1/13	1	0			
	2	x_1	36/13	1	-1/13	3/13	0	0			
	3	x_5	204/13	0	2	30/13	0	1			
		f	0	0	0	0	0	0			

В рядку штучної форми f першої ітерації максимальне число 5 стоїть у „ x_1 ”, тому слід ввести в базис змінну x_1 , а з базису згідно з найменшим симплексним співвідношенням Δ вивести y_2 .

На другій ітерації необхідно вивести з базису штучну змінну y_1 , а ввести x_4 , тому що найбільше число $13/4$ рядка штучної форми f знаходиться у відповідному стовпчику.

Після виключення штучних змінних з базису на третій ітерації отримали опорний план, який одночасно є оптимальним, тому що в нульовому рядку відсутні додатні числа. Отже оптимальний план задачі

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{14}{13}, z_{\min} = -2.$$

Зрозуміло, що частіше після виведення штучних змінних із базису знаходиться опорний план, який не є оптимальним. Тоді продовжують пошук оптимального розв'язку за звичайними симплексними таблицями. Розглянемо приклад.

Приклад 3.5. Нехай задано задачу:

$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 16,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Вводимо штучні змінні y_1 і y_2 :

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + y_1 = 18,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + y_2 = 16,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

та штучну форму:

$$f = y_1 + y_2 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4).$$

Симплексну таблицю можна заповнювати і без стовпчиків штучних змінних (це не стосується додаткових змінних).

№ ітерації	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ
I	0	z	0	-2	1	-3	1	-
	1	y_1	18	4	-2	1	3	9/2
	2	y_2	16	3	1	2	1	16/3
	3	f	34	7	-1	3	4	-
II	0	z	9	0	0	-5/2	5/2	-
	1	x	9/2	1	-1/2	1/4	3/4	∞
	2	y_2	5/2	0	5/2	5/4	-5/4	1
	3	f	5/2	0	5/2	5/4	-5/4	-
III	0	z	9	0	0	-5/2	5/2	-
	1	x_1	5	1	0	1/2	1/2	10
	2	x_2	1	0	1	1/2	-1/2	2
	3	f	0	0	0	0	0	-
IV	0	z	14	0	5	0	0	
	1	x_1	4	1	-1	0	1	
	2	x_3	2	0	2	1	-1	

У третьому рядку третьої ітерації таблиці немає вже додатних чисел, тому план $\vec{X} = (5, 1, 0, 0)$ – опорний план для вихідної задачі, який не буде оптимальним оскільки в нульовому рядку є від'ємне число $-5/2$. Вибираючи ключовий елемент, приходимо до оптимального плану:

$$\vec{X}_{opt} = (4, 0, 2, 0), z_{max} = 14.$$

3.6. АЛЬТЕРНАТИВНИЙ ОПТИМУМ ТА ЗАЦИКЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розв'язуванні задач лінійного програмування симплексним методом може статися, що в останній таблиці у нульовому рядку (рядок цільової функції) виконані критерії оптимальності розв'язку, але один чи декілька коефіцієнтів при вільних змінних дорівнюють нулю тобто відсутня одна або декілька вільних змінних у виразі для цільової функції

ції. Тоді, прийнявши у якості ключового стовпчика стовпчик, де $\gamma_j = 0$ для вільної змінної, і знайшовши новий оптимальний розв'язок, помітимо, що значення цільової функції при цьому не зміниться (цільова функція не залежить від цієї вільної змінної). Кажуть, що у цьому випадку задача має альтернативний оптимум.

Критерієм альтернативного оптимуму при розв'язуванні задач симплексним методом є рівність нулю хоча б одного коефіцієнта при вільній змінній в рядку цільової функції (нульовому рядку) $\gamma_j = 0$.

Якщо тільки один коефіцієнт вільної змінної в рядку цільової функції дорівнює нулю, то розв'язок знаходиться за формулою

$$\vec{X}_{opt} = t\vec{X}_{opt1} + (1-t)\vec{X}_{opt2}, \text{ де } 0 \leq t \leq 1.$$

Якщо два і більше коефіцієнти γ_j , наприклад s , вільних змінних дорівнюють нулю, то оптимальний розв'язок визначається за формулою

$$\vec{X}_{opt} = \sum_{i=1}^s t_i \vec{X}_i, \text{ де } \sum_{i=1}^s t_i = 1, t_i \geq 0.$$

В задачах, які мають альтернативний оптимум, виникає можливість включення в її модель інших критеріїв ефективності.

Приклад 3.6. Дана задача лінійного програмування

$$z = 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7,$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5).$$

Задача лінійного програмування записана в канонічній формі з базисними змінними x_1, x_4 . Складемо симплексну таблицю і знайдемо оптимальний розв'язок.

№ ітер.	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Δ
I	0	z	0	0	-2	4	0	-2	-
	1	x_1	7	1	3	-1	0	2	∞
	2	x_4	12	0	-2	4	1	0	3
II	0	z	-12	0	0	0	-1	-2	-
	1	x_1	10	1	5/2	0	1/4	2	4
	2	x_3	3	0	-1/2	1	1/4	0	∞
III	0	z	-12	0	0	0	-1	-2	-
	1	x_2	4	2/5	1	0	1/10	4/5	
	2	x_3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	

В нульовому рядку першої ітерації присутнє одне додатне число 4. Ключовий елемент вибираємо у стовпчику x_3 . На другій ітерації отримали оптимальний розв'язок $\vec{X}_{opt1} = (10, 0, 3, 0, 0)$, $z_{min} = -12$. Оскільки в нульовому рядку другої ітерації коефіцієнт при x_2 дорівнює нулю (у виразі для цільової функції відсутня вільна змінна x_2), то задача має альтернативний оптимум. Ще один оптимальний розв'язок можна знайти, якщо в базис ввести вільну змінну x_2 замість x_1 (враховуючи оціночне відношення Δ). Отримуємо $\vec{X}_{opt2} = (0, 4, 5, 0, 0)$, $z_{min} = -12$. Тоді множина оптимальних розв'язків задачі:

$$x_1 = 10t + (1-t)0 = 10t,$$

$$x_2 = 0t + (1-t)4 = 4 - 4t,$$

$$x_3 = 3t + (1-t)5 = 5 - 2t,$$

$$x_4 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$x_5 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$\vec{X}_{opt} = (10t, 4 - 4t, 5 - 2t, 0, 0).$$

Надаючи t значення з проміжку $[0; 1]$, отримуємо різні оптимальні плани, для яких $z_{\min} = -12$.

На практиці може трапитись випадок, коли при виборі ключового елемента є декілька однакових найменших відношень $\Delta_s = \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$. Тоді на наступній ітерації деякі базисні змінні опорного плану будуть дорівнювати нулю. Це призводить до того, що наступні ітерації можуть не змінювати цільової функції.

Опорний план, в якому хоча б одна базисна компонента дорівнює нулю, будемо називати виродженим.

Задача лінійного програмування, яка має принаймні один вироджений опорний план, називається виродженою.

Але й у випадку виродженого опорного плану можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення цільової функції почне змінюватись в необхідному напрямку.

Приклад 3.7. Розв'язати симплексним методом задачу

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6,$$

$$6x_1 - 4x_2 \leq 14,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Після введення додаткових змінних x_3, x_4, x_5 отримуємо

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6,$$

$$6x_1 - 4x_2 + x_5 = 14,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5).$$

Складемо початкову симплексну таблицю і на другій ітерації отримемо вироджений базисний розв'язок $\vec{X}_2 = (2, 0, 0, 0, 2)$, в якому базисна змінна $x_4 = 0$.

№ ітер.	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Δ
I	0	z	0	-2	1	0	0	0	-
	1	x_3	2	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	2
	2	x_4	6	3	-2	0	1	0	2
	3	x_5	14	6	-4	0	0	1	7/3
II	0	z	4	0	-1	2	0	0	-
	1	x_1	2	1	-1	1	0	0	∞
	2	x_4	0	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	0
III	3	x_5	2	0	2	-6	0	1	1
	0	z	4	0	0	-1	1	0	
	1	x_1	2	1	0	-2	1	0	
	2	x_2	0	0	1	-3	1	0	
	3	x_5	2	0	0	0	2	1	

Цільова функція, виражена через вільні змінні має вигляд $z = 4 + x_2 - 2x_3$. Якщо ввести змінну x_2 в базис, то на третій ітерації не отримаємо зміни цільової функції $\Delta z = 0$. $\vec{X}_3 = (2, 0, 0, 0, 2)$ – базисний розв'язок, який також вироджений. Покомпонентно він співпадає з \vec{X}_2 , але формально відрізняється набором базисних змінних. Вираз цільової функції через вільні має вигляд: $z = 4 + x_3 - x_4$. (Розв'язок пропонуємо продовжити читачам самостійно).

Виродженість базису практично не впливає на число ітерацій, потрібних для обчислення оптимального плану. Досвід показує, що число ітерацій, потрібних для відшукування кінцевого результату, міститься в межах: $1,5m \leq k \leq 3m$, де m – число основних обмежень задачі.

Виродження базису, яке отримане при оптимальному плані, може привести до альтернативного оптимуму навіть при ненульових коефіцієнтах всіх вільних змінних в цільовій функції.

Таким чином, строга монотонність симплексного алгоритму має місце лише у випадку невиродженості всіх опорних планів, одержуваних при кожній ітерації алгоритму. Вироджений план являється причиною того, що виникає теоретична можливість зациклення алгоритму, коли після певного числа ітерацій дістають план задачі, який вже був на початку циклу. Очевидно, дальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторення циклу. Отже, циклу можна було б уникнути, запам'ятовуючи опорні плани, що утворили його, і не повертаючись до них. Проте є більш надійний і простий метод усунення зациклення, так званий ε -метод, що впливає з геометричних міркувань.

Справді, виродженому опорному плану відповідає вершина многокутника розв'язків, утворювана більш ніж n гіперплощинами, інакше кажучи, одна вершина відповідає кільком виродженим планам, що означає злиття кількох вершин многокутника в одну. Ідея ε -методу усунення зациклення полягає в роз'єднанні злитих вершин. Для цього досить, очевидно, ввести замість нулів у відповідні рівняння вільні члени, які не дорівнюють нулю, однак зробити це так, щоб не було знову кількох однакових мінімальних відношень при наступному кроці. Таким чином, замість вихідної матимемо змінену задачу. Проте легко показати, що діставши оптимальний план зміненої задачі й покладаючи, що введені величини дорівнюють нулю, матимемо оптимальний розв'язок вихідної задачі.

На практиці введені величини є малими – це поліноми довільно взятої малої (близької до нуля) додатної величини ε . Коефіцієнтами поліномів беруть коефіцієнти при змінних (базисних і вільних) відповідного рівняння, а степенями ε – номери цих невідомих, тобто для i -го рівняння маємо поліном

$$P_i(\varepsilon) = \varepsilon^i + \alpha_{i1}\varepsilon^{m+1} + \alpha_{i2}\varepsilon^{m+2} + \dots + \alpha_{ik}\varepsilon^{m+k} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Цілком зрозуміло, що при всяких α_{ij} можна вибрати ε настільки малим, що завжди $P_i(\varepsilon) \geq 0$, бо доданки з степенями ε , вищими від i -го, будуть вищого порядку малості порівняно з першим ε^i . Внаслідок цього всі утворені поліноми різнитимуться за величиною. Покладаючи в знайденому оптимальному плані $\varepsilon = 0$, матимемо потрібний результат.

Щоб уникнути зациклення необхідно поліноми $P_i(\varepsilon)$ додати до вільних членів, в результаті чого матимемо

$$\beta_i(\varepsilon) = \beta_i + P_i(\varepsilon).$$

Пропонуємо читачам переконатись, що зациклення буде мати місце в прикладі

$$z = x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0,$$

$$x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 7),$$

якщо послідовно вводити в базис змінні $x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2$ і розміщувати відповідно на позиціях: 1-й, 2-й, 1-й, 2-й, 1-й, 2-й; пропонуємо також розв'язати цей приклад, вводячи величини $\beta_i(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, 3$).

Нарешті зауважимо, що на практиці зациклення практично не трапляється. Усі відомі приклади його побудовані штучно. Проте в теоретичному плані розгляд цього випадку має певний сенс.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Для розв'язання яких задач лінійного програмування застосовується симплексний метод?
2. Які основні етапи знаходження розв'язків задачі лінійного програмування?
3. Який план задачі лінійного програмування називається опорним?
4. Яка система основних обмежень задачі лінійного програмування називається сумісною в області невід'ємних значень?
5. В якому випадку система обмежень несумісна в області невід'ємних значень?
6. Як обирається ключовий елемент при знаходженні початкового опорного плану за допомогою симплексних таблиць?
7. Правила знаходження опорного плану.
8. Ознаки оптимальності задач лінійного програмування на максимум та мінімум.
9. Яка задача лінійного програмування не має розв'язку?
10. Алгоритм роботи за симплексними таблицями.
11. Відмінність штучних та додаткових змінних.
12. Критерій сумісності системи обмежень у методі штучного базису.
13. Який критерій альтернативного оптимуму?
14. Яка задача лінійного програмування називається виродженою?
15. Ідея ε -методу усунення зациклення.

ВПРАВИ

Систему обмежень в задачах 4.1 – 4.3 методом штучного базису привести до одиничного базису:

$$\begin{aligned} 3.1. \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ & x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -1, \\ & -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad & 7x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 21, \\ & x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 11, \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \quad & -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ & 3x_1 + x_3 - x_4 = -3. \end{aligned}$$

Задачі 3.4 – 3.24 розв'язати симплексним методом в області невід'ємних значень ($x_j \geq 0$):

$$\begin{aligned} 3.4. \quad & z = 40x_1 + 20x_3 \rightarrow \max, \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ & x_3 + x_4 + x_6 = 1, \\ & 7x_1 - 12x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.5. \quad & z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \min, \\ & x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ & 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ & x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.6. \quad & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{aligned}$$

$$3.7. \quad z = 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 13,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10,$$

$$x_1 \leq \frac{5}{2}.$$

3.8. $z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 80,$$

$$3x_2 + 3x_3 - 1,5x_4 \geq 36.$$

3.9. $z = -x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6,$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4.$$

3.10. $z = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5.$$

3.11. $z = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 4x_5 \rightarrow \min,$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 1.$$

3.12. $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \leq 1,$$

$$x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1.$$

3.13. $z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$x_1 - x_2 \geq -2,$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15,$$

$$x_2 \leq 2,5,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 - x_2 \geq -2.$$

3.14. $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 2.$$

3.15. $z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$-x_4 - 2x_6 = 5,$$

$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3,$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5.$$

3.16. $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_4 + 6x_5 = 9,$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6.$$

3.17. $z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6.$$

3.18. $z = x_4 - x_5 \rightarrow \max,$

$$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0,$$

$$2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0,$$

$$x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

3.19. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7.$$

3.20. $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1.$$

3.21. $z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \min,$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3,$$

$$x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$3x_2 - x_4 + x_5 \leq 5,$$

$$x_2 + x_5 \geq 3.$$

3.22. $z = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9.$$

3.23. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10,$$

$$2x_1 + x_2 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6.$$

3.24. $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9,$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8,$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7.$$

3.25. Механічний завод при виготовленні двох типів деталей використовує токарне, фрезерне і зварювальне обладнання. При цьому обробку кожної деталі можна вести двома різними технологічними способами. Необхідні вихідні дані наведені у таблиці.

Обладнання	Деталі				Корисний фонд часу, станко–год
	1		2		
	Технологічні способи				
	1	2	1	2	
Фрезерне	2	2	3	0	20
Токарне	3	1	1	2	37
Зварювальне	0	1	1	4	30
Прибуток, умов. грош. од.	11	6	9	6	

Скласти оптимальний план завантаження обладнання, який забезпечував би заводу максимальний прибуток.

3.26. З двох сортів бензину утворюють для певних потреб дві суміші: А і В. Суміш А містить 60% бензину 1-го сорту і 40% 2-го сорту; суміш В містить 80% бензину 1-го сорту і 20% 2-го сорту. 1 кг суміші А коштує 2 грн., 1 кг суміші В – 2 грн. 40 коп. Бензину 1-го сорту є в наявності 50 т і 2-го сорту 30 т. Скільки треба виготовити окремо суміші А і В, щоб прибуток від реалізації був максимальним?

3.27. Для відгодівлі групи тварин використовують чотири види кормів: V_1, V_2, V_3, V_4 . У таблиці показано кількість умовних вагових одиниць поживних речовин A_1, A_2, A_3 в 1 кг кожного виду кормів, добову потребу кожної групи тварин у поживних речовинах A_1, A_2, A_3 (в умовних вагових одиницях) і вартість 1 кг кормів (в умовних грошових одиницях).

Поживні речовини	Види кормів				Добова потреба в поживних речовинах
	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	1	2	2	1	64
A_2	0	3	1	1	39
A_3	2	1	0	3	35
Вартість 1 кг кормів	11	6	9	6	

Визначити, скільки треба купувати на добу кожного виду корму V_1, V_2, V_3, V_4 , щоб задовольнити потребу в поживних речовинах і щоб витрати на корми були мінімальними?

3.28. На підприємстві є три види основного устаткування A_1, A_2, A_3 , на якому можна виготовляти вироби чотирьох видів: V_1, V_2, V_3, V_4 . Збут цих виробів необмежений, підприємство само планує асортимент і величину випуску продукції, сировину також можна придбати в потрібній кількості (вона не обмежує виробництво). Можливості виробництва лімітує лише фонд часу використання основного устаткування, який не може бути перевищений для кожного його виду. Відомо фонд часу використання кожного виду устаткування (в годинах), потребу в часі його використання для кожного виробу і величину прибутку (в грн.), яку одержує підприємство за одиницю кожного виробу. Ці дані розміщено в таблиці:

Назва устаткування	Витрати часу на одиницю виробу				Місячний фонд часу
	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	1	0	6	3	120
A_2	2	3	2	2	230
A_3	2	3	0	1	220
Прибуток за одиницю продукції	45	50	20	60	

Визначити, скільки треба випускати щомісяця виробів кожного виду, щоб мати максимальний прибуток.

3.29. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох видів V_1, V_2, V_3, V_4 . Для випуску цієї продукції потрібна сировина чотирьох видів: A_1, A_2, A_3, A_4 , яку завод може щомісяця одержувати в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, яка потрібна для виготовлення кожного виду асортименту продукції, ціна кожного виду асортименту продукції, а також щомісячне надходження сировини для виготовлення продукції подано в таблиці:

Види сировини	Щомісячне надходження сировини	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B_1	B_1	B_2	B_3
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одного виробу		8	10	12	18

Визначити, який асортимент продукції і в якій кількості повинен випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

3.30. Для нормального проходження технологічного процесу на одному з цехів хімічного заводу потрібні хімічні речовини, місячна норма яких повинна бути не менша, відповідно, 48, 60 і 80 вагових одиниць. Ці речовини містяться в сумішах B_1 , B_2 , B_3 . Вміст кожної з речовин A_1 , A_2 , A_3 в кожній із сумішей B_1 , B_2 , B_3 , а також ціну (в грн.) одного літру суміші подано в таблиці:

Види хімічних речовин	Мінімальна потреба	Вміст хімічних речовин в сумішах у вагових одиницях(1 л суміші)		
		B_1	B_2	B_3
A_1	48	1	0	2
A_2	60	2	3	0
A_3	80	0	2	4
Ціна суміші		2	3	4

Яку кількість треба щомісяця купувати суміші B_1 , B_2 , B_3 , щоб задовольнити потребу цеху хімічного заводу в хімічних речовинах A_1 , A_2 , A_3 і щоб витрати на ці закупки були мінімальними?

3.31. Торгівельна фірма для продажу товарів трьох видів використовує ресурси: час і площа торговельних залів. Витрати ресурсів на продаж однієї партії товарів кожного виду подано в таблиці:

Ресурси	Вид товару			Об'єм ресурсів
	1	2	3	
Час, люд.-год.	0,5	0,7	0,6	370
Площа, м ²	0,1	0,3	0,2	90

Прибуток, який одержується від реалізації однієї партії товарів 1-го виду – 5 у.г.о., 2-го виду – 8 у.г.о., 3-го виду – 6 у.г.о. Визначити оптимальну структуру товарообігу, яка забезпечувала б фірмі максимальний прибуток.

3.32. Фірма випускає чотири вироби, які користуються попитом, причому місячна програма випуску складає 10 виробів типу 1 та 3, 200 виробів типу 2 і 120 виробів типу 4. Норми витрат сировини на одиницю різних типів виробів наведено в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат на один виріб				Запаси сировини
	1	2	3	4	
1	5	1	0	2	1000
2	4	2	2	1	600
3	1	0	2	1	150

Прибуток від реалізації виробів типу 1 дорівнює 6 у.г.о., виробів 2 типу – 2 у.г.о., виробів типу 3 – 2,5 у.г.о. і виробів типу 4 – 4 у.г.о. Визначити, чи є місячна програма випуску виробів оптимальною, і якщо ні, то визначити оптимальну місячну програму і додатковий прибуток, який фірма може при цьому отримати.

3.33. Металургійний завод із металів A_1 , A_2 , A_3 може випускати сплави B_1 , B_2 , B_3 . Протягом планового періоду завод повинен освоїти не менше 640 т металу A_1 і 800 т металу A_2 , при цьому металу A_3 може бути витрачено не більше 860 т. Визначити мінімальні витрати, якщо дані про норми витрат і собівартість подані в таблиці:

Вид металів	Технологічні норми витрат на умов. од. сплаву			Наявність метала у заводу
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	1,0	4,3	2,6	640
A ₂	5,0	1,5	3,0	800
A ₃	3,0	3,9	4,3	860
Собівартість 1 т сплаву	18	15	15	

3.34. Тканина трьох артикулів виготовляється на ткацьких станках двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовуються пряжа і барвники. В таблиці вказані потужності станків в тисячах станко-годин, ресурси пряжі і барвників в 1000 кг, продуктивність станків в метрах за годину, норми витрат пряжі та барвників в кг на 1000 м і ціна 1м тканини:

Вид ресурсів	Об'єм ресурсів	Норми витрат		
		1	2	3
Станки 1-го типу	30	20	10	25
Станки 2-го типу	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Барвники	1	10	5	8
Ціна, у.г.о.		15	15	20

По цим вихідним даним розв'язати наступні задачі:

- а) визначити оптимальний асортимент, який максимізує товарну продукцію підприємства;
- б) прийнявши умову, що кількість тканин трьох артикулів знаходиться у відношенні 2:1:3, визначити, яку максимальну кількість комплектів тканини може випускати підприємство;
- в) визначити оптимальний асортимент, який максимізує прибуток підприємства, якщо ціна 1 м тканини складає 8, 5 і 15 у.г.о. відповідно;
- г) розв'язати задачу пункту а) при умові, що станки 1-го типу тканину першого артикулу не виробляють.

РОЗДІЛ 4

ДВОЇСТІСТЬ І АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ

4.1. ВИЗНАЧЕННЯ ДВОЇСТОЇ (СПРЯЖЕНОЇ) ЗАДАЧІ

Кожній задачі лінійного програмування відповідає інша задача, яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до вихідної. Вихідну задачу лінійного програмування будемо називати *прямою*. *Двоїста задача* – це задача, яка формулюється за допомогою певних правил безпосередньо з прямої задачі. Теорія двоїстості виявилась корисною для проведення якісних досліджень задач лінійного програмування.

При викладанні теорії двоїстості часто розглядають формулювання двоїстої задачі в залежності від різних видів прямої задачі, які визначаються типами основних обмежень, знаками змінних (невід’ємні або без обмежень по знаку) і типом оптимізації (максимізація або мінімізація цільової функції). Така „прив’язка” двоїстої задачі до вихідної не завжди виправдана. Наведемо єдине формулювання двоїстої задачі, яке можна застосовувати для всіх видів прямої задачі. В основу такого формулювання покладена перша стандартна форма прямої задачі. Нагадаємо, що задача лінійного програмування в першій стандартній формі записується так:

максимізувати або мінімізувати цільову функцію $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

В склад n змінних x_j входять також додаткові змінні.

Стандартна форма задачі лінійного програмування приводить до її канонічної форми, яка, в свою чергу, є основою початкової таблиці сим-

плексного методу. Тому, як буде показано в п. 4.2, розв'язок двоїстої задачі можна отримати безпосередньо з симплексної таблиці, яка відповідає розв'язку прямої задачі. Таким чином, визначивши двоїсту задачу на основі першої стандартної форми прямої задачі, після обчислень симплексного методу, автоматично отримується розв'язок двоїстої задачі.

Змінні і обмеження двоїстої задачі формуються шляхом симетричних структурних перетворень прямої задачі за наступними правилами.

1. Кожному з m обмежень прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі.
2. Кожній з n змінних прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі.
3. Коефіцієнти при якій-небудь змінній в обмеженнях прямої задачі стають коефіцієнтами обмеження двоїстої задачі, яке відповідає цій змінній, а права частина обмеження, яке формується, дорівнює коефіцієнту при цій змінній у виразі цільової функції. Тобто матриці коефіцієнтів при змінних прямої і двоїстої задач є транспонованими одна до одної.
4. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі рівні правим частинам обмежень прямої задачі.

Графічно ці правила подані у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Змінні двоїстої задачі	Змінні прямої задачі						
	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	
	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
			j-е обмеження двоїстої задачі				Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі

Правила, що визначають тип оптимізації і обмежень, а також знак змінних двоїстої задачі, приведені у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Цільова функція прямої задачі	Двоїста задача		
	Цільова функція	Тип обмежень	Змінні
Максимізація	Мінімізація	\geq	Без обмеження по знаку
Мінімізація	Максимізація	\leq	Без обмеження по знаку

Наступні приклади ілюструють правила побудови двоїстої задачі.

Приклад 4.1.

Пряма задача	Пряма задача в стандартній формі	Двоїсті змінні
Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8,$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$	Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$	y_1 y_2

*Двоїста задача*Мінімізувати $w = 10y_1 + 8y_2$

при обмеженнях

$$y_1 + 2y_2 \geq 5,$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12,$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4,$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + 0y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 - \text{без обмеження по знаку} \end{array} \right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 - \text{без обмеження по знаку}).$$

Приклад 4.2.

Пряма задача	Пряма задача в стандартній формі	Двоїсті змінні
Мінімізувати $z = 15x_1 + 12x_2,$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 \geq 3,$ $2x_1 - 4x_2 \leq 5,$ $x_1, x_2 \geq 0.$	Мінімізувати $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3,$ $2x_1 - 4x_2 + x_4 = 5,$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$	 y_1 y_2

*Двоїста задача*Максимізувати $w = 3y_1 + 5y_2$

при обмеженнях

$$y_1 + 2y_2 \leq 15,$$

$$2y_1 - 4y_2 \leq 12,$$

$$-y_1 \leq 0 \text{ (або } y_1 \geq 0),$$

$$y_2 \leq 0,$$

 $y_1, y_2 - \text{без обмеження по знаку (зайва умова).}$

Приклад 4.3.

Пряма задача	Пряма задача в стандартній формі	Двоїсті змінні
Максимізувати $z = 5x_1 + 6x_2$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 = 5,$ $-x_1 + 5x_2 \geq 3,$ $4x_1 + 7x_2 \leq 8,$ x_1 – без обмеження по знаку, $x_2 \geq 0.$	Підстановка $x_1 = x_1'' - x_1'$ приводить до задачі: Максимізувати $z = 5x_1'' - 5x_1' + 6x_2$ при обмеженнях $x_1'' - x_1' + 2x_2 = 5,$ $-x_1'' + x_1' + 5x_2 - x_3 = 3,$ $4x_1'' - 4x_1' + 7x_2 + x_4 = 8,$ $x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \geq 0.$	 y_1 y_2 y_3

*Двоїста задача*Мінімізувати $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

при обмеженнях

$$\left. \begin{array}{l} y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5,$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6,$$

$$-y_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \leq 0,$$

$$y_3 \geq 0,$$

 y_1 – без обмеження по знаку,

 y_2, y_3 – без обмеження по знаку (зайва умова).

Перше і друге обмеження двоїстої задачі замінені однією умовою у вигляді рівності. Тут діє наступне правило: змінній без обмеження по знаку прямої задачі відповідає обмеження у вигляді рівності двоїстої і, навпаки, обмеженню у вигляді рівності прямої задачі відповідає вільна змінна двоїстої задачі.

На закінчення наведемо правила побудови двоїстих задач (таблиця 4.3), які часто приводяться в літературі по дослідженню операцій і лі-

нійному програмуванню. Можна показати (пропонуємо читачам зробити це самостійно), що ці правила є частинним випадком загальних правил, які приведені у табл. 4.2.

Таблиця 4.3

Задача максимізації		Задача мінімізації	
<u>Обмеження</u>			<u>Змінні</u>
\geq	\Leftrightarrow		≤ 0
\leq	\Leftrightarrow		≥ 0
$=$	\Leftrightarrow	Без обмеження по знаку	
<u>Змінні</u>			<u>Обмеження</u>
≥ 0	\Leftrightarrow		\geq
≤ 0	\Leftrightarrow		\leq
Без обмеження по знаку	\Leftrightarrow		$=$

4.2. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ОПТИМАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПРЯМОЇ І ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧ

Пряма і двоїста задачі тісно взаємозв'язані, так що оптимальний розв'язок однієї задачі можна отримати безпосередньо (без додаткових обчислень) з симплексної таблиці, яка представляє оптимальний розв'язок іншої. Це твердження ґрунтується на наступному співвідношенні.

Співвідношення 1. Для будь-якої симплексної ітерації прямої або двоїстої задачі:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Коефіцієнт при } j\text{-й} \\ \text{змінній в } z\text{-му рядку} \\ \text{однієї задачі} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Різниця між лівою і правою} \\ \text{частинами } j\text{-го обмеження} \\ \text{іншої задачі} \end{array} \right).$$

Це співвідношення симетричне відносно прямої і двоїстої задач. Його можна використовувати для визначення оптимального розв'язку однієї задачі безпосередньо з симплексної таблиці, яка містить оптимальний розв'язок іншої. Дана обставина обумовлює можливість прове-

дення обчислень саме по тій задачі (прямій або двоїстій), яка потребує менших обчислювальних ресурсів. Наприклад, якщо пряма задача має 100 змінних і 500 обмежень, то краще віддати перевагу знаходженню оптимального розв'язку двоїстої задачі, так як вона буде містити тільки 100 обмежень, тому що трудомісткість обчислень задачі лінійного програмування у більшій мірі залежить від кількості обмежень, ніж кількості змінних.

Приклад 4.4.

Розглянемо пряму і двоїсту задачі з прикладу 4.1, які для зручності зведені у наступну таблицю:

Пряма задача	Двоїста задача
Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$, $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.	Мінімізувати $w = 10y_1 + 8y_2$ при обмеженнях $y_1 + 2y_2 \geq 5$, $2y_1 - y_2 \geq 12$, $y_1 + 3y_2 \geq 4$, $y_1 \geq 0$, y_2 – без обмеження по знаку.

В наступній таблиці представлені симплексні ітерації розв'язування прямої задачі.

№ ітер.	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	u	Δ
I	0	z	0	-5	-12	-4	0	0	-
	1	x_4	10	1	2	1	1	0	10
	2	u	8	2	-1	$\boxed{3}$	0	1	8/3
		f	8	2	-1	3	0	0	-
II	0	z	32/3	-7/3	-40/3	0	0	4/3	-
	1	x_4	22/3	1/3	$\boxed{7/3}$	0	1	-1/3	22/7
	2	x_3	8/3	2/3	-1/3	1	0	1/3	∞
		f	0	0	0	0	0	-1	-
III	0	z	368/7	-3/7	0	0	40/7	-4/7	-
	1	x_2	22/7	1/7	1	0	3/7	-1/7	22
	2	x_3	26/7	$\boxed{5/7}$	0	1	1/7	2/7	26/5
IV	0	z	274/5	0	0	3/5	29/5	-2/5	
	1	x_2	12/5	0	1	-1/5	2/5	-1/5	
	2	x_1	26/5	1	0	7/5	1/5	2/5	

Застосовуючи на четвертій ітерації співвідношення 1 для змінних x_3 і x_4 , отримуємо наступні дані:

Змінні прямої задачі	x_3	x_4
Коефіцієнти в z -рядку IV ітерації	3/5	29/5
Відповідні обмеження двоїстої задачі	$y_1 + 3y_2 \geq 4$	$y_1 \geq 0$
Рівняння, які отримані на основі співвідношення 1	$y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5$	$y_1 - 0 = 29/5$

Розв'язками отриманих рівнянь

$$y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5,$$

$$y_1 - 0 = 29/5$$

будуть $y_1 = 29/5$ і $y_2 = -2/5$.

Якби розв'язок двоїстої задачі шукався незалежно від прямої задачі, то був би отриманий той самий розв'язок. Аналогічно, внаслідок симетричності співвідношення 1, з розв'язку двоїстої задачі та її симплексної таблиці отримуємо оптимальний розв'язок прямої задачі: $x_1 = 26/5$, $x_2 = 12/5$ і $x_3 = 0$.

Для визначення значень змінних двоїстої задачі можна використувати рівняння, які асоційовані з будь-якими двома змінними з множини x_1, x_2, x_3, x_4, u . Наприклад, співвідношення 1 дає наступні рівняння, які асоційовані зі змінними x_1 і x_3 :

$$y_1 + 2y_2 - 5 = 0,$$

$$y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5.$$

Наведемо ще одне співвідношення між прямою і двоїстою задачами, яке разом із співвідношенням 1 пропонує цікаву економічну інтерпретацію задачі лінійного програмування.

Співвідношення 2. Для будь-якої пари допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач

$$\left(\begin{array}{l} \text{Значення цільової функції} \\ \text{в задачі максимізації} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \text{Значення цільової функції} \\ \text{в задачі мінімізації} \end{array} \right).$$

В точці оптимуму це співвідношення приймає вид строгої рівності.

З співвідношення 2 випливає, що для всіх допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач значення цільової функції задачі мінімізації завжди будуть верхньою границею значень цільової функції задачі максимізації. Таким чином, ітераційне розв'язування задачі максимізації веде до зростання цільової функції, а ітераційне розв'язування задачі мінімізації – до її спадання. У підсумку, при успішному завершенні процесів обчислення прямої і двоїстої задач приходимо до точки „рівноваги”, де значення цільових функцій задач максимізації і мінімізації стають рівними.

4.3. ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДВОЇСТОСТІ

Задачу лінійного програмування можна розглядати як модель розподілу обмежених ресурсів, в якій цільова функція, що відображає прибуток або дохід від виробничої діяльності, підлягає максимізації. Якщо розглядати задачу лінійного програмування з цієї точки зору, то відповідна їй двоїста задача набуває цікавої економічної інтерпретації.

Для того щоб формалізувати питання економічної інтерпретації двоїстості, наведемо ще раз загальне представлення прямої і двоїстої задач, причому пряма задача буде відігравати роль моделі розподілу ресурсів.

Пряма задача	Двоїста задача
Максимізувати $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при обмеженнях $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$ $x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$	Мінімізувати $w = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ при обмеженнях $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$ $y_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$

Виходячи з моделі розподілення ресурсів, пряма задача відображає n видів економічної (виробничої) діяльності і можливості отримання m ресурсів. В прямої задачі коефіцієнт c_j являє собою прибуток на одиницю продукції j -го виду економічної діяльності. Причому на одиницю продукції цього виду діяльності витрачається a_{ij} одиниць ресурсу i , максимальні запаси якого обмежені величиною b_i .

Економічна інтерпретація змінних двоїстої задачі.

Співвідношення 2 з параграфу 4.2 встановлює, що для будь-якої пари розв'язків прямої і двоїстої задач значення (скінченні) їх цільових функцій задовольняють нерівність

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w.$$

Рівність тут досягається тільки тоді, коли розв'язки прямої і двоїстої задач оптимальні.

Розглянемо спочатку випадок оптимуму, тобто коли $z = w$. Виходячи з уявлення прямої задачі як моделі розподілу ресурсів, можна вважати, що величина z відповідає величині прибутку (в гривнях). Оскільки b_i – загальна доступна кількість ресурсу i , рівність $z = w$ можна записати наступним чином:

$$\text{Прибуток (грн.)} = \sum_i (\text{кількість ресурсу } i) \times (\text{прибуток (грн.) на одиницю ресурсу } i).$$

Це означає, що змінна y_i двоїстої задачі повинна являти собою *вартість одиниці ресурсу i* . В літературі по математичному програмуванню і дослідженню операцій змінні y_i двоїстої задачі часто називають *двоїстими цінами*. Крім того, іноді їх іменують *тіньовими цінами* і *симплексними мультиплікаторами*.

Аналогічно для будь-якої пари допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач нерівність $z < w$ можна інтерпретувати наступним чином.

$$\text{Прибуток} < \text{Загальна вартість ресурсів.}$$

Це співвідношення показує, що до тих пір, доки сумарний прибуток від всіх видів діяльності менше сумарної вартості всіх ресурсів, що використовуються, розв'язок як прямої, так і двоїстої задачі не може бути оптимальним. Оптимум (максимальний прибуток) може бути досягнутий тільки тоді, коли всі ресурси, які споживаються, використані повністю. Якщо модель лінійного програмування розглядати більш загально як модель деякої системи, яка має „вхід” і „вихід”, то ресурси характеризують „вхід” цієї системи, а прибуток – її „вихід”. Система буде знаходитись в нестабільному (неоптимальному) стані, доки „вхід” перебі-

льшує „вихід”. Стійкий стан системи характеризується рівністю „входу” і „виходу”.

Економічна інтерпретація обмежень двоїстої задачі.

Для інтерпретації обмежень двоїстої задачі використаємо співвідношення 1 з параграфу 4.2. У відповідності з цим співвідношенням на будь-якій ітерації розв’язування прямої задачі справедлива рівність

$$\text{Коефіцієнт при } x_j \text{ в } z\text{-рядку} = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j.$$

Для інтерпретації цієї рівності скористаємось аналізом розмірностей величин, що входять до нього. Коефіцієнт c_j – прибуток (в гривнях) на одиницю „виходу” j -го виду виробничої (економічної) діяльності. Отже, для узгодження розмірностей величина $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ також повинна мати розмірність гривня/одиниця. Далі, оскільки c_j являє собою прибуток, сума $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$, яка входить у рівність з протилежним знаком, повинна відповідати витратам. В той же час коефіцієнт a_{ij} дорівнює кількості ресурсу i , який використовується на підтримку j -го виду діяльності; змінна y_i представляє *нав’язані витрати (нав’язана вартість)* одиниці ресурсу i . Таким чином, величина $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ відповідає сумарній вартості всіх ресурсів, які необхідні для виробництва одиниці продукції j -го виду діяльності.

Умова оптимальності симплексного методу в задачі максимізації свідчить про те, що j -й вид діяльності (змінна x_j), який не представлений в поточному базисному розв’язку, можна ввести в базис для збільшення прибутку тільки тоді, коли коефіцієнт при x_j в z -рядку (рівний $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j$) буде невід’ємним. В рамках економічної інтерпретації, яка пропонується вище, це означає, що j -й вид діяльності повинен бути

представлений в базисному розв'язку, якщо виконується наступна нерівність:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Вартість всіх ресурсів, які використо-} \\ \text{вуються для виробництва одиниці} \\ \text{продукції } j\text{-го виду діяльності} \end{array} \right) < \left(\begin{array}{l} \text{Прибуток від реалізації} \\ \text{одиниці продукції} \\ \text{} j\text{-го виду діяльності} \end{array} \right).$$

Таким чином, умова оптимальності (в задачі максимізації) свідчить про те, що діяльність будь-якого виду варто нарощувати до тих пір, доки прибуток від неї перевищує можливі витрати (вартість ресурсів), які забезпечують її підтримку.

Наведемо стандартні визначення, які використовуються в літературі по лінійному програмуванню. Введемо позначення $z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$. Величина z_j являє собою сумарну вартість ресурсів, які використовуються на виробництво одиниці продукції j -го виду діяльності. Величина $z_j - c_j$ дорівнює коефіцієнту при x_j в z -рядку симплексної таблиці і часто називають *приведеною вартістю (приведеними витратами) j -го виду діяльності*. В деяких випадках різниці $z_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j$ використовуються безпосередньо для обчислення коефіцієнтів в z -рядку симплексної таблиці (замість метода Жордана-Гаусса). Такі обчислення використовуються в *модифікованому симплексному методі*.

Приклад 4.5.

Фабрика іграшок збирає три види моделей: літаків, вантажівок і легкових автомобілів; при зборці кожного виду використовується три види операцій. Щоденний фонд робочого часу на кожну операцію обмежений граничними величинами 430, 460 і 420 хвилин. Прибуток на одну іграшку кожного виду складає відповідно 3 грн., 2 грн. і 5 грн. На кожній з трьох операцій для зборки моделі літака треба 1, 3 і 1 хвилини робочого часу. Відповідний час для зборки моделей вантажівок і легкових

автомобілів складає (2, 0, 4) і (1, 2, 0) хвилин (нуль вказує на те, що відповідна операція не виконується).

Позначимо через x_1 , x_2 і x_3 кількість збираних щоденно моделей трьох видів, отримуємо пряму і двоїсту задачі лінійного програмування.

Пряма задача	Двоїста задача
Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$, (операція 1) $3x_1 + 2x_3 \leq 460$, (операція 2) $x_1 + 4x_2 \leq 420$, (операція 3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.	Мінімізувати $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$ при обмеженнях $y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$, $2y_1 + 4y_3 \geq 2$, $y_1 + 2y_2 \geq 5$, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
Оптимальний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$, $z = 1350$	Оптимальний розв'язок $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$

Оптимальний розв'язок передбачає виробництво моделей вантажівок ($x_2 = 100$) і легкових автомобілів ($x_3 = 230$) і вимагає відмову від виробництва літаків ($x_1 = 0$). Це означає, що у теперішній економічній ситуації виробництво моделей літаків не рентабельно. Разом з тим ринок іграшок вимагає випуску цього виду моделей. Як зробити їх виробництво прибутковим? У відповідності з економічною інтерпретацією задач лінійного програмування, яка наведена в цьому розділі, виробництво моделей літаків буде вигідним тільки тоді, коли буде виконуватись нерівність $z_1 < c_1$. Для виконання цієї нерівності треба або збільшити коефіцієнт c_1 (прибуток від продажу однієї моделі літака), наприклад шляхом збільшення ціни моделі, або знизити вартість ресурсів z_1 ($z_1 = y_1 + 3y_2 + y_3$), необхідних для виробництва цих іграшок. Збільшення ціни моделі не бажане, так як знизить їх конкурентноздатність на ринку іграшок. Зменшення коефіцієнту z_1 більш привабливе, оскільки для

цього треба просто скоротити час виконання операцій, необхідних для виробництва моделей літаків. Позначимо через r_1 , r_2 і r_3 величини, які пропорційні часткам скорочення часу відповідних операцій. Ці величини знаходимо з умови, щоб нова вартість виробничих операцій не перебільшувала прибутку від однієї моделі літака. Ця умова записується наступним чином:

$$1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 < 3.$$

Після підстановки значень $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ і $y_3 = 0$ отримуємо наступну нерівність:

$$r_1 + 6r_2 > 4.$$

Таким чином, будь-які значення величин r_1 і r_2 , від 0 до 1, які задовольняють нерівність $r_1 + 6r_2 > 4$, приведуть до прибутковості виробництва моделей літаків. Наприклад, для значень $r_1 = 0,6$ і $r_2 = 0,6$ отримуємо $z_1 - c_1 = 4 - 0,6 - 6 \cdot 0,6 = -0,2$. Разом з тим відмітимо, що скорочення часу виконання другої операції в 6 разів ефективніше скорочення часу виконання першої операції.

4.4. ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

У цьому параграфі розглянемо симплексний алгоритм, який заснований на співвідношеннях між прямою і двоїстою задачами. Цей алгоритм ефективно розв'язує певний клас задач лінійного програмування. Крім того, він дозволяє довести до кінця аналіз чутливості моделі лінійного програмування.

В двоїстому симплексному методі розв'язування задачі лінійного програмування починається з недопустимого, але кращого, ніж оптимальний, розв'язку. Послідовні ітерації цього методу наближають розв'язок до області допустимих розв'язків без порушення оптимальності (точніше, „супероптимальності”) проміжних розв'язків. Коли буде досягнута область допустимих розв'язків, процес обчислень завершується, так як останній розв'язок буде оптимальним. Двоїстий симплексний ме-

тод суттєво відрізняється від звичайного (прямого) симплексного методу, який розглянутий в розділі 3, де початковий розв'язок завжди допустимий, але не оптимальний, і проміжні розв'язки ніколи не виходять з множини допустимих розв'язків.

В двоїстому симплексному методі початкова симплексна таблиця обов'язково повинна мати в базисному розв'язку недопустиму (тобто від'ємну) змінну. Для реалізації двоїстого симплексного методу розроблені наступні дві умови, виконання яких гарантує оптимальність послідовних проміжних розв'язків та наближення їх до множини допустимих розв'язків.

Двоїста умова допустимості. В якості змінної x_i , що виводиться з базису, обирається базисна змінна, яка має найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення. Якщо таких змінних декілька, то вибір з них довільний. Якщо всі базисні змінні невід'ємні, процес обчислень завершується.

Двоїста умова оптимальності. Змінна, що вводиться у базис, визначається як змінна, на якій досягається наступний мінімум:

$$\min_{\text{небазисні } x_j} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\alpha_{ij}} \right| \right\}, \quad \alpha_{ij} < 0,$$

де α_{ij} – коефіцієнт із симплексної таблиці, який міститься на перетині ключового рядка (що відповідає змінній x_i , яка виводиться з базису) і стовпця, який відповідає змінній x_j . При наявності декількох альтернативних змінних, вибір з них робиться довільно.

Приклад 4.6.

Дана задача лінійного програмування.

$$\text{Мінімізувати } z = 3x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Початкова симплексна таблиця має наступний вид:

№ ітерації	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	z	0	-3	-2	0	0	0
I	1	x_3	-3	-3	-1	1	0	0
	2	x_4	-6	-4	-3	0	1	0
	3	x_5	3	1	1	0	0	1

Перед тим як були введені додаткові змінні x_3 і x_4 , відповідні нерівності (перша і друга) були помножені на -1 ; в наслідок чого праві частини рівностей 1 і 2 безпосередньо вказують на базисні змінні, які є недопустимими ($x_3 = -3$, $x_4 = -6$). Цей підхід завжди використовується при реалізації двоїстого симплексного методу. Оскільки $z_j - c_j \leq 0$ для всіх $j = 1, 2, \dots, 5$ (нульовий рядок симплексної таблиці), то початковий базисний розв'язок є оптимальним (але недопустимим). Таким чином, наведена таблиця задовольняє вимогам початкової таблиці двоїстого симплексного методу, а саме – оптимальності і недопустимості.

Двоїста умова допустимості вказує на змінну x_4 ($x_4 = -6$) як на змінну, що виводиться з базису. Тепер застосуємо двоїсту умову оптимальності для визначення змінної, яка вводиться в базис. Для цього використаємо наступну таблицю:

Змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z -рядок ($z_j - c_j$)	-3	-2	0	0	0
x_4 -рядок, α_{4j}	-4	-3	0	1	0
Відношення $\left \frac{z_j - c_j}{\alpha_{4j}} \right $	3/4	2/3	-	-	-

Наведені відношення показують, що змінною, яка вводиться в базис, буде x_2 . Відмітимо, що змінні x_j будуть кандидатами на введення в базис тільки тоді, коли коефіцієнт α_{4j} буде строго від'ємним.

Наступна таблиця отримана за допомогою відомих операцій, які застосовуються в прямому симплексному методі.

№ ітерації	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
II	0	z	4	-1/3	0	0	-2/3	0
	1	x_3	-1	-5/3	0	1	-1/3	0
	2	x_2	2	4/3	1	0	-1/3	0
	3	x_5	1	-1/3	0	0	1/3	1
Відношення				1/5	-	-	2	-

Остання таблиця показує, що з базису виключається змінна x_3 і вводиться x_1 . В результаті отримуємо наступну симплексну таблицю.

№ ітерації	№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
III	0	z	21/5	0	0	-1/5	-3/5	0
	1	x_1	3/5	1	0	-3/5	1/5	0
	2	x_2	6/5	0	1	4/5	-3/5	0
	3	x_5	6/5	0	0	-1/5	2/5	1

Розв'язок, який представлений в останній таблиці, допустимий (і оптимальний), тому обчислення завершуються. Цей розв'язок має вид $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$ і $z = 21/5$.

4.5. МАТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

При аналізі чутливості розв'язку задачі лінійного програмування принциповим є питання: як зміна коефіцієнтів цільової функції і обмежень впливає на оптимальність і допустимість даного оптимального

розв'язку? Якщо ці зміни приводять до нового розв'язку, то як знайти цей новий оптимальний розв'язок? Звичайно, завжди можна дати відповідь на це питання шляхом розв'язку задачі заново. Але для типової практичної задачі, яка має тисячі змінних і обмежень, такий шлях буде не ефективним. Тому необхідно з'ясувати, як обчислення у симплексному методі залежать від зміни коефіцієнтів вихідної задачі. Зокрема, слід з'ясувати, як від цих змін залежать оптимальність і допустимість розв'язку, який представлений у вигляді симплексної таблиці.

Найбільш компактний спосіб запису обчислень, які виконуються при симплексному методі, заключається у використанні матриць.

Канонічна задача лінійного програмування за допомогою матричної форми запису може бути представлена наступним чином.

$$\text{Максимізувати (або мінімізувати)} \quad z = \vec{C}\vec{X}$$

при обмеженнях

$$(\vec{A}, \vec{I})\vec{X} = \vec{b},$$

$$\vec{X} \geq \vec{0},$$

де \vec{I} – одинична матриця розміру $m \times m$, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,
 $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ і

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-m} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь $(\vec{A}, \vec{I})\vec{X} = \vec{b}$ з m рівняннями і n змінними може бути представлена в наступній векторній формі

$$\sum_{j=1}^n \vec{P}_j x_j = \vec{b},$$

де вектор \vec{P}_j – j -й стовпчик матриці (\vec{A}, \vec{I}) . Підмножина з векторів \vec{P}_j формує базис \vec{B} тоді і тільки тоді, коли ці вектори лінійно незалежні. Для цього необхідно (і достатньо), щоб визначник матриці \vec{B} , який склада-

ється з даних m векторів, був відмінний від нуля, тобто $\det \vec{B} \neq 0$. В цьому випадку матриця \vec{B} називається невинродженою.

Для системи m рівнянь $(\vec{A}, \vec{I})\vec{X} = \vec{b}$ з n змінними ($m < n$) позначимо через \vec{X}_B вектор з m елементів, які є підмножиною n елементів вектора \vec{X} . Визначимо матрицю \vec{B} розміром $m \times m$, яка складається з стовпчиків матриці (\vec{A}, \vec{I}) , які відповідають елементам вектора \vec{X}_B . Якщо надати $n - m$ елементам, що залишились, нульових значень, то система $(\vec{A}, \vec{I})\vec{X} = \vec{b}$ буде зведена до $\vec{B}\vec{X}_B = \vec{b}$.

Якщо матриця \vec{B} складається з базисних векторів, тоді маємо єдиний розв'язок останньої системи:

$$\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b},$$

де \vec{B}^{-1} – матриця, обернена до матриці \vec{B} . В цьому випадку \vec{X}_B є базисним розв'язком системи $(\vec{A}, \vec{I})\vec{X} = \vec{b}$. Якщо виконується нерівність $\vec{B}^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$, тоді \vec{X}_B буде допустимим розв'язком.

Скористаємось узагальненим матричним представленням симплексних таблиць.

Базис	ОП	$\dots x_j \dots$	Початковий базис \vec{X}_B
z		$z_j - c_j$	
\vec{X}_B	$\vec{B}^{-1}\vec{b}$	$\vec{B}^{-1}\vec{P}_j$	\vec{B}^{-1}

Ця таблиця має той же самий формат, як і звичайна симплексна таблиця. Тут вектор \vec{X}_B містить базисні змінні поточного розв'язку. Обернена матриця \vec{B}^{-1} розміщується під початковими базисними змінними. Елементи оберненої матриці будуть змінюватись при переході від однієї ітерації до іншої як функції вектора \vec{X}_B .

Обчислення елементів системи обмежень, які відповідають новій ітерації, виконуються безпосередньо. Наприклад, стовпці \vec{P}_j і \vec{b} вихідної

задачі (I ітерації) перетворюються в стовпці $\vec{B}^{-1}\vec{P}_j$ і $\vec{B}^{-1}\vec{b}$ наступної ітерації. Залишилось розглянути обчислення елементів z -рядка. Позначимо через $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ m -мірний вектор змінних двоїстої задачі. В параграфі 5.2 було показано, що значення змінних двоїстої задачі можна знайти як розв'язок системи лінійних рівнянь. В компактній матричній формі це можна записати так: $\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1}$, де \vec{C}_B – m -мірний вектор, що складається з коефіцієнтів c_j вихідної цільової функції, які відповідають базисному вектору \vec{X}_B . Таким чином, різниці $z_j - c_j$ можна обчислити наступним чином:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j = \vec{Y} \vec{P}_j - c_j.$$

Останній вираз показує, що величина $z_j - c_j$ дорівнює різниці між лівою і правою частинами обмеження двоїстої задачі (як і показано в параграфі 5.3).

Таким чином, всі елементи поточної ітерації обчислюються на основі поточної оберненої матриці \vec{B}^{-1} і вихідних даних задачі.

Приклад 4.7.

Використаємо задачу з прикладу 5.4 для демонстрації матричних обчислень. Пряма і двоїста задачі цього прикладу за допомогою матриць будуть записані наступним чином.

Пряма задача	Двоїста задача
Максимізувати $z = (5, 12, 4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ при обмеженнях $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix},$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$	Мінімізувати $w = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ при обмеженнях $(y_1, y_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \geq (5, 12, 4),$ $y_1 \geq 0,$ $y_2 \text{ – без обмеження по знаку.}$

Описані обчислення можна застосовувати на будь-якій ітерації. Продемонструємо їх на другій ітерації симплексного методу, основується на початковому розв'язку (перша ітерація), який наведений у прикладі 4.4. З цього розв'язку маємо

$$\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{C}_B = (0, 4).$$

Відмітимо, що порядок елементів у векторі \vec{C}_B повинен бути той же самий, що і в базисному векторі \vec{X}_B , тобто спочатку c_4 потім c_3 . Теж саме стосується порядку векторів-стовпців матриці \vec{B} , які відповідають базисним змінним II ітерації. В нашому прикладі базисному вектору $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$ відповідає матриця $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (елементи матриці \vec{B} завжди виписуються з вихідної матриці системи основних обмежень). Тоді

$$\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислюємо вектор змінних двоїстої задачі:

$$(y_1, y_2) = \vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1} = (0, 4) \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

Далі знаходимо коефіцієнти z -рядка.

$$z_1 - c_1 = \bar{Y}\bar{P}_1 - c_1 = \left(0, \frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 = -\frac{7}{3}.$$

Аналогічно обчислюються наступні різності: $z_2 - c_2 = -40/3$, $z_3 - c_3 = 0$, $z_4 - c_4 = 0$ і $z_5 - c_5 = 4/3$.

Коефіцієнти рівностей, що відповідають обмеженням, обчислюються за допомогою оберненої матриці \bar{B}^{-1} і векторів-стовпців \bar{P}_j і \bar{b} коефіцієнтів вихідних обмежень. Стовпчик правих частин обмежень на другій ітерації симплексного методу обчислюється наступним чином:

$$\bar{X}_B = \bar{B}^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Обчислення стовпців коефіцієнтів лівих частин обмежень покажемо на прикладі обчислення стовпця коефіцієнтів, що відповідають змінній x_1 :

$$\bar{B}^{-1}\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Стовпці коефіцієнтів, які відповідають змінним x_2 , x_3 , x_4 і u , обчислюються аналогічно.

Основний висновок, який випливає з прикладу 5.7, полягає в тому, що всі коефіцієнти симплексної таблиці на будь-якій ітерації можна обчислити всього лише на основі відповідної оберненої матриці \bar{B}^{-1} і вихідних даних задачі лінійного програмування. Таким чином, при аналізі чутливості оптимального розв'язку конкретної задачі лінійного програмування, для якого відома обернена матриця \bar{B}^{-1} , можна досліджувати ефект від зміни коефіцієнтів цільової функції і значення правих частин нерівностей системи обмежень за допомогою нових обчислень всіх різниць $z_j - c_j$ (коефіцієнтів z -рядка) і добутку $\bar{B}^{-1}\bar{b}$. Якщо результати цих

обчислень покажуть, що новий базисний розв'язок (тобто \vec{X}_B) залишається допустимим і оптимальним, обчислення аналізу чутливості закінчуються. У протилежному випадку необхідні додаткові обчислення, які повертають оптимальність і допустимість досліджуваному розв'язку.

4.6. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування визначається тими умовами, які найшли відображення в моделі на момент її формування. В реальному житті умови, які формують модель, не залишаються незмінними. У зв'язку з цим особливого значення набувають засоби, що дозволяють оцінити зміни в оптимальному розв'язку, які викликані змінами в параметрах вихідної моделі. Таким засобом є *аналіз чутливості*. Він пропонує ефективні обчислювальні методи, які дозволяють вивчати динамічну поведінку оптимального розв'язку.

Аналіз чутливості на елементарному рівні вже розглядався у параграфі 2.6. В цьому параграфі розглядаються методи аналізу чутливості, які засновані на теорії двоїстості.

Аналіз чутливості передбачає, що зміна параметрів моделі відбувається лінійно. Узагальнюючи, можна припустити, що параметри моделі змінюються згідно із наперед визначеним неперервним функціям. Сукупність методів, які відповідають цьому узагальненню, називається параметричним програмуванням, яке буде розглянуте в розділі 7.

Аналіз чутливості виконується вже після отримання оптимального розв'язку задачі лінійного програмування. Його мета – визначити, чи приведе зміна коефіцієнтів вихідної задачі до зміни отриманого оптимального розв'язку, і якщо так, то як ефективно знайти новий оптимальний розв'язок (якщо він існує).

У загальному випадку зміна коефіцієнтів вихідної задачі може привести до однієї з наступних чотирьох ситуацій:

1. Поточний базисний розв'язок залишається незмінним.

2. Поточний розв'язок стає недопустимим.
3. Поточний розв'язок стає неоптимальним.
4. Поточний розв'язок стає неоптимальним і недопустимим.

У другій ситуації можна використати двоїстий симплексний метод для поновлення допустимості розв'язку. В третій ситуації можна скористатися прямим симплексним методом для отримання нового оптимального розв'язку. В четвертій для отримання нового оптимального і допустимого розв'язку треба скористатись як прямим, так і двоїстим симплексним методом.

Для пояснення різних процедур аналізу чутливості використаємо модель фабрики іграшок з прикладу 4.5. Нагадаємо, що фабрика збирає три види дитячих іграшок: моделі літаків, вантажівок і легкових автомобілів. Зборка моделі кожного виду потребує послідовного застосування трьох операцій. В задачі необхідно визначити об'єми виробництва кожного виду іграшок, які максимізують загальний прибуток. Для зручності викладення матеріалу повторимо формулювання прямої і двоїстої задач.

Пряма задача	Двоїста задача
Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$, (операція 1) $3x_1 + 2x_3 \leq 460$, (операція 2) $x_1 + 4x_2 \leq 420$, (операція 3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.	Мінімізувати $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$ при обмеженнях $y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$, $2y_1 + 4y_3 \geq 2$, $y_1 + 2y_2 \geq 5$, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
Оптимальний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$, $z = 1350$	Оптимальний розв'язок $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$

Наведемо симплексну таблицю, яка містить оптимальний розв'язок прямої задачі.

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	z	1350	4	0	0	1	2	0
1	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
3	x_6	20	2	0	0	-2	1	1

Зміни, які впливають на допустимість розв'язку.

До недопустимості поточного оптимального розв'язку може привести, по-перше, зміна правих частин обмежень (тобто зміна елементів вектора \vec{b}) і, по-друге, введення в множину обмежень задачі нового обмеження. В будь-якому випадку недопустимість розв'язку проявиться в тому, що, принаймні, один елемент вектора $\vec{B}^{-1}\vec{b}$ стане від'ємним, тобто одна або декілька базисних змінних приймуть від'ємне значення.

Зміни елементів вектора \vec{b} правих частин обмежень. У наступному прикладі проілюстрований підхід до дослідження ситуації, коли змінюються декілька елементів вектора \vec{b} .

Приклад 4.8

Припустимо, що фабрика іграшок планує розширити виробництво своєї продукції шляхом збільшення можливостей складальних ліній на 40%, що дасть наступний фонд робочого часу для кожного виду складальної операції: 602, 644 і 588 хвилин відповідно. Ці зміни впливають тільки на праві частини нерівностей системи обмежень. За формулою $\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b}$ знайдемо новий розв'язок задачі.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, поточні базисні змінні x_2 , x_3 і x_6 з новими значеннями 140, 322 і 28 як і раніше складають допустимий розв'язок. Відповідне цьому розв'язку оптимальне значення цільової функції (максимальний прибуток) дорівнює 1890 грн.

Хоч новий розв'язок і приводить до збільшення прибутку фабрики, реалізація заходів, які необхідні для такого зростання виробництва, потребує певного часу. Часовою альтернативою такої модернізації виробництва може бути „перенос” невикористаного фонду робочого часу третьої операції ($x_6 = 20$ хвилин) у фонд першої. Тоді фонд робочого часу трьох складальних операцій буде рівний 450, 460 і 400 хвилин відповідно. З урахуванням нових обмежень отримаємо наступний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Отриманий розв'язок не є допустимим, оскільки тепер $x_6 = -40$. Для повернення в область допустимих розв'язків можна застосувати двоїстий симплексний метод. Спочатку замінимо значення в стовпці „ОП” симплексної таблиці (ці нові значення виділені в наступній симплексній таблиці). Відмітимо, що відповідне значення цільової функції дорівнює $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = 1370$ грн.

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	z	1370	4	0	0	1	2	0
1	x_2	110	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
3	x_6	-40	2	0	0	-2	1	1

У відповідності з двоїстим симплексним методом виключаємо змінну x_6 , а вводимо x_4 . В результаті отримаємо наступну симплексну

таблицю з оптимальним допустимим розв'язком. (В загальному випадку для отримання допустимого розв'язку може знадобитись декілька ітерацій двоїстого симплексного методу).

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	z	1350	5	0	0	0	5/2	1/2
1	x_2	100	1/4	1	0	0	0	1/4
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
3	x_4	20	-1	0	0	1	-1/2	-1/2

По суті, оптимальний розв'язок залишився незмінним. Це означає, що у даному випадку „перенос” частини фонду робочого часу третьої операції у фонд робочого часу першої операції не приводить до покращення цільової функції.

Інтервали допустимих змін для елементів вектора \vec{b} . Другий спосіб дослідження впливу доступності ресурсів (тобто елементів вектора \vec{b} правих частин нерівностей обмежень) полягає у визначенні інтервалів допустимості для цих елементів, які зберігають поточний розв'язок допустимим. Наступний приклад ілюструє даний метод аналізу чутливості.

Приклад 4.9.

Нехай, в задачі про фабрику іграшок нас цікавить інтервал допустимості для значення фонду робочого часу першої операції. Замінімо вектор \vec{b} вектором

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}.$$

Змінна D_1 являє собою зміну фонду робочого часу першої операції у порівнянні з поточним рівнем в 430 хвилин. Для того щоб поточний базисний розв'язок залишився допустимим, необхідно виконання нерівності $\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b}_1 \geq 0$. Звідси отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{D_1}{2} \\ 230 \\ 20 - 2D_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перша нерівність $x_2 \geq 0$ дає $D_1 \geq -200$, друга нерівність $x_3 \geq 0$ не залежить від D_1 , третя дає умову $D_1 \leq 10$. Таким чином, поточний базисний розв'язок залишається допустимим при виконанні нерівностей $-200 \leq D_1 \leq 10$. Це еквівалентно наступному інтервалу допустимості для фонду робочого часу першої операції:

$$430 - 200 \leq \text{Фонд робочого часу першої операції} \leq 430 + 10$$

або

$$230 \leq \text{Фонд робочого часу першої операції} \leq 440.$$

Зміни значення цільової функції, які відповідають зміні D_1 , дорівнює $D_1 y_1$, де y_1 – вартість (в грн.) однієї хвилини фонду робочого часу першої операції (тобто двоїста ціна цього ресурсу).

Для того щоб проілюструвати використання даного інтервалу допустимості, припустимо, що фонд робочого часу першої операції змінився від 430 до 400 хвилин. Поточний базисний розв'язок залишається допустимим, оскільки нове значення фонду робочого часу першої операції належить інтервалу допустимості. Для обчислення нових значень змінних скористаємось значенням $D_1 = 400 - 430 = -30$. Далі отримуємо наступне:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{1}{2}(-30) \\ 230 \\ 20 - 2(-30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 230 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Для обчислення нового значення цільової функції спочатку знайдемо значення двоїстих цін:

$$(y_1, y_2, y_3) = \vec{C}_B \vec{B}^{-1} = (2, 5, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0).$$

Таким чином, вартість однієї хвилини фонду робочого часу першої операції рівна $y_1 = 1$ грн. Тоді зміна оптимального прибутку складатиме $D_1 y_1 = -30 \times 1 = -30$ грн. Слід пам'ятати, що дана вартість хвилини фонду робочого часу першої операції, рівна $y_1 = 1$ грн. має місце тільки для вказаного вище інтервалу зміни D_1 . Будь-яка зміна, яка виходить за межі цього інтервалу, приводить до недопустимого розв'язку. У такому випадку слід використати двоїстий симплексний метод для знаходження нового розв'язку, якщо він існує.

Аналогічну процедуру можна використати при визначенні інтервалів допустимості для змінних D_2 і D_3 , які рівні зміні фондів робочого часу другої і третьої складальних операцій. Визначення інтервалів допустимості для D_1 , D_2 і D_3 як описано вище, і їх співвідношень із змінними y_1 , y_2 і y_3 двоїстої задачі коректні тільки тоді, коли ці ресурси розглядаються незалежно один від одного. При одночасній зміні усіх трьох ресурсів, поточний вектор \vec{b} необхідно замінити на \vec{b}^* з елементами $(430 + D_1, 460 + D_2, 420 + D_3)$ (вправа 4.21).

Додання нових обмежень. Додання нового обмеження в існуючу модель лінійного програмування може привести до однієї з наступних ситуацій:

Нове обмеження є надмірним. Це означає, що нове обмеження виконується при поточному оптимальному розв'язку.

Нове обмеження не виконується при поточному оптимальному розв'язку. В цьому випадку необхідно застосувати двоїстий симплексний

метод, щоб отримати новий оптимальний розв'язок (принаймні спробувати його знайти).

Приклад 4.10.

Припустимо, що фабрика іграшок змінила конструкцію моделей, і тепер для їх виробництва необхідна четверта складальна операція. Щоденний фонд робочого часу цієї операції складає 500 хвилин. Час виконання цієї операції при виробництві однієї іграшки різних видів складає відповідно 3, 1 і 1 хвилина. В результаті отримуємо нове обмеження: $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$. Це обмеження є надмірним, оскільки воно задовольняється при поточному оптимальному розв'язку $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 230$. Таким чином, поточний оптимальний розв'язок залишається незмінним.

Приклад 4.11.

Припустимо, що в моделі фабрики іграшок час виконання нової четвертої операції складає відповідно 3, 3 і 1 хвилину при виробництві однієї іграшки різних видів. В цьому випадку четверте обмеження $3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$ не буде надмірним, і поточний оптимальний розв'язок йому не задовольняє. Ми повинні ввести нове обмеження у симплексну таблицю, де представлений поточний оптимальний розв'язок.

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	z	1350	4	0	0	1	2	0	0
1	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	0
3	x_6	20	2	0	0	-2	1	1	0
4	x_7	500	3	3	1	0	0	0	1

Оскільки, змінні x_2 і x_3 є базисними, то з четвертого рядка необхідно виключити коефіцієнти, які їм відповідають (тобто треба зробити їх нульовими). Для цього треба виконати наступні операції:

Новий рядок 4 = Старий рядок 4 – [3×(рядок 1)+1×(рядок 2)].

В результаті отримуємо нову симплексну таблицю.

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	z	1350	4	0	0	1	2	0	0
1	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	0
3	x_6	20	2	0	0	-2	1	1	0
4	x_7	-30	9/4	0	0	-3/2	1/4	0	1

За допомогою двоїстого симплексного методу знаходимо новий оптимальний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 90$, $x_3 = 230$ і $z = 1330$ грн. (перевірте!).

Зміни, які впливають на оптимальність розв'язку.

Поточний оптимальний розв'язок перестає бути оптимальним, якщо різниці $z_j - c_j$ не задовольняють умову оптимальності. Використовуючи вектор двоїстих цін $\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1}$, визначений у параграфі 5.5, запишемо

$$z_j - c_j = \vec{Y} \vec{P}_j - c_j.$$

Звідси випливає, що на оптимальність розв'язку впливають тільки коефіцієнти c_j цільової функції (і, отже, вектор \vec{C}_B) і вартості ресурсів, які представлені векторами \vec{P}_j . Розглянемо послідовно кожний фактор, який впливає на оптимальність розв'язку.

Зміни коефіцієнтів цільової функції. Для визначення впливу змін коефіцієнтів цільової функції слід обчислити різниці $z_j - c_j$ тільки для небазисних змінних, оскільки при будь-яких змінах коефіцієнтів c_j , які відповідають базисним змінним, різниці $z_j - c_j$ завжди залишаються рівними нулю.

Обчислення виконуються за наступним алгоритмом.

1. Обчислюється вектор двоїстих цін $\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1}$ для нового вектора коефіцієнтів \vec{C}_B .
2. Обчислюються різниці $z_j - c_j = \vec{Y} \vec{P}_j - c_j$ для поточної небазисної змінної x_j .

При цьому можливі два варіанти:

а) якщо умова оптимальності виконується, то поточний розв'язок залишається оптимальним, але значення цільової функції може змінитись;

б) якщо умова оптимальності не виконується, то слід застосувати прямий симплексний метод для отримання нового оптимального розв'язку.

Приклад 4.12.

Припустимо, що фабрика іграшок проводить нову цінову політику відносно своїх виробів. У відповідності з цим прибуток від однієї моделі літака, вантажівки і легкового автомобіля складає відповідно 4, 3, і 4 грн. Одержуємо нову цільову функцію для цієї моделі:

$$\text{Максимізувати } z = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

Оскільки поточний базисний розв'язок \vec{X}_B складається із змінних x_2 , x_3 і x_6 , маємо $\vec{C}_B = (3, 4, 0)$. Обчислимо вектор двоїстих цін.

$$\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1} = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0 \right).$$

Різниці $z_j - c_j$ для небазисних змінних x_1 , x_4 і x_5 обчислюються за формулою $z_j - c_j = \vec{Y} \vec{P}_j - c_j$:

$$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 4 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 4 = \frac{5}{4},$$

$$z_4 - c_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2},$$

$$z_5 - c_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}.$$

Відмітимо, що тут використовувалось нове значення коефіцієнту цільової функції $c_1 = 4$.

Обчислення показують, що поточний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 230$ залишається оптимальним. Нове значення цільової функції дорівнює $4 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = 1220$ грн.

Припустимо, що у задачі, яка розглядається, цільова функція має наступний вигляд:

$$z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max.$$

Ця функція співпадає з попередньою цільовою функцією, за винятком того, що коефіцієнт при змінній x_1 тепер рівний 6. Тому необхідно перерахувати тільки різницю $z_1 - c_1$. В результаті отримуємо наступне:

$$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 6 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 6 = -\frac{3}{4}.$$

Звідси випливає, що змінну x_1 необхідно включити у базисний розв'язок. Маємо наступну симплексну таблицю:

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	z	1220	-3/4	0	0	3/2	5/4	0
1	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
2	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
3	x_6	20	2	0	0	-2	1	1

Нові значення різниць $z_j - c_j$ для небазисних змінних x_1 , x_4 і x_5 у симплексній таблиці виділені. Всі інші елементи таблиці залишились такими ж, як і у вихідній таблиці з оптимальним розв'язком. Для знаходження нового оптимального розв'язку необхідно ввести у базис змінну

x_1 і виключити з нього змінну x_6 . В результаті отримуємо розв'язок $x_1 = 10$, $x_2 = 102,5$, $x_3 = 215$ і $z = 1227,50$ грн. (перевірте!).

Крім того, для дослідження впливу коефіцієнтів цільової функції на оптимальність розв'язку можна також обчислити (окремо) інтервали зміни кожного коефіцієнта, які зберігають оптимальність поточного розв'язку. Для цього необхідно замінити поточний коефіцієнт c_j виразом $c_j + d_j$, де d_j – величина (додатна або від'ємна) зміни коефіцієнта c_j .

Обмеження на величини d_j можна визначити шляхом обчислення нових різниць $z_j - c_j$ і накладання на них відповідної умови оптимальності, яка залежить від того, чи розглядається задача максимізації чи мінімізації.

Додання у модель лінійного програмування нового виду виробничої діяльності. Введення в модель лінійного програмування нового виду виробничої діяльності еквівалентно доданню нової змінної в задачу. Dodання нового виду виробничої діяльності інтуїтивно обґрунтовано тільки у тому випадку, коли ця діяльність економічно рентабельна, тобто покращує оптимальне значення цільової функції. Цю умову можна перевірити шляхом обчислення для нової змінної різниці $z_j - c_j = \bar{Y}\bar{P}_j - c_j$, де \bar{Y} – вектор оптимальних значень двоїстої задачі, \bar{P}_j і c_j – відповідно ресурси, які використовуються для забезпечення нового виду діяльності, і прибуток від одиниці „виходу” цієї діяльності. Якщо обчислене значення різниці $z_j - c_j$ задовольняє умову оптимальності, то нова діяльність небажана оскільки не покращує оптимального розв'язку. Якщо ж обчислене значення різниці не задовольняє умову оптимальності, то новий вид діяльності є рентабельним і змінна, яка йому відповідає, повинна бути включена в базисний розв'язок.

Приклад 4.13.

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування про фабрику іграшок показує, що виробництво моделей літаків нерентабельне. Тому фабрика планує замінити виробництво цих моделей випуском нових іграшок, а саме моделлю пожежної машини, причому її складання буде здійснюватись з використанням тих же виробничих потужностей. Фабрика підрахувала прибуток від нової іграшки в 4 грн. за одну модель. Її час складання на кожній з трьох технологічних операцій складає відповідно 1, 1 і 2 хвилини.

Позначимо через x_7 об'єм виробництва нової продукції. Оскільки в цій ситуації поточний базисний вектор \vec{C}_B не змінився, можна для подальших розрахунків використати поточний вектор значень змінних двоїстої задачі $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$. Обчислимо різницю $z_7 - c_7$.

$$z_7 - c_7 = 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1.$$

Отриманий результат показує, що економічно доцільно включити змінну x_7 в оптимальний базисний розв'язок. Для знаходження нового оптимального розв'язку спочатку обчислюємо

$$\vec{B}^{-1}\vec{P}_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що поточна симплексна таблиця повинна бути приведена до наступного вигляду:

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6
0	z	1350	4	0	0	-1	1	2	0
1	x_2	100	-1/4	1	0	1/4	1/2	-1/4	0
2	x_4	230	3/2	0	1	1/2	0	1/2	0
3	x_6	20	2	0	0	1	-2	1	1

Тепер новий оптимальний розв'язок можна знайти шляхом введення в базис змінної x_7 і виключення з нього змінної x_6 .

Введення в модель лінійного програмування нового виду діяльності, як видно з наведеного вище прикладу, можна розглядати як узагальнення ситуації, коли відбувається зміна у векторі ресурсів \vec{P}_j , які використовуються для існуючої діяльності. Тому зміна параметрів існуючого виду діяльності окремо ми не розглядаємо.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За якими правилами визначається двоїста задача на основі стандартної форми прямої задачі?
2. Загальні правила, що визначають тип оптимізації і обмежень двоїстої задачі.
3. Як можна визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі із симплексної таблиці прямої задачі?
4. Яке співвідношення між цільовими функціями прямої і двоїстої задач?
5. Чим визначається стабільність стану економічної системи?
6. Яка економічна інтерпретація умови оптимальності в задачі максимізації?
7. Двоїсті умови допустимості і оптимальності розв'язків в двоїстому симплексному методі.
8. Матричне представлення базисних розв'язків.
9. Як можна класифікувати зміни коефіцієнтів вихідної задачі при аналізі чутливості оптимального розв'язку? Накресліть схему за даною класифікацією.

ВПРАВИ

4.1. Запишіть двоїсті задачі для наступних прямих задач лінійного програмування:

а) $z = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + x_2 \leq -2,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

в) $z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 2x_2 = 5,$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \text{ — без обмеження по знаку,}$$

$$x_2 \leq 0.$$

д) $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 + x_2 = 5,$$

$$3x_1 - x_2 = 6,$$

$$x_1, x_2 \text{ — без обмеження по знаку.}$$

б) $z = 6x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

г) $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 \geq 10,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \leq 0,$$

$$x_3 \geq 0.$$

е) $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4.2. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі задовольняє рівняння (одержано з нульового рядка симплексної таблиці):

$$z + 0x_1 + 23x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 0x_5 = 150.$$

Запишіть відповідну двоїсту задачу і знайдіть її оптимальний розв'язок, виходячи з наведеного рівняння.

4.3. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 ,$$

$$2x_1 - x_2 = 4 ,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

Запишіть відповідну двоїсту задачу та використовуючи інформацію, що оптимальний базисний розв'язок цієї задачі містить змінні x_1 і x_3 , знайдіть розв'язок двоїстої задачі.

4.4. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max ,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 ,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8 ,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 .$$

Використовуючи двоїсту задачу, переконайтесь, що базисний розв'язок (x_1, x_2) не є оптимальним.

4.5. У попередній вправі рівняння, отримане з нульового рядка оптимальної симплексної таблиці, має наступний вид:

$$z + 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 16 .$$

Знайдіть оптимальний розв'язок відповідної двоїстої задачі.

4.6. За допомогою двоїстої задачі знайдіть допустимий розв'язок наступної системи нерівностей:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 ,$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4 ,$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 2 ,$$

$$x_1 - \text{без обмеження по знаку},$$

$$x_2 \geq 0 .$$

(Порада. Додайте до цієї системи нерівностей тривіальну цільову функцію $z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \rightarrow \max$ і розв'яжіть двоїсту задачу).

4.7. Знайти оптимальне значення цільової функції наступної задачі, використовуючи тільки властивості її двоїстої задачі (тобто не застосовуючи симплексний метод до двоїстої задачі):

$$z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min,$$

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4.8. Визначіть інтервали зміни цільової функції в наступних задачах лінійного програмування:

а) $z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$

$$x_1 - x_2 \geq 3,$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

в) $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$x_1 - x_2 \leq 10,$$

$$2x_1 \leq 40,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

б) $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

г) $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.9. Компанія виготовляє шкіряні чохли і сумки. На виробництво одного чохла треба 8 м² шкіри і 12 годин робочого часу, на виробництво сумки – 2 м² шкіри і 5 годин робочого часу. Щотижневі ресурси виробництва обмежені 1200 м² шкіри і 1850 годинами робочого часу. Компанія продає чохли і сумки за цінами €350 і €130 відповідно. Визначіть для цієї компанії схему виробництва, яка максимізує прибуток. Припустимо, що компанія має намір розширити своє виробництво. Яка максимальна ціна, за якою компанії є сенс закупувати додаткову шкіру? А яка допустима максимальна ціна додаткових трудових ресурсів?

4.10. Компанія використовує токарні і свердлильні верстати для виробництва чотирьох типів деталей: Д1, Д2, Д3 і Д4. В наступній

таблиці подані технологічні дані, які характеризують виробництво цих деталей:

Верстат	Час обробки одного виробу (хв.)				Фонд машинного часу (хв.)
	Д1	Д2	Д3	Д4	
Токарний	2	5	3	4	5300
Свердлильний	3	4	6	4	5300
Прибуток від одного виробу (€)	3	6	5	4	

Для тих виробів, які не ввійдуть в оптимальний базисний розв'язок, визначіть степінь зменшення оптимального прибутку при збільшенні їх виробництва на одиницю.

4.11. Розгляньте оптимальний розв'язок задачі з попередньої вправи.

Компанія підрахувала, що за допомогою спеціальних заходів можна зменшити загальний час виробництва виробів, які не ввійшли в оптимальний базисний розв'язок, на 20%. Чи буде після цього виробництво таких виробів рентабельно? Якщо ні, то на скільки треба скоротити час виробництва даних виробів?

4.12. Розв'яжіть наступні задачі за допомогою двоїстого симплексного методу:

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$,

$2x_1 + 2x_2 \leq 30$,

$x_1 + 2x_2 \geq 10$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

б) $z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$,

$x_1 + x_2 \geq 2$,

$4x_1 + x_2 \geq 4$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

$$\text{в) } z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$3x_1 - x_2 \geq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$\text{г) } z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(Порада. Замініть обмеження рівність двома нерівностями).

4.13. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 60,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 20,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Перевірте оптимальність і допустимість наступних базисних розв'язків:

$$\text{а) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.14. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 4x_1 + 14x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Перевірте оптимальність і допустимість наступних базисних розв'язків:

$$\text{а) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

4.15. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5).$$

Обчисліть симплексну таблицю, яка відповідає наступному базисному розв'язку, і перевірте його оптимальність та допустимість:

$$\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.16. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Знайдіть найкращий розв'язок серед наступних базисних допустимих розв'язків та встановіть чи присутній серед них оптимальний:

$$\text{а) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

4.17. В наступній таблиці представлений оптимальний розв'язок задачі максимізації з трьома обмеженнями типу „ \leq ” і невід'ємними змінними x_1 і x_2 . Змінні x_3 , x_4 і x_5 є додатковими змінними, що відповідають обмеженням задачі. Двома різними способами, використовуючи цільові функції прямої і двоїстої задач, знайдіть оптимальне значення цільової функції вихідної задачі.

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	z	?	0	0	0	3	2
1	x_3	2	0	0	1	1	-1
2	x_2	6	0	1	0	1	0
3	x_1	2	1	0	0	-1	1

4.18. Розгляньте наступну задачу лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Визначіть значення констант b_1 і b_2 , при яких симплексна таблиця з оптимальним розв'язком має наступний вид:

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	z	150	0	a	7	d	e
1	x_1	30	1	b	2	1	0
2	x_5	10	0	c	-8	-1	1

Константи a , b , c , d і e можна знайти на основі даних вихідної задачі і умов оптимальності та допустимості розв'язку, який представлений в симплексній таблиці.

Знайдіть значення правих частин нерівностей вихідної задачі b_1 і b_2 , оптимальний розв'язок двоїстої задачі та значення констант a , b і c , які відповідають змінній x_2 .

4.19. Птахофабрика тримає 20 000 курчат, які вирощуються віком до восьми тижнів і потім відправляються до ринку. В наступній таблиці подано тижневі витрати корму на одне курча, в залежності від його віку:

Тиждень	1	2	3	4	5	6	7	8
Витрати корму (кг)	0.13	0.24	0.375	0.50	0.65	0.80	0.95	1.05

Для того, щоб курчата до 8-го тижня змогли досягти певної ваги, їх раціон повинен задовольняти певним вимогам до калорійності і якісного складу (в задачі вони спрощені). В наступній таблиці наведені узагальнені дані по вмісту трьох показників (кальцій, білок і клітковина) у кормових інгредієнтах:

Інгредієнт	Вміст речовин (кг/кг інгредієнту)			Вартість (грн/кг)
	Кальцій	Білок	Клітковина	
Вапняк	0.380	0.00	0.00	0.24
Зерно	0.001	0.09	0.02	0.90
Соеве борошно	0.002	0.50	0.08	3.20

Кормовий раціон повинен містити: кальцію – не менше 8% і не більше 12%; білку – не менше 22%; клітковини – не більше 5%. Складіть оптимальний кормовий раціон для кожного тижня.

4.20. Нехай в задачі про фабрику іграшок змінні D_2 і D_3 являють собою зміни фондів робочого часу другої і третьої операцій.

- 1) Визначіть інтервали для D_2 і D_3 , які гарантують допустимість поточного розв'язку. Припускається, що зміни фондів робочого часу кожної операції виконуються окремо.
- 2) Визначіть вартість однієї хвилини фондів робочого часу другої і третьої операцій.
- 3) Нехай фонд робочого часу другої операції змінений від поточного значення 460 хв. до 500 хв. Знайдіть новий оптимальний розв'язок і визначте відповідне значення цільової функції.
- 4) Нехай фонд робочого часу третьої операції змінений від поточного значення 420 хв. до 450 хв. Знайдіть новий оптимальний розв'язок і визначіть відповідну зміну цільової функції.

5) Нехай фонд робочого часу третьої операції змінений від поточного значення 420 хв. до 380 хв. Знайдіть новий оптимальний розв'язок і визначіть відповідну зміну цільової функції.

4.21. Нехай в задачі про фабрику іграшок зміни D_1 , D_2 і D_3 фондів робочого часу всіх операцій робляться одночасно.

1) Накладіть умови на змінні D_1 , D_2 і D_3 , які гарантують допустимість поточного оптимального розв'язку.

2) Нехай фонди робочого часу всіх трьох операцій змінені до 438, 500 і 410 хв. відповідно. На основі умови, яку знайдено у попередньому пункті, покажіть, що поточний базисний розв'язок залишиться допустимим. За допомогою двоїстих цін знайдіть зміну цільової функції.

3) Нехай фонди робочого часу всіх трьох операцій змінені до 460, 440 і 380 хв. відповідно. На основі умови, знайденої у п. 1), покажіть, що поточний базисний розв'язок буде недопустимим. За допомогою двоїстого симплексного методу знайдіть новий оптимальний розв'язок.

4.22. Компанія виготовляє дві моделі електронних пристроїв, при виготовленні яких використовуються резистори, конденсатори і мікросхеми. У наступній таблиці наведені дані, які характеризують виробництво цих моделей:

Ресурс	Кількість комплектуючих на один виріб		Ліміт комплектуючих
	Модель 1	Модель 2	
Резистор	2	3	1200
Конденсатор	2	1	1000
Мікросхема	0	4	800
Прибуток на один виріб (€)	3	4	

Позначимо через x_1 і x_2 кількість виготовлених пристроїв моделей 1 і 2 відповідно. Нижче наведена сформульована задача лінійного про-

грамування і відповідна симплексна таблиця з її оптимальним розв'язком.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1000,$$

$$4x_1 \leq 800,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
0	z	1750	0	0	5/4	1/4	0
1	x_1	450	1	0	-1/4	3/4	0
2	u_3	400	0	0	-2	2	1
3	x_2	100	0	1	1/2	-1/2	0

- 1) Визначіть статус кожного ресурсу.
- 2) В термінах оптимального прибутку визначіть вартість одного резистора, одного конденсатора і однієї мікросхеми.
- 3) Знайдіть інтервал застосування двоїстих цін для кожного ресурсу.
- 4) Знайдіть новий оптимальний розв'язок при умові зростання кількості доступних резисторів до 1300.
- 5) Якщо кількість доступних мікросхем буде зменшена до 350, чи можна буде знайти новий оптимальний розв'язок безпосередньо з наведеної вище інформації? Обґрунтуйте свою відповідь.
- 6) У п. 3) був визначений інтервал допустимості для доступної кількості конденсаторів. На основі цих даних визначіть інтервал зміни оптимального прибутку і відповідні інтервали змін кількостей першої і другої моделей.
- 7) Новий контракт дозволяє компанії закупити додаткову кількість резисторів за ціною 4 грн. за одиницю, але при умові, що закупівельна партія буде не менше 500 одиниць. Чи вигідний компанії такий контракт?

4.23. Компанія для виробництва двох видів продукції має щоденний фонд робочого часу 320 годин і 350 одиниць сировини. При необхідності компанія може дозволити 10 годин понаднормової роботи з оплатою €2 за годину. На виготовлення однієї одиниці продукції першого виду треба 1 годину робочого часу і 3 одиниці сировини, а на виготовлення однієї одиниці продукції другого виду – 2 години робочого часу і 1 одиниця сировини. Прибуток від однієї одиниці продукції складає відповідно €10 і €12. Позначимо через x_1 і x_2 щоденні об'єми виробництва продукції першого і другого виду, а через x_3 – кількість використаних понаднормових годин. Нижче наведена сформульована задача лінійного програмування і відповідна симплексна таблиця з оптимальним розв'язком.

$$z = 10x_1 + 12x_2 - 2x_3 \rightarrow \max ,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 320 ,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 350 ,$$

$$x_3 \leq 10 ,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

№ рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3
0	z	2256	0	0	0	26/5	8/5	16/5
1	x_2	128	0	1	0	3/5	-1/5	3/5
2	x_1	74	1	0	0	-1/5	2/5	-1/5
3	x_3	10	0	0	1	0	0	1

- 1) Знайдіть оптимальний розв'язок цієї задачі.
- 2) Визначіть двоїсті ціни ресурсів та їх інтервали допустимості.
- 3) Знайдіть двоїсті ціни для фонду робочого часу і понаднормових робіт. Чи можуть ці ціни бути однаковими? Обґрунтуйте.
- 4) Компанія може збільшити об'єм понаднормових робіт за додаткову плату €2 за годину. Скільки годин такої понаднормової роботи може ввести компанія?

- 5) Компанія щоденно може отримати додатковий об'єм сировини в 100 одиниць за ціною €1,50. Чи варто компанії використати цей резерв сировини? А якщо вартість додаткової сировини буде €2 за одиницю?
- 6) Припустимо, що компанія змушена скоротити складські площі для сировини і тому щоденно не може використовувати більше 200 одиниць сировини. Знайдіть для цього випадку новий оптимальний розв'язок.
- 7) Припустимо, що компанія не може щоденно використовувати більше 8 годин понаднормової роботи. Знайдіть новий оптимальний розв'язок.

4.24. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- 1) Покажіть, що оптимальний базисний розв'язок містить обидві змінні x_1 і x_2 , та, що інтервали для правих частин обмежень, які отримані у припущенні їх незалежності, мають вигляд: $-3 \leq D_1 \leq 6$; $-3 \leq D_2 \leq 6$.
 - 2) Припустимо, що праві частини обмежень одночасно збільшуються на величину $\Delta > 0$. Спочатку доведіть, що базисний розв'язок залишається допустимим для всіх $\Delta > 0$. Далі покажіть, що достатнє правило допустимості дає правильну відповідь тільки тоді, коли $0 < \Delta < 3$, не дає відповіді при $3 \leq \Delta \leq 6$, і не можна застосувати коли $\Delta > 6$.
- 4.1. Нехай в моделі фабрики іграшок час виконання четвертої операції складає відповідно 4, 1 і 2 хвилини при складанні однієї іграшки різних видів. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі у припущен-

ні, що фонд робочого часу четвертої операції складає а) 570 хвилин; б) 548 хвилин.

4.2. **Побічні обмеження.** Замість розв'язання задачі лінійного програмування, з урахуванням всіх обмежень, можна спочатку визначити так звані *побічні обмеження* і на першому етапі розв'язання задачі виключити їх з розгляду. Побічними обмеженнями є ті, які, як ми підозрюємо, лише у малій степені впливають (або зовсім не впливають) на оптимальний розв'язок. Після визначення такі обмеження виключаються з множини обмежень задачі, і далі розв'язується задача тільки з обмеженнями, що залишились. Потім по черзі перевіряються побічні обмеження. Якщо отриманий оптимальний розв'язок задовольняє побічному обмеженню, таке обмеження відкидається зовсім. У протилежному випадку воно вводиться у систему обмежень задачі і шукається новий оптимальний розв'язок. Цей процес виконується до тих пір, доки не вичерпаються всі побічні обмеження.

Застосуйте описану процедуру до наступної задачі лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ,$$

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 50 ,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 ,$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \leq 90 ,$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35 ,$$

$$12x_1 + 6x_2 \leq 90 ,$$

$$x_2 - 9x_3 \leq 20 ,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

4.3. Перевірте оптимальність розв'язку задачі про фабрику іграшок для наступних цільових функцій. Якщо розв'язок неоптимальний, то знайдіть новий оптимальний розв'язок. (Симплексна таблиця з оп-

тимальним розв'язком для даної задачі представлена на початку параграфу 5.6).

1) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$.

2) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$.

3) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$.

4.4. Нехай в задачі про фабрику іграшок коефіцієнти цільової функції зазнали наступних змін (кожна зміна розглядається як окрема задача):

1) Прибуток від однієї моделі літака складає $3 + d_1$ грн.

2) Прибуток від однієї моделі вантажівки – $2 + d_2$ грн.

3) Прибуток від однієї моделі легкового автомобіля – $5 + d_3$ грн.

Зміни d_1 , d_2 і d_3 можуть бути як додатні, так і від'ємні. Застосовуючи умову оптимальності до різниць $z_j - c_j$, визначить інтервали для величин d_1 , d_2 і d_3 , які зберігають поточний оптимальний розв'язок.

4.5. В задачі про фабрику іграшок, використовуючи розв'язок з попередньої вправи, вкажіть чи буде поточний розв'язок оптимальним для наступних (незалежних) ситуацій. Якщо розв'язок зміниться, то знайдіть новий.

1) Прибуток від однієї моделі літака зріс від 3 грн. до 5 грн.; від 3 до 8 грн.

2) Прибуток від однієї моделі літака зменшився від 3 грн. до 2 грн.

3) Прибуток від однієї моделі вантажівки збільшився від 2 грн. до 6 грн.

4) Прибуток від однієї моделі легкового автомобіля зменшився від 5 грн. до 2 грн.

4.6. Припустимо, що у вихідній моделі фабрики іграшок час виконання трьох складальних операцій при виробництві моделей літаків зменшено відповідно до 0.5, 1 і 0.5 хвилин. Прибуток від моделі цього

виду залишився незмінним на рівні 3 грн. за одну іграшку. Знайдіть новий оптимальний розв'язок.

4.7. Нехай в моделі фабрики іграшок виробництво моделі нового виду (модель пожежної машини) вимагає відповідно 1, 2 і 3 хвилини для виконання кожної складальної операції. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо прибуток від однієї моделі нового виду складає: а) 5 грн.; б) 10 грн.

4.8. Компанія виготовляє три види продукції: П1, П2 і П3. У виробничому процесі використовуються матеріали М1 і М2, які обробляються на верстатах В1 і В2. В наступній таблиці наведені дані, які характеризують виробничий процес виготовлення продукції:

Ресурси	Одиниці виміру	К-ть ресурсів на одиницю виробу			Щоденний фонд ресурсів
		П1	П2	П3	
Час роботи верстата В1	Хвилини	1	2	1	430
Час роботи верстата В2	Хвилини	3	0	2	460
Матеріал М1	Кг	1	4	0	420
Матеріал М2	Кг	1	1	1	300

Щоденний об'єм виробництва виробу П2 повинен бути не менше 70 одиниць, а виробу П3 – не більше 240 одиниць. Прибуток на одиницю виробу П1, П2 і П3 складає відповідно 300, 200 і 500 грн.

Керівництво компанії розробляє стратегію для покращення свого фінансового стану. Поступили наступні пропозиції:

- 1) Можна збільшити на 20% прибуток від виробу П3, але при цьому зменшиться об'єм його виробництва до 210 одиниць.
- 2) Матеріал М2 є критичним фактором, який обмежує поточне виробництво. Можна придбати додаткові об'єми цього матеріалу у сторонніх постачальників, але його ціна за 1 кг буде на 3 грн. вище, ніж у постачальників, які обслуговують компанію.
- 3) Фонд робочого часу верстатів можна збільшити на 40 хвилин в робочий день, однак таке збільшення приведе до додаткової вартості експлуатації кожного верстату – 35 грн. в день.

- 4) Відділ маркетингу обґрунтував необхідність збільшення мінімального об'єму виробництва продукту П2 з 70 одиниць до 100 одиниць.
- 5) Час обробки одиниці виробу П1 на верстаті В2 можна зменшити до 2 хвилин з додатковою вартістю 4 грн. в робочий день.

Розгляньте доцільність впровадження цих пропозицій, враховуючи, що деякі з них можна впровадити одночасно.

РОЗДІЛ 5

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

5.1. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ І ОСОБЛИВОСТІ ЇЇ СТРУКТУРИ

Симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте окремі типи задач лінійного програмування мають такі особливості структури, що дають змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування. Але, як би зовні ці методи не відрізнялись від симплексного, останній є їх незмінною основою, так що при більш уважному аналізі завжди можна виявити його основні елементи, що дає можливість вважати всі методи розв'язування задач лінійного програмування більш-менш глибокою модифікацією симплексного методу.

Найважливішим типом згаданих задач є так звана транспортна задача. Математична структура цієї задачі характерна для великого класу задач лінійного програмування, що називаються *розподільчими*, а реальний зміст їх може бути найрізноманітнішим, зовсім не зв'язаним із задачею про перевезення вантажів.

Отже, треба розрізняти зміст термінів „транспортна задача” і „задача транспортного типу”. Перший термін означатиме назву класичної транспортної задачі, в якій мова йде про найраціональніші з економічного погляду способи перевезення певного однорідного продукту від виробника до споживача. Під терміном „однорідний продукт” розуміємо такий продукт або виріб, який має однакові якість і призначення. Наприклад, мова може йти про перевезення сталі з металургійних заводів до споживачів, цукрових буряків з певних плантацій до цукрових заводів і т. п.

Другим терміном (задача транспортного або розподільчого типу) називають такі задачі лінійного програмування, які мають однакову з

класичною транспортною задачею математичну модель, але конкретний зміст яких нічого спільного з класичною транспортною задачею не має. Прикладом таких задач можуть бути задача оптимального добору, задачі розміщення виробництва, баз та складів, задача про призначення і т. п.

Слід зауважити, що і власне транспортні задачі за своїм змістом поділяються на кілька груп. Як правило, критерієм поділу є критерій оптимальності цільової функції задачі, а саме: задачі на мінімізацію вартості перевезень, задачі на мінімізацію строків перевезень, задачі на мінімізацію довжини маршрутів тощо.

Запишемо транспортну задачу на мінімізацію загальної вартості перевезень, яка стала вже класичною.

Нехай є m пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m (постачальники), в яких зосереджені запаси деякого однорідного вантажу у кількості відповідно a_1, a_2, \dots, a_m одиниць. Є n пунктів призначення B_1, B_2, \dots, B_n (споживачі), які подають замовлення відповідно на b_1, b_2, \dots, b_n одиниць вантажу.

Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці вантажу від кожного пункту відправлення A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) до кожного пункту призначення B_j ($j = 1, 2, \dots, n$), які задані в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

Пункти від- правлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{ij}	...	c_{1n}	a_1
...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Всі числа c_{ij} утворюють матрицю, яка називається *матрицею вартостей перевезень* $(c_{ij})_{m \times n}$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Вважається, що вартість перевезення декількох одиниць вантажу пропорційна їх кількості.

Треба скласти такий план перевезень (звідки, куди і скільки одиниць везти), щоб всі заявки були максимально виконані (повне виконання можливе лише при сумарній кількості запасів більше або рівній сумарній кількості заявок), а загальна вартість всіх перевезень була мінімальною.

Позначимо x_{ij} – кількість одиниць вантажу, який відправляється з i -го пункту відправлення A_i в j -й пункт призначення B_j . Невід'ємні змінні x_{ij} також можна записати у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

яка називається *матрицею перевезень* $(x_{ij})_{m \times n}$.

Величини x_{ij} , які підлягають визначенню, називаються *перевезеннями*; $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – *вектором запасів*; $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – *вектором потреб*.

В залежності від співвідношення між запасами вантажу і сумарними потребами в ньому транспортні задачі можуть бути закритими і відкритими.

Якщо

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5.3)$$

то задача називається *закритою* або *транспортною задачею з правильним балансом*. Якщо

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5.4)$$

то *відкритою* або *транспортною задачею з неправильним балансом*.

Розглянемо закриту транспортну задачу.

Сумарна кількість вантажу, який відправляється з кожного пункту відправлення у всі пункти призначення, повинна дорівнювати запасу вантажу в даному пункті. Це дасть m умов-рівнянь:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= a_2, \\ &\dots, \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &= a_m. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Сумарна кількість вантажу, який доставляється у кожен пункт призначення з усіх пунктів відправлення, повинна дорівнювати заявці, яка подана даним пунктом. Це дає n умов-рівнянь:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &= b_1, \\x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &= b_2, \\&\dots\dots\dots, \\x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &= b_n.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Сумарна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min.\tag{5.7}$$

Таким чином, математичну модель закритої транспортної задачі коротко можна записати у вигляді

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Перш за все відмітимо, що система основних умов-рівнянь (5.5), (5.6) не є лінійно незалежною, так як їх праві частини зв'язані умовою (5.3). Число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m + n - 1$, тобто число базисних змінних буде рівним $m + n - 1$, а число вільних змінних

$$k = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1).$$

Зазначимо, що кожна змінна x_{ij} задачі входить у систему основних умов лише двічі: один раз у підсистему (5.5), другий – у підсистему (5.6).

Другою важливою особливістю транспортної задачі є те, що елементи матриці умов задачі – суть одиниці і нулі, причому кожний стовпчик

матриці має лише по дві одиниці, решта елементів дорівнюють нулю, кожен рядок n або m одиниць, а решта елементів – нулі.

Зауважимо, що на практиці для зручності, задаючи конкретну транспортну задачу, записують одну таблицю, в яку поміщають плани і вартості перевезень. Домовляються, наприклад, що вартості перевезень поміщають у клітинах таблиці плану перевезень у правому верхньому кутку, обведеному прямокутником. Крім того, в таблиці спрощено подають наявності ресурсів і заявки. Отже, робочий вигляд об'єднаної таблиці (5.1) і (5.2) в загальному випадку буде такий:

Таблиця 5.2

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}
a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}
...
a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}

5.2. ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНИХ ПЛАНІВ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Кожна транспортна задача розв'язується за тією самою схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування симплексним методом, а саме: 1) знаходимо спочатку будь-який базисний невід'ємний розв'язок (опорний план); 2) перевіряємо, чи буде знайдений розв'язок оптимальним; 3) якщо знайдений розв'язок не оптимальний, то виконуємо кілька кроків заміни, які приводять до оптимального розв'язку. Однак наявність великої кількості змінних і обмежень робить обчислення симплексним методом громіздкими. В силу особливої структури транспортної задачі при її розв'язуванні не треба довго і нудно знаходити розв'язок системи рівнянь. Всі операції по знаходженню оптимального плану зво-

дяться до маніпуляцій з таблицею. Це вже можна помітити на прикладі відшукування опорних планів. Заповнюють клітки матриці перевезень $A_i B_j$ меншим з чисел її рядка і стовпчика, тобто числом $\min(a_i, b_j)$.

Розглянемо три методи знаходження опорних розв'язків.

1. Діагональний метод (або метод північно-західного кута)

Цей найпростіший метод полягає в тому, що розподіляються ресурси постачальників і задовольняються потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляються ресурси першого пункту відправлення A_1 , намагаючись повністю задовольнити за його рахунок перші пункти відправлення B_1, B_2, \dots, B_n , наскільки це можливо. Вичерпавши ресурси пункту відправлення A_1 , розподіляють ресурси пункту A_2 за тим самим принципом: задовольняються потреби дальших (як записано в таблиці) пунктів призначення, які не вдалося задовольнити за рахунок пункту відправлення A_1 , і доти, поки не будуть розподілені всі ресурси всіх пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m . Таким чином заповнення клітин таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітини, з „північно-західного кута”, і продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітини в правому нижньому кутку. Розглянемо застосування цього методу на наступному прикладі:

$$\vec{a} = (60; 35; 40), \vec{b} = (22; 45; 20; 18; 30), C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Першою заповнюють клітину $A_1 B_1$ числом 22, як $\min(22, 60)$. В результаті такої дії потреби пункту B_1 задовольнилися повністю, а запаси A_1 зменшилися до $60 - 22 = 38$ од. Цим числом заповнюють клітину $A_1 B_2$.

Таблиця 5.3

$A_i \backslash B_j$	22	45	20	18	30
60	4	1	3	4	4
	22	38			
35	2	3	2	2	3
		7	20	8	
40	3	5	2	4	4
				10	30

У подальших розрахунках вже використовують запаси пунктів A_2 і A_3 . Так, клітку A_2B_2 заповнюють числом 7 ($\min(45 - 38; 35)$) і т. д. В результаті таких послідовних дій дістають початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 22 & 38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 20 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

2. Метод найменшої вартості

Метод найменшої вартості відрізняється від діагонального методу послідовністю заповнення клітин. Починають заповнювати ті клітки таблиці, де вартості перевезення на даному етапі є мінімальними (таблиця 5.4).

Таблиця 5.4

$A_i \backslash B_j$	22	45	20	18	30
60	4	1	3	4	4
		45			15
35	2	3	2	2	3
	22		13		
40	3	5	2	4	4
			7	18	15

Найменша вартість в клітині A_1B_2 , тому заповнюють її. Наступна менша вартість 2, в клітинах A_2B_1 , A_2B_3 , A_2B_4 і A_3B_3 . Можна вибрати будь-яку із цих клітин, наприклад A_2B_1 , потім A_2B_3 , A_3B_3 . Клітку A_2B_4 не

заповнюємо, тому що запаси пункту A_2 вичерпано. Вибирають клітину A_3B_4 з меншою вартістю 4 (всі клітки з вартістю 3 не заповнюються, тому що відповідні запаси вичерпані).

3. Метод усереднених коефіцієнтів

За методом усереднених коефіцієнтів обчислюють середні вартості рядків і стовпчиків матриці перевезення:

$$c_i = \frac{1}{n}(c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}), \quad c_j = \frac{1}{m}(c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{mj}).$$

Після цього обчислюють усереднені коефіцієнти k_{ij} за формулами

$$k_{ij} = c_{ij} - (c_i + c_j).$$

Потім заповнюють клітини з найменшими значеннями коефіцієнтів k_{ij} (таблиця 5.5).

Таблиця 5.5

$B_j \backslash A_i$	22	45	20	18	30	c_i
60	-2,2 4	-5,2 1 45	-2,5 3	-2,5 4	-2,9 4 15	3,2
35	-3,4 2	-2,4 3	-2,7 2	-3,7 2 18	-3,1 3 15	2,4
40	-3,6 3 20	-1,6 5	-3,9 2 20	-2,9 4	-3,3 4	3,6
c_j	3	3	2,3	3,3	3,7	

Обчислимо загальні вартості перевезення опорних планів, знайдених різними методами:

а) за діагональним методом

$$z_1 = 4 \cdot 22 + 1 \cdot 38 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 363 \text{ од.}$$

б) за методом найменшої вартості

$$z_2 = 1 \cdot 45 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 22 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 18 + 4 \cdot 15 = 321 \text{ од.}$$

в) за методом усереднених коефіцієнтів

$$z_3 = 1 \cdot 45 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 290 \text{ од.}$$

Отже, найбільш близький до оптимального плану буде початковий опорний план, знайдений методом усереднених коефіцієнтів. Діагональний метод зазвичай застосовується при розв'язуванні транспортних задач на ЕОМ.

5.3. МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Широко поширеним методом розв'язування транспортних задач є метод потенціалів.

Якщо допустимий розв'язок $X = (x_{ij})_{m \times n}$ транспортної задачі є оптимальним, то існують *потенціали* (числа) пунктів відправлення u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ і пунктів призначення v_j , $j = 1, 2, \dots, n$, які задовольняють наступним умовам:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0 \text{ (тобто для базисних клітин таблиці)}, \quad (5.8)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \text{ (тобто для вільних клітин таблиці)}. \quad (5.9)$$

Група рівностей (5.8) використовується як система рівнянь для знаходження потенціалів. Дана система рівнянь має $m + n$ невідомих u_i , v_j . Кількість рівнянь системи, як і кількість базисних змінних, дорівнює $m + n - 1$. Так як кількість невідомих системи на одиницю більше кількості рівнянь, то одній з них можна задати значення довільно, а решту знайти з системи.

Група нерівностей (5.9) використовується для перевірки оптимальності опорного розв'язку. Ці нерівності зручніше подати у наступному вигляді:

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0 \text{ при } x_{ij} = 0 \text{ (для оптимального розв'язку).}$$

Числа γ_{ij} називаються *оцінками* для вільних клітин таблиці транспортної задачі.

Для того щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб оцінки γ_{ij} для вільних клітин транспортної таблиці були невід'ємними.

Введемо деякі означення.

В транспортній задачі перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється за допомогою циклу перерахунку.

Циклом в транспортній таблиці називається замкнена ламана лінія, вершини якої розміщені в клітинах і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпчику.

Можливі цикли, які схематично зображені на рис. 5.1.

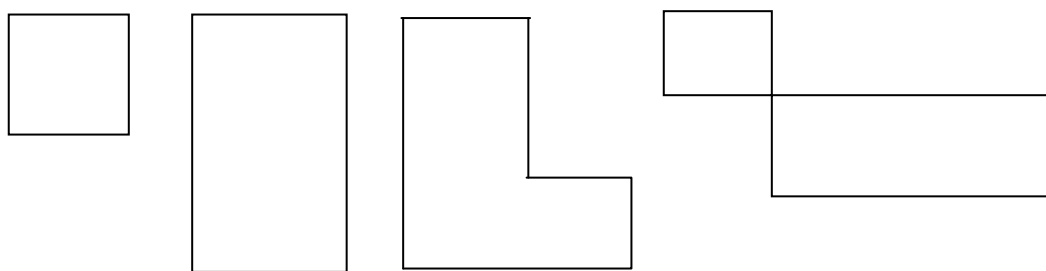


Рис. 5.1

Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки („+”, „-”), називають *означеним*.

Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітині, а всі інші в базисних, називається *циклом перерахунку*. (У вільній клітині завжди ставлять знак „+”).

Зсувом по циклу перерахунку на число θ називається така операція, при якій в додатних вершинах додається одне і те саме число θ , а у від'ємних віднімається.

Майже очевидними є два наступних твердження.

Зсув за означеним циклом в транспортній таблиці перетворює один розв'язок системи обмежень в інший.

Для будь-якої вільної клітки транспортної таблиці існує лише один цикл перерахунку.

Оцінки для вільних клітин транспортної таблиці використовуються при покращенні опорного розв'язку. Для цього знаходять клітину $A_l B_k$ таблиці, яка відповідає $\min(\gamma_{ij}) = \gamma_{lk}$. Якщо $\gamma_{lk} \geq 0$, розв'язок буде оптимальним. Якщо ж $\gamma_{lk} < 0$, то для клітки $A_l B_k$ будують цикл перерахунку і за допомогою зсуву переходять до нового опорного плану, в якому значення цільової функції буде меншим, ніж у попередньому.

Особливості розв'язування транспортних задач з неправильним балансом:

1. Якщо сумарні запаси постачальників перебільшують сумарні заявки споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необхідно ввести фіктивного $(n+1)$ -го споживача з заявками

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

що дорівнюють різниці сумарних запасів постачальників та заявок споживачів, і нульовими вартостями перевезень $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$.

2. Якщо сумарні заявки споживачів перебільшують сумарні запаси постачальників, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необхідно ввести фіктивного $(m+1)$ -го постачальника із за-

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

що дорівнюють різниці сумарних заявок споживачів та запасів постачальників, і нульовими вартостями перевезень $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j$.

3. При складанні початкового опорного плану в останню чергу слід розподіляти запаси фіктивного постачальника і задовольняти заявки фіктивного споживача, незважаючи на те, що їм відповідає найменша вартість перевезень, яка рівна нулю (щоб не змінювалась загальна вартість перевезень).

Алгоритм розв'язування транспортних задач методом потенціалів:

1. Перевірити чи є дана задача закритою транспортною задачею. Якщо задача має неправильний баланс, то вводиться фіктивний постачальник або споживач з необхідною кількістю запасів або заявок і нульовими вартостями перевезень.
2. Побудувати початковий опорний розв'язок (методом найменшої вартості або яким-небудь іншим методом), перевірити вірність його побудови за кількістю базисних клітин (їх повинно бути $m + n - 1$).
3. Побудувати систему потенціалів, яка відповідає опорному розв'язку. Для цього розв'язують систему рівнянь

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

яка має нескінченну множину розв'язків. Для знаходження частинного розв'язку системи одному з потенціалів (звичайно тому, якому відповідає більша кількість базисних клітин) задають довільне деяке значення (частіше нуль). Інші потенціали однозначно визначаються за формулами

$$u_i = c_{ij} - v_j \text{ при } x_{ij} > 0,$$

якщо відомий потенціал v_j , і

$$v_j = c_{ij} - u_i \text{ при } x_{ij} > 0,$$

якщо відомий потенціал u_i .

4. Перевірити виконання умови оптимальності для вільних клітин таблиці. Для цього обчислюють оцінки для всіх вільних клітин за формулами

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

і записують, наприклад, у круглих дужках в кожній вільній клітині. Якщо для всіх вільних кліток $\gamma_{ij} \geq 0$, то розв'язок є оптимальним і тоді обчислюють значення цільової функції та розв'язування задачі завершується. Якщо ж є хоча б одна клітина з від'ємною оцінкою, то опорний розв'язок не є оптимальним.

5. Перейти до нового опорного розв'язку, на якому значення цільової функції буде меншим. Для цього знаходять клітину таблиці задачі, якій відповідає найменша від'ємна оцінка

$$\min(\gamma_{ij}) = \gamma_{lk}.$$

Будують цикл перерахунку, який містить цю клітину і здійснюють зсув за означеним циклом на величину $\theta = \min_{\text{„-”}}(x_{ij})$. Клітина зі знаком „-”, в якій досягається $\min_{\text{„-”}}(x_{ij})$, залишається пустою.

Якщо мінімум досягається в декількох клітинах, то одна з них залишається пустою, а в інших проставляються базисні нулі, для того щоб кількість базисних клітин залишалася рівною $m + n - 1$.

Далі переходять до пункту 3 даного алгоритму.

Приклад 5.1. Розглянемо транспортну задачу, вихідні дані якої:

$$\vec{a} = (200; 300; 500), \vec{b} = (200; 200; 300; 400), C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знаходимо сумарні запаси постачальників і сумарні заявки споживачів:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 200 + 300 + 500 = 1000, \sum_{j=1}^4 b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100.$$

Задача з неправильним балансом. Введемо четвертого, фіктивного постачальника із запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ і нульовими вартостями перевезень (таблиця 5.6).

Таблиця 5.6

$A_i \backslash B_j$	200		200		300		400		u_i
200	(9)	4	(7)	3	(4)	2		1	-11
							200		
300		2		3	(0)	5	(-2)	6	-4
	200		100	-			+		
500	(0)	6		7		9	-	12	0
			100		300		100		
100	(6)	0	(5)	0	(3)	0		0	-12
							100		
v_j	6		7		9		12		

Знаходимо початковий опорний розв'язок методом найменшої вартості (таблиця 5.6).

Для перевірки оптимальності опорного розв'язку необхідно знайти потенціали. Записуємо систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$u_1 + v_4 = 1,$$

$$u_2 + v_1 = 2,$$

$$u_2 + v_2 = 3,$$

$$u_3 + v_2 = 7,$$

$$u_3 + v_3 = 9,$$

$$u_3 + v_4 = 12,$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Система рівнянь для знаходження потенціалів достатньо проста і зазвичай її розв'язують усно (саму систему можна не записувати). Будь-який невідомий потенціал, який відповідає базисній клітині, дорівнює

вартості цієї клітини мінус відомий потенціал, який відповідає цій же клітині.

Система складається з семи рівнянь і має вісім невідомих. Вона невизначена. Одному з потенціалів надамо значення довільно: нехай $u_3 = 0$. Інші потенціали знаходяться однозначно:

$$v_2 = 7 - u_3 = 7 - 0 = 7, \quad v_3 = 9 - u_3 = 9 - 0 = 9, \quad v_4 = 12 - u_3 = 12 - 0 = 12,$$

$$u_1 = 1 - v_4 = 1 - 12 = -11, \quad u_4 = 0 - v_4 = 0 - 12 = -12,$$

$$u_2 = 3 - v_2 = 3 - 7 = -4,$$

$$v_1 = 2 - u_2 = 2 - (-4) = 6.$$

Перевіряємо опорний розв'язок на оптимальність. З цією метою обчислюємо оцінки γ_{ij} для всіх вільних клітин таблиці (для всіх базисних клітин $\gamma_{ij} = 0$) і записуємо їх значення в круглих дужках (наприклад, $\gamma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 4 - (-11 + 6) = 9$).

Початковий опорний план не є оптимальним, так як є від'ємна оцінка $\gamma_{24} = -2$.

Переходимо до нового опорного плану. Для клітини A_2B_4 будемо цикл перерахунку та робимо зсув на величину $\theta = \min(100; 100) = 100$:

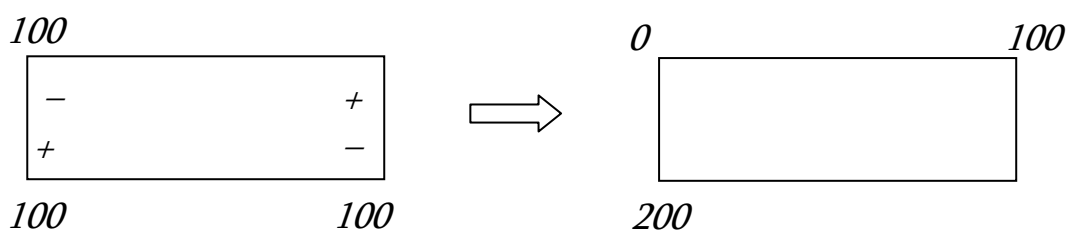


Рис 5.2

Отримуємо другий опорний розв'язок (таблиця 5.7).

Таблиця 5.7

$A_i \backslash B_j$	200		200		300		400		u_i
200	(7)	4	(5)	3	(2)	2		1	-5
300		2		3	(0)	56			0
500	(0)	6		7		9	(2)	12	4
100	(4)	0	(3)	0	(1)	0		0	-6
v_j	2		3		5		6		

Знаходимо для цього розв'язку потенціали та обчислюємо оцінки (приведені у таблиці 5.7). Всі оцінки невід'ємні. Отже, розв'язок є оптимальним. Обчислюємо значення цільової функції на цьому розв'язку:

$$z = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200$$

$$\text{при } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. АЛЬТЕРНАТИВНИЙ ОПТИМУМ ТА ВИРОДЖУВАНІСТЬ В ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧАХ

Ознакою наявності альтернативного оптимуму в транспортній задачі є рівність нулю хоча б однієї з оцінок вільних клітин в оптимальному розв'язку (X_{opt1}). Якщо зробити перерозподіл вантажів відносно клітини, що має оцінку $\gamma_{lk} = 0$, то отримуємо новий оптимальний розв'язок (X_{opt2}), при цьому значення цільової функції не зміниться. Якщо лише одна оцінка вільних клітин транспортної задачі дорівнює нулю, то оптимальний розв'язок знаходиться у вигляді

$$X_{opt} = t \cdot X_{opt1} + (1-t) \cdot X_{opt2},$$

де $0 \leq t \leq 1$.

Розглянемо конкретну задачу, яка має альтернативний оптимум.

Приклад 5.2. На трьох складах є борошно у кількостях 60, 130 і 90 т, яке повинно бути протягом місяця доставлено чотирьом хлібозаводам у кількостях: 30, 80, 60, 110 т відповідно.

Скласти оптимальний план перевезення, якщо вартість перевезення 1 т борошна на хлібозаводи задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Транспортна задача з правильним балансом. Складемо транспортну таблицю та знайдемо початковий опорний план за методом найменшої вартості.

Таблиця 5.8

$A_i \backslash B_j$	30	80	60	110	u_i
60	20	(-4)	(12)	40	0
130	(4)	(4)	60	70	-1
90	10	80	(4)	(6)	0
v_j	6	12	3	4	

Розв'яжемо задачу за методом потенціалів.

Таблиця 5.9

$A_i \backslash B_j$	30		80		60		110		u_i
60	(4)	6		8	(12)	15		4	0
			20	+			-	40	
130	(8)	9	(8)	15		2		3	-1
					60	-	+	70	
90		6		12	(0)	7		10	4
	30		60	-		+			
v_j	2		8		3		4		

Отриманий розв'язок (таблиця 5.9) є оптимальним і так як $\gamma_{33} = 0$, то задача має альтернативний оптимум. Отже, один із розв'язків дорівнює

$$X_{opt1} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарна вартість перевезень складає: $z = 1550$ од.

Виконаємо цикл перерахунку відносно клітини A_3B_3 :

Таблиця 5.10

$A_i \backslash B_j$	30		80		60		110		u_i
60	(4)	6		8	(12)	15	(0)	4	0
			60						
130	(8)	9	(8)	15		2		3	-1
					20		110		
90		6		12		7	(2)	10	4
	30		20		40				
v_j	2		8		3		4		

Отримали ще один оптимальний розв'язок (таблиця 5.10):

$$X_{opt2} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок задачі знаходиться за формулою

$$X_{opt} = t \cdot X_{opt1} + (1-t) \cdot X_{opt2}, \text{ де } 0 \leq t \leq 1.$$

Запишемо елементи матриці загального розв'язку:

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 20t + (1-t) \cdot 60 = 60 - 40t, \quad x_{13} = 0, \quad x_{14} = 40t + (1-t) \cdot 0 = 40t,$$

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 0, \quad x_{23} = 60t + (1-t) \cdot 20 = 20 + 40t, \quad x_{24} = 70t + (1-t) \cdot 110 = 110 - 40t,$$

$$x_{31} = 30t + (1-t) \cdot 30 = 30,$$

$$x_{32} = 60t + (1-t) \cdot 20 = 20 + 40t, \quad x_{33} = 0t + (1-t) \cdot 40 = 40 - 40t, \quad x_{34} = 0.$$

Отже, загальний розв'язок:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 60 - 40t & 0 & 40t \\ 0 & 0 & 20 + 40t & 110 - 40t \\ 30 & 20 + 40t & 40 - 40t & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарна вартість перевезень складає 1550 од.

При розв'язуванні транспортної задачі може статися, що кількість базисних клітин менша, ніж $m + n - 1$.

У цьому випадку задача має вироджений розв'язок. Для можливого його виключення доцільно поміняти місцями постачальників і споживачів або ввести у вільну клітину з найменшим тарифом нульову поставку. Нуль розміщують в такій клітині, щоб у кожному рядку і кожному стовпчику було не менше однієї базисної клітини.

Розглянемо вироджуваність в транспортній задачі на прикладі.

Приклад 5.3. Фірма здійснює поставку пляшок на три заводи, що виробляють охолоджені напої. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 6000 пляшок, на складі 2 – 3000 пляшок і на складі 3 – 4000 пляшок. Першому заводу необхідно 4000 пляшок, другому – 5000 пляшок, третьому – 1000 пляшок. Матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

задана вартість перевезення однієї пляшки від кожного складу до кожного заводу.

Як необхідно організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною?

Розв'язання. Запишемо вихідні дані в транспортну таблицю і знайдемо початковий опорний план за методом найменшої вартості (таблиця 5.11). Кількість базисних клітин дорівнює 5, а $m + n - 1 = 6$. Отже, задача є виродженою.

Таблиця 5.11

$A_i \backslash B_j$	4000		5000		1000		3000		u_i
6000	(3)	6		4	(6)	9		8	0
			3000				3000		
3000	(3)	5		3		2	(1)	8	-1
			2000		1000				
4000		2		3	(4)	6	(1)	8	-1
	4000		0						
v_j	3		4		3		8		

Для виключення вироджуваності необхідно в яку-небудь клітину ввести нульову поставку. Така клітина стає умовно базисною. Її доцільно визначити при обчисленні потенціалів і вона повинна мати найменший тариф порівняно з іншими клітинами, які можуть бути умовно базисними. Отже, в нашому випадку такою кліткою буде A_3B_2 .

Всі оцінки додатні, отримали оптимальний розв'язок:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вартість транспортних витрат буде мінімальною і складає 52 000 од.

5.5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ПРОПУСКНУ ЗДАТНІСТЬ

Нехай при розв'язуванні транспортної задачі необхідно обмежити перевезення від постачальника з номером l до споживача з номером k . Можливі обмеження двох типів: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, де a і b – сталі величини.

Якщо $x_{lk} \geq a$, то необхідно перш, ніж розв'язувати задачу, зменшити запаси l -го постачальника і заявки k -го споживача на величину a (зарезервувати перевезення $x_{lk} = a$). В отриманому оптимальному розв'язку слід збільшити об'єм перевезення x_{lk} на величину a .

Якщо $x_{lk} \leq b$, то необхідно замість k -го споживача із заявками b_k ввести двох інших споживачів. Один з них із номером k повинен мати заявки $b'_k = b$, а другий з номером $n+1$ – заявки $b_{n+1} = b_k - b$. Вартості перевезень для цих споживачів залишаються попередніми, за виключенням вартості $c_{l,n+1}$, яка приймається рівною як завгодно великому числу M ($M \gg 1$). Після отримання оптимального розв'язку величини вантажів, які перевозяться до $(n+1)$ -го споживача, додаються до величин перевезень k -го споживача. Так як $c_{l,n+1} = M$ сама велика вартість перевезення, то в оптимальному розв'язку клітина $A_l B_{n+1}$ залишається вільною ($x_{l,n+1} = 0$) і об'єм перевезення x_{lk} не перевищить b .

Приклад 5.4. Розв'язати транспортну задачу, вихідні дані якої:

$$\vec{a} = (300; 400; 500), \vec{b} = (600; 500; 400), C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 \\ 3 & 11 & 13 \\ 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

При додаткових умовах: об'єм перевезення вантажу від другого постачальника до другого споживача повинен бути не менше 200 одиниць ($x_{22} \geq 200$), а від третього до першого – не більше 300 одиниць ($x_{31} \leq 300$).

Розв'язання. Транспортна таблиця задачі має вигляд:

$A_i \backslash B_j$	600	500	400
300	2	9	10
400	3	11	13
500	4	10	12

Для того щоб в оптимальному розв'язку об'єм перевезення x_{22} був не менше 200 одиниць, при розв'язуванні задачі будемо вважати, що запаси другого постачальника a_2 і заявки другого споживача b_2 менше фактичних на 200 одиниць. Після отримання оптимального розв'язку об'єм перевезення x_{22} збільшиться на 200 одиниць.

Для того щоб задовольнити вимогу $x_{31} \leq 300$, замість першого споживача введемо двох інших. Один з них під попереднім номером має заявки $b_1 = 300$ одиниць і попередні вартості перевезень. Другому надамо четвертого номеру. Його заявки дорівнюють $b_4 = 600 - 300 = 300$ одиниць і вартості перевезень ті ж самі, що і у першого споживача, за винятком c_{34} , яку приймемо рівною скільки завгодно великому числу M , тобто $c_{34} = M$. Після знаходження оптимального розв'язку задачі об'єми перевезень для четвертого споживача необхідно додати до відповідних об'ємів перевезень для першого споживача.

В результаті вказаних перетворень таблиця вихідних даних задачі набуде наступний вигляд:

$A_i \backslash B_j$	300	300	400	300
300	2	9	10	2
200	3	11	13	3
500	4	10	12	M

Далі задачу розв’язуємо звичайним методом потенціалів. Задача з неправильним балансом. Введемо фіктивного постачальника із запасами $a_4 = 300$ одиниць (таблиця 5.12).

Таблиця 5.12

$A_i \backslash B_j$	300	300	400	300	u_i
300	2 300	(9) 9	(8) 10	2 0	0
200	(0) 3	(12) 11	(12) 13	3 200	1
500	(-8) 4	300 10	200 12	($M-12$) M	10
300	(0) 0	(2) 0	200 0	100 0	-2
v_j	2	0	2	2	

Здійснивши зсув за циклом перерахунку відносно клітини A_3B_1 , для якої оцінка дорівнює $\gamma_{31} = -8$, отримуємо оптимальний розв’язок (таблиця 5.13).

Таблиця 5.13

$A_i \backslash B_j$	300	300	400	300	u_i
300	200	(1)	(0)	100	-2
200	(0)	(0)	(0)	200	-1
500	100	300	100	(M-4)	0
300	(8)	(2)	300	(8)	-12
v_j	4	10	12	4	

Запишемо оптимальний розв'язок вихідної задачі. Для цього збільшимо об'єм перевезення x_{22} на 200 одиниць і об'єднаємо об'єми перевезень четвертого споживача з об'ємами перевезень першого споживача. Отримуємо

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix},$$

$$z_{opt} = 2 \cdot 300 + 2 \cdot 200 + 11 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 10 \cdot 300 + 12 \cdot 100 = 7800.$$

5.6. ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

Наведемо економічний аналіз транспортної задачі на конкретному прикладі.

Приклад 5.5. Три торгових склади можуть постачати деякий виріб у кількості 9, 4 і 8 т. Величини попиту трьох магазинів роздрібною торгівлі на цей виріб дорівнюють 3, 5 і 6 т.

Яка мінімальна вартість транспортування від постачальника до споживача? Провести аналіз розв'язку при умові, що одиничні транспортні витрати дорівнюють в ум. од.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 8 \\ 1 & 20 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запаси складів: $\sum_{i=1}^3 a_i = 21$ т, потреби магазинів:

$\sum_{j=1}^3 b_j = 14$ т, маємо відкриту задачу. Введемо фіктивний магазин з попи-

том $b_4 = 7$ і тарифом 0 ум. од. (таблиця 5.14).

Таблиця 5.14

$A_i \backslash B_j$	3	5	6	7	u_i
9	(9) 10	1 20	6 5	2 0	0
4	(11) 2	4 10	(13) 8	(10) 0	-10
8	3 1	(0) 20	(2) 7	5 0	0
v_j	1	20	5	0	

Оцінка $\gamma_{32} = 0$, задача має альтернативний оптимум, і один з розв'язків має вигляд

$$X_{opt1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мінімальна вартість транспортних витрат $z_{opt} = 93$ ум. од.

Підсумковий розподіл перевезень, а також значення оцінок вільних клітин, які називають *тіньовими цінами*, можна використати при проведенні економічного аналізу. Тіньова ціна показує, на скільки збільшиться загальна вартість транспортних витрат, якщо у вільну клітину помістити один виріб. Наприклад, якщо прийдеться здійснити перевезення одного виробу з торгового складу 2 у роздрібний магазин 3, то збільшення вартості складатиме $\gamma_{23} = 13$ ум. од., що більше ніж тариф ван-

тажу клітини A_2B_3 , рівний 8 ум. од. Додаткове збільшення вартості транспортних витрат з'являється в зв'язку з перерозподілом перевезень. Складемо цикл перерахунку з вільною клітиною A_2B_3 і виконаємо зсув (рис. 5.3).

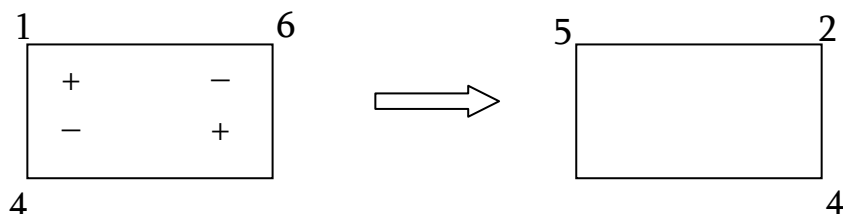


Рис. 5.3

Зміна витрат складає $4 \cdot 20 - 4 \cdot 10 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 72$ ум. од. або на один виріб $72 : 4 = 13$ ум. од.

Якщо тіньова ціна клітини дорівнює нулю ($\gamma_{23} = 0$), то задача має альтернативний оптимум. Перерозподілимо вантажі відносно клітини A_3B_2 (рис 5.4).

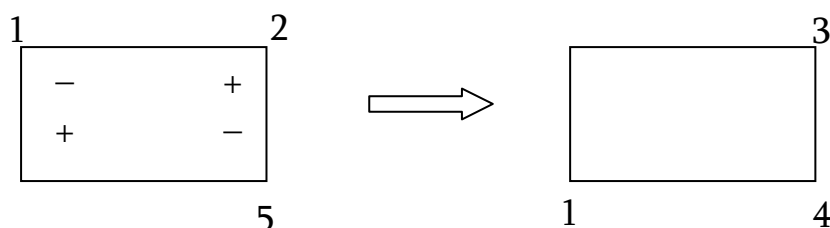


Рис. 5.4

Ще один оптимальний розв'язок задачі має вигляд

$$X_{opt2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічний аналіз можна провести і по іншим вільним клітинам.

Тіньові ціни вільних клітин можна використати в якості індикаторів змін вартості перевезень одного виробу або тарифу.

Наприклад, тіньова ціна вільної клітини A_3B_3 дорівнює $\gamma_{33} = 2$, а фактична ціна перевезення одного виробу – 7 ум. од. Отже, для того щоб використання цієї клітини у розподілі перевезення привело до зниження транспортних витрат, необхідно, щоб тариф цієї клітини був не більше $7 - 2 = 5$ ум. од.

Проведемо вартісний аналіз змін в базисних клітинах. При зниженні тарифу збільшення числа виробів у даній клітині вигідно. Якщо ж тарифи базисних клітин зростають, то при досягненні ними певного значення використання цієї клітини небажане і необхідно провести перерозподіл вантажів.

В якості прикладу визначимо допустимі зміни тарифу базисної клітини A_1B_3 . Тариф клітки дорівнює 5 ум. од. за один виріб. Зменшення цієї величини не буде впливати на об'єм перевезень, так як вказана кількість виробів в клітині задовольняє всю потребу магазину 3.

Якщо тариф клітки A_1B_3 стає більшим 5 ум. од., то при складанні циклів буде задіяна вільна клітина A_2B_3 з $\gamma_{23} = 13$ або A_3B_3 з $\gamma_{33} = 2$. В обох циклах перерахунку клітина A_1B_3 буде мати знак „–” і будь-яке збільшення тарифу спричинить зниження тіньової ціни вільних клітин A_2B_3 і A_3B_3 .

Зміна об'єму перевезень буде мати місце у випадку, якщо тариф клітини A_1B_3 зросте більше ніж на 2 ум. од. і перевищить 7 ум. од. При цьому тіньова ціна клітини A_3B_3 стає від'ємною та стає не вигідним використання клітини A_1B_3 .

Отже, для одержання оптимального розподілу перевезень тариф клітини A_1B_3 повинен змінюватись у діапазоні від 0 до 7 ум. од. Всередині вказаного проміжку відбувається лише зміна загальної вартості перевезень, а розподіл перевезень не змінюється.

5.7. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЗА КРИТЕРІЄМ ЧАСУ

Задача за критерієм часу виникає при перевезенні термінових вантажів. У деяких умовах, наприклад при транспортуванні певних видів товарів, в аварійних ситуаціях, у бойових обставинах, вартість перевезення має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення.

Як і в звичайній транспортній задачі, є m постачальників із запасами a_1, a_2, \dots, a_m та n споживачів, яким цей вантаж повинен бути доставлений у об'ємах b_1, b_2, \dots, b_n . Відомі інтервали часу t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), за які вантаж доставляється від кожного i -го постачальника кожному j -му споживачу. Треба скласти такий план перевезень вантажу, при якому запаси всіх постачальників вивозяться повністю, попит всіх споживачів задовольняється повністю і найбільший час доставки всіх вантажів є мінімальним.

Складемо математичну модель цієї задачі. Позначимо x_{ij} – об'єм вантажу, який перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача. Система обмежень задачі не відрізняється від системи обмежень звичайної транспортної задачі. Нехай $X = (x_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) – деякий опорний розв'язок задачі. Запишемо цільову функцію задачі. Позначимо через $T(X)$ найбільше значення елементів матриці $T = (t_{ij})$, які відповідають базисним клітинам таблиці: $T(X) = \max(t_{ij})$. Отже, за час $T(X)$ план перевезень буде виконаний повністю.

Математична модель транспортної задачі за критерієм часу має вигляд

$$T(X) = \max(t_{ij}) \rightarrow \min ,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i ,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Задача розв'язується в наступному порядку. Знаходиться початковий опорний розв'язок X_1 . Визначається значення цільової функції $T(X_1) = \max(t_{ij}) = t_{l_1 k_1}$. Всі вільні клітини, яким відповідає значення $t_{ij} > T(X_1)$, виключаються з розгляду (перекреслюються). Займати ці клітки недоцільно, так як збільшиться значення цільової функції. Щоб зменшити її значення, необхідно звільнити клітину $A_{l_1} B_{k_1}$, в якій t_{ij} досягає максимуму. Для цього будують так звані *розвантажувальні цикли*, які можуть включати у свій склад декілька вільних клітин. У кожному розвантажувальному циклі, починаючи з розвантажувальної клітини $A_{l_1} B_{k_1}$, розставляються знаки „-” і „+” та здійснюється зсув на величину $\theta = \min_{\text{„-”}}(x_{ij})$. Якщо вдається цю клітину розвантажити, то вона виключається з розгляду (закреслюється). Одержується новий опорний розв'язок X_2 , на якому значення цільової функції менше, ніж на X_1 . Далі знову намагаються розвантажити клітину, яка відповідає $T(X_2) = \max(t_{ij}) = t_{l_2 k_2}$. Процес продовжується до тих пір, доки можливість розвантажити відповідну клітину ще існує.

Приклад 5.6. Знайти мінімальний час на здійснення всіх перевезень для наступної задачі:

$$\vec{a} = (30; 40; 50; 60), \vec{b} = (20; 40; 50; 70), T = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 12 & 5 & 10 \\ 19 & 6 & 14 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо початковий опорний розв'язок X_1 діагональним методом (таблиця 5.15). Максимум цільової функції

$T(X_1) = \max(13, 8, 7, 9, 5, 10, 4) = 13$ досягається у клітині A_1B_1 . Перекреслимо клітини A_4B_1 і A_4B_3 , в яких час доставки вантажу $t_{41} = 19$ і $t_{43} = 14$ більше $T(X_1) = 13$.

Таблиця 5.15

$A_i \backslash B_j$	20	40	50	70
30	20	10		
40		30	10	
50			40	10
60				60

$A_i \backslash B_j$	20	40	50	70
30	20	10		
40		30	10	
50			40	10
60				60

Для покращення розв'язку розвантажуюємо клітину A_1B_1 за допомогою циклу $A_2B_1, A_1B_1, A_1B_2, A_2B_2$ (таблиця 5.15). В означеному циклі знаходимо $\theta = \min(20, 30) = 20$. Зробивши зсув за циклом, отримуємо другий опорний розв'язок X_2 (таблиця 5.16). Максимум цільової функції на цьому опорному розв'язку $T(X_2) = \max(8, 6, 7, 9, 5, 10, 4) = 10$ досягається у клітині A_3B_4 .

Таблиця 5.16

$A_i \backslash B_j$	20	40	50	70
30	13	30	7	11
40	20	10	10	8
50	5	12	40	10
60	19	6	14	60

Перекреслимо клітини A_1B_1 , A_1B_4 і A_3B_2 , в них час $t_{11} = 13$, $t_{14} = 11$ і $t_{32} = 12$ більше ніж $T(X_2) = 10$. Розвантажуюємо клітку A_3B_4 за допомогою циклу A_2B_4 , A_3B_4 , A_3B_3 і A_2B_3 . В означеному циклі знаходимо $\theta = \min(10, 10) = 10$. Здійснюючи зсув за циклом, отримуємо третій опорний розв'язок X_3 (таблиця 5.17).

Таблиця 5.17

$A_i \backslash B_j$	20	40	50	70
30	13	30	7	11
40	20	10	9	10
50	5	12	50	10
60	19	6	14	60

Максимум цільової функції на цьому опорному розв'язку $T(X_3) = \max(8, 6, 7, 8, 5, 4) = 8$ досягається у клітинах A_1B_2 і A_2B_4 . Перекреслимо клітини A_2B_3 і A_3B_4 , в яких час більше, ніж $T(X_3) = 8$. За допомогою

невикреслених клітин, які залишилися, розвантажити клітини A_1B_2 і A_2B_4 не вдається, тому X_3 є оптимальним розв'язком:

$$T(X_{opt}) = 8 \text{ при } X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

5.8. ЗАСТОСУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Алгоритм і методи розв'язування транспортної задачі можуть бути використані при розв'язуванні деяких економічних задач, які не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний зміст в залежності від конкретної економічної задачі.

Є цілий клас задач, які називаються розподільчими, окремим випадком яких є транспортна задача, і розв'язування яких зводиться до транспортної моделі.

Загальна розподільча задача має вигляд

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow opt, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

До задач розподільчого типу відносяться наступні:

1. Оптимальне закріплення за станками операцій по обробці деталей. В них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції треба використовувати кожен з станків, щоб обробляти максимальну кіль-

кість деталей. Так як транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з від'ємним знаком.

2. Оптимальне призначення, або проблема вибору. Є m механізмів (виконавців), які можуть виконувати m різних робіт з продуктивністю c_{ij} . Задача дозволяє визначити, який механізм (виконавець) і на яку роботу треба призначити, щоб досягти максимальної продуктивності.
3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.
4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшив їх продуктивність.
5. Розв'язання задач за допомогою методу заборони перевезень використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника за якимись причинами не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, якщо надати відповідній клітині достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітку не будуть виконуватись перевезення.

Розглянемо задачу про вибір оптимального варіанту використання виробничого обладнання.

Приклад 5.7. На підприємстві є три групи станків, кожна з яких може виконувати п'ять операцій по обробці деталей (операції можуть виконуватись в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи станків відповідно складає 100, 250, 180 год. Кожна операція повинна виконуватись відповідно 100, 120, 70, 110, 130 год.

Визначити, скільки часу і на яку операцію треба використати кожну групу станків, щоб обробити максимальну кількість деталей.

Продуктивність кожної групи станків на кожну операцію задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом розв'язування закритої транспортної задачі.

Так як в задачі треба знайти максимум, а згідно алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1) (таблиця 5.18).

Таблиця 5.18

$B_j \backslash A_i$	100	120	70	110	130	u_i
100	40 -3	(3) -5	(2) -11	(-3) -10	60 -5	0
250	60 -5	120 -10	70 -15	(6) -3	(5) -2	-2
180	(4) -4	(5) -8	(12) -6	110 -12	70 -10	-5
v_j	-3	-8	-13	-7	-5	

Так як $\gamma_{14} = -3 < 0$, перерозподілимо вантажі відносно клітини A_1B_4 (таблиця 5.19).

Таблиця 5.19

$B_j \backslash A_i$	100	120	70	110	130	u_i
100	40	(3)	(2)	60	(3)	0
250	60	120	70	(9)	(8)	-2
180	(1)	(2)	(9)	50	130	-2
v_j	-3	-8	-13	-10	-8	

Знайдений розв'язок є оптимальним, так як всі оцінки вільних клітин додатні. Отже,

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Отже, на першій групі станків доцільно виконувати операції 1 та 4 тривалістю 40 і 60 год. відповідно, на другій групі – операції 1, 2 та 3 тривалістю 60, 120 і 70 год. відповідно, на третій групі – операції 4 та 5 тривалістю 50 і 130 год. відповідно. При цьому максимальна кількість оброблених деталей складає 5170 шт.

Розглянемо у загальному випадку задачу про призначення: є n робіт та n виконавців цих робіт, продуктивність кожного з яких ($i = 1, 2, \dots, n$) на виконання окремої роботи ($j = 1, 2, \dots, n$) дорівнює c_{ij} . Необхідно так розподілити виконавців по роботах (за принципом: один виконавець – одна робота), щоб загальна їх продуктивність була максимальною. Нехай $x_{ij} = 1$, якщо i -й робітник виконуватиме j -ту роботу, і $x_{ij} = 0$ в протилежному випадку. Тоді цільова функція задачі запишеться

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max.$$

Обмеження задачі випливають з принципу „одна робота – один виконавець”, а саме:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, маємо задачу максимізації транспортного типу, де всі $a_i = b_j = 1$. Особливістю цієї задачі є те, що її опорні плани будуть завжди вироджені. Справді, оскільки $m = n$, а $a_i = b_j = 1$, то заповнити одиницями можна лише n клітин, в той час як загальна кількість базових клітин дорівнюватиме $2n - 1$. Отже, $n - 1$ клітина залишатиметься незаповненою. Ці особливості задачі про призначення слід мати на увазі при розв'язуванні її методом потенціалів.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. За яких умов транспортна задача називається закритою, за яких – відкритою?
4. Як відкриту транспортну задачу звести до закритої?
5. Що таке опорний план перевезення? Які методи його обчислення ви знаєте?
6. Скільки компонентів повинно бути в опорному плані? За яких умов транспортна задача називається виродженою?
7. Що таке цикл перерахунку у транспортній таблиці?
8. Як обчислюють потенціали?
9. Умова оптимальності розв'язку транспортної задачі.
10. Назвіть етапи розв'язування методом потенціалів.
11. За яких умов транспортна задача має альтернативний оптимум? Як записується загальний розв'язок при наявності двох альтернативних оптимумів?
12. Назвіть особливості розв'язування транспортних задач з обмеженнями на пропускну здатність.
13. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі за критерієм часу.
14. Які задачі лінійного програмування відносяться до задач розподільчого типу?

ВПРАВИ

Розв'язати транспортні задачі методом потенціалів:

$$5.1. \vec{a} = (9; 16; 5), \vec{b} = (11; 7; 8; 4), C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5.2. \vec{a} = (7; 13; 20), \vec{b} = (10; 10; 5; 8; 7), C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$5.3. \vec{a} = (100; 200; 400; 200), \vec{b} = (100; 200; 200; 300), C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5.4. \vec{a} = (200; 400; 600; 200), \vec{b} = (200; 400; 400; 800), C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$5.5. \vec{a} = (300; 200; 100; 200), \vec{b} = (300; 200; 300; 100), C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix};$$

$$5.6. \vec{a} = (200; 200; 300; 300), \vec{b} = (200; 300; 400; 200), C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$5.7. \vec{a} = (5; 10; 15; 10), \vec{b} = (10; 15; 15; 10; 10), C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5.8. \vec{a} = (30; 60; 90; 60), \vec{b} = (30; 90; 60; 90; 30), C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$5.9. \vec{a} = (10; 5; 5; 10; 15), \vec{b} = (5; 10; 15; 15; 15), C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5.10. \vec{a} = (5; 5; 10; 15; 10), \vec{b} = (5; 5; 10; 10; 5), C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 13 \\ 6 & 3 & 7 & 6 & 10 \\ 10 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5.11. \vec{a} = (200; 300; 200; 200; 100), \vec{b} = (200; 200; 100; 200), C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5.12. \vec{a} = (10; 30; 60; 10; 60), \vec{b} = (10; 30; 30; 30; 40), C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5.13. \vec{a} = (20; 40; 80; 40; 20), \vec{b} = (20; 20; 40; 40; 40), C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$5.14. \vec{a} = (500; 1500; 500; 1500; 500), \vec{b} = (1000; 500; 1500; 2000), C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$5.15. \vec{a} = (25; 50; 75; 25; 75), \vec{b} = (50; 25; 50; 75), C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 10 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5.16. \vec{a} = (150; 300; 250; 150), \vec{b} = (150; 200; 200; 400), C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \end{pmatrix};$$

$$5.17. \vec{a} = (20; 30; 10; 30; 30), \vec{b} = (20; 30; 20; 20; 10), C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5.18. \vec{a} = (20; 40; 60; 40), \vec{b} = (40; 60; 40; 60; 20), C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 9 & 12 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$5.19. \vec{a} = (150; 250; 250; 150), \vec{b} = (300; 150; 300; 150), C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5.20. \vec{a} = (100; 200; 300; 400), \vec{b} = (200; 300; 200; 300; 100), C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати транспортні задачі з урахуванням обмежень на перевезення вантажів:

5.21. $x_{24} \leq 500$, $x_{32} \geq 500$, $\vec{a} = (500; 1500; 1000; 1500)$, $\vec{b} = (500; 1000; 500; 1500)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

5.22. $x_{44} \leq 200$, $x_{33} \geq 100$, $\vec{a} = (100; 200; 300; 400)$, $\vec{b} = (300; 300; 300; 300)$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

5.23. $x_{12} \leq 500$, $x_{33} \geq 1000$, $\vec{a} = (1000; 1500; 2000; 500)$, $\vec{b} = (2000; 1000; 2000; 1000)$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

5.24. $x_{31} \leq 50$, $x_{14} \geq 50$, $\vec{a} = (100; 50; 100; 50)$, $\vec{b} = (100; 100; 50; 100)$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

5.25. $x_{41} \leq 100$, $x_{33} \geq 50$, $\vec{a} = (100; 50; 100; 200)$, $\vec{b} = (200; 100; 200; 50)$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$5.26. x_{41} \leq 50, \quad x_{33} \geq 100, \quad \vec{a} = (50; 100; 200; 100), \quad \vec{b} = (100; 100; 200; 200),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5.27. x_{41} \leq 20, \quad x_{32} \geq 30, \quad \vec{a} = (30; 30; 60; 60), \quad \vec{b} = (30; 60; 30; 90), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5.28. x_{24} \leq 10, \quad x_{42} \geq 10, \quad \vec{a} = (10; 20; 10; 40), \quad \vec{b} = (10; 20; 20; 40), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 15 & 9 \\ 5 & 6 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати транспортні задачі за критерієм мінімуму часу:

$$5.29. \vec{a} = (10; 15; 25), \quad \vec{b} = (5; 10; 20; 15), \quad T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5.30. \vec{a} = (200; 100; 200; 300), \quad \vec{b} = (200; 200; 200; 200), \quad T = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.31. Розв'язати транспортну задачу при умові, що перевезення від другого постачальника до другого споживача та від третього постачальника до першого споживача тимчасово закриті: $\vec{a} = (6; 3; 4)$,

$$\vec{b} = (5; 5; 3), \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 5 & M & 2 \\ M & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.32. У трьох пунктах виробництва є однакова продукція в об'ємі 200, 170, 130 т. Ця продукція повинна бути доставлена споживачам у кількості 50, 220, 80, 110 і 140 т. Вартості перевезень одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача задані матри-

цею $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. У зв'язку з неплатоспроможністю пере-

везення від першого пункту виробництва до першого пункту споживання та від другого пункту виробництва до третього пункту споживання тимчасово закриті. Скласти оптимальний план перевезень, при якому сумарні витрати на них мінімальні.

5.33. Знайти оптимальний розподіл трьох видів механізмів, які є у кількостях 45, 20 і 35 між чотирма ділянками робіт, потреби яких складають відповідно 10, 20, 30, 40, при наступній матриці продуктивності кожного з механізмів на відповідній ділянці роботи:

$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Нульові елементи означають, що даний механізм

на даній ділянці роботи не може бути використаний.

5.34. Скласти оптимальний розподіл спеціалістів чотирьох профілів, які є у кількостях 60, 30, 45, 25 між п'яти видами робіт. Потреби у спеціалістах для кожного виду робіт відповідно дорівнюють 20, 40, 25, 45

і 30. Матриця $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ характеризує ефективність вико-

ристання спеціаліста на даній роботі.

5.35. На трьох ділянках посівних площ розміром у 300, 500 і 400 га можуть бути посаджені 4 види сільськогосподарських культур, які необхідно виростити у кількості, відповідно 600, 1500, 225 і 1250 т.

Матриця $C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 50 & 40 & 15 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$ характеризує собівартість 1 т при виро-

щуванні i -ї культури на k -й ділянці. Скласти оптимальний план

посіву, якщо врожайність за різними культурами не залежить від ділянки посіву і складає 20, 30, 15 та 50 ц/га.

5.36. В наступних задачах скласти модель та знайти оптимальну програму обробки трьох виробів (А, Б, В) на двох взаємозамінних станках (I, II) при наступних вихідних даних:

Станки	Норми часу, год/шт.			Робочий час, год.	Собівартість, грн/год.		
	А	Б	В		А	Б	В
I	2	5	3	200	3	2	4
II	4	7	5	350	2,5	2	3
План, шт.	80	30	10	Прибуток, грн/шт.	20	40	30

В якості критерію оптимальності вибрати:

- а) мінімум собівартості;
- б) мінімум витрат часу роботи станків;
- в) максимум прибутку.

5.37. Фірма об'єднує три підприємства, кожне з яких виробляє три види виробів. Продуктивність кожного підприємства при виготовленні одного виробу (в грошових одиницях) характеризується наступною таблицею:

	Виріб		
Підприємство	15	6	12
	6	9	13
	8	11	2

Враховуючи необхідність спеціалізації кожного підприємства тільки на одному виробі, розподілити виробництво виробів за підприємствами так, щоб сумарна продуктивність фірми при цьому розподілі була максимальною.

5.38. Є 5 видів робіт і 5 працівників, кожен з яких може виконати будь-яку з цих робіт. При цьому кожен працівник виконує лише одну ро-

боту. Продуктивності працівника A_i при виконанні роботи B_k подані в наступній таблиці:

$A_i \backslash B_k$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	2	2	1
A_2	4	5	3	1	3
A_3	4	3	1	1	1
A_4	3	1	2	2	2
A_5	1	3	1	2	1

Розподілити працівників на роботу так, щоб сумарна продуктивність була максимальною.

РОЗДІЛ 6

ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ І МЕТОДІВ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких змінні можуть набувати тільки цілих числових значень. Необхідність цієї умови стане зрозумілою, коли згадати, що багато видів ресурсів виробництва можуть бути визначені кількісно лише цілими числами: люди, машини, верстати, тварини і т. п. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень – 0 або 1 (булеві, або бінарні, змінні).

Умова цілочислових значень є, по суті, нелінійною і може бути в задачах, що містять як лінійні так і нелінійні функції. Вимога цілочислових значень часто накладається лише на частину змінних. Такі задачі називаються *частково-цілочисловими*. Цілочислові задачі є розділом більш широкого класу *дискретних задач*, змінні яких приймають значення деякої дискретної, наперед обумовленої, числової множини, наприклад множини раціональних чисел, множини чисел 2^k , де $k = 1, 2, \dots, n$ і т. п. Назвемо деякі задачі дискретного програмування: планування перевезення вантажів в контейнерах, об'єми яких приймають дискретні значення; планування виробництва за умов, коли використувані агрегати мають певні дискретні виробничі потужності, наприклад, потужності електродвигунів; планування площ під розташування певних агрегатів з різними дискретними зонами обслуговування.

Незважаючи на інтенсивні дослідження, які проводились протягом останніх десятиріч, відомі обчислювальні методи розв'язування задач

цілочислового програмування далекі від досконалості. На даний час не існує надійних обчислювальних алгоритмів розв'язування таких задач.

У цьому розділі коротко розглядаються так звані *цілочислові лінійні задачі*, тобто такі, в яких крім вимоги цілочислових значень усі обмеження і цільова функція мають лінійний вигляд.

Слід відмітити, що класична транспортна задача і деякі інші задачі транспортного типу „автоматично” забезпечують розв'язування задачі в цілих числах (якщо, звичайно, цілочислові параметри умов). Однак у загальному випадку умова цілочислових значень, яка додається до звичайних задач лінійного програмування, суттєво ускладнює її розв'язування.

Здавалось на перший погляд, що для задач цілочислового програмування розв'язок можна знайти, округливши знайдений розв'язок відповідної лінійної задачі, утвореної з заданої відкиданням умови цілочислових значень. Слід зазначити, що таким способом побудований план часто дуже далекий від оптимального, що видно з рис. 6.1.

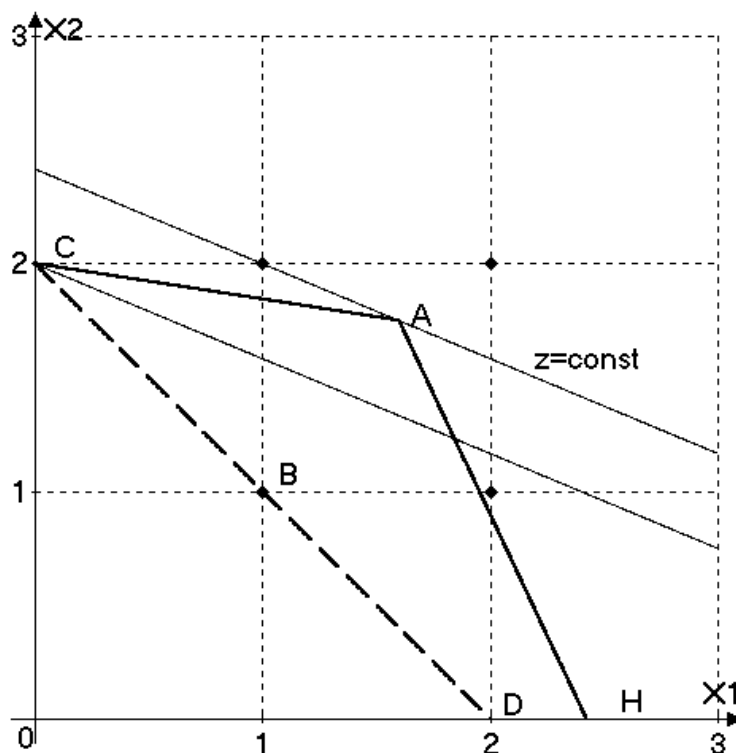


Рис. 6.1

Справді, оптимум без урахування умови цілочислових значень дає точка $A(1,6;1,75)$. Округлення до цілих значень координат, які задовольняють обмеження, дає точку $B(1;1)$.

Проте, справжнім оптимальним планом цілочислової задачі є точка $C = (0;2)$.

Зауважимо, що множиною планів лінійної цілочислової задачі буде система точок з цілочисловими координатами, які належать опуклому многограннику допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Якби можна було визначити гіперплощини, які проходять через зовнішні точки згаданої системи цілочислових точок так, що всі інші точки згаданої системи потрапили в середину нового опуклого многогранника, то задачу можна було б розв'язати як звичайну лінійну за допомогою симплексного методу. Справді, у цьому разі всі крайні точки опуклого многогранника були б цілочисловими і розв'язок можна було б знайти за скінчене число кроків. На рис. 6.1 шуканою гіперплощиною є пряма CD . Вона відтинає від множини планів лінійної задачі $\Omega = OCAH$ частину $CAHD$, яка не містить цілочислових точок, внаслідок чого утворюється множина планів OCD , усі вершини якої мають цілочислові координати. Ця ідея у вигляді методу послідовного відтинання тих частин початкового многогранника планів нецілочислової задачі, що не містять допустимих цілочислових планів, лежить в основі методу Гоморі, який ми розглянемо в наступному параграфі.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовуються три основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;
- наближені методи.

Методи розв'язування задач цілочислового програмування базуються на використанні обчислювальних можливостей методів лінійного

програмування. Зазвичай алгоритми цілочислового програмування містять три кроки.

Крок 1. „Послаблення” простору допустимих розв’язків задачі цілочислового лінійного програмування шляхом заміни будь-якої бінарної змінної x неперервним обмеженням $0 \leq x \leq 1$ і відкиданням вимоги цілочислових значень для всіх інших змінних. Внаслідок отримується звичайна задача лінійного програмування.

Крок 2. Розв’язування задачі лінійного програмування і знаходження її оптимального розв’язку.

Крок 3. Маючи неперервний оптимальний розв’язок, додають спеціальні обмеження, які ітераційним шляхом змінюють простір допустимих розв’язків задачі лінійного програмування таким чином, щоб нарешті отримати оптимальний розв’язок, який задовольняє вимогам цілочислових значень.

Методи відтинання, основним з яких є метод Гоморі, реалізуються шляхом побудови на певних етапах алгоритму додаткових лінійних обмежень-нерівностей, які і визначають відтинаючі гіперплощини. Додаткові обмеження повинні задовольняти двом необхідним умовам.

Умова правильності полягає в тому, що додатковому обмеженню повинні задовольняти всі плани цілочислової задачі, тобто всі цілочислові плани відповідної нецілочислової задачі.

Умова відтинання полягає в тому, що цьому обмеженню не повинен задовольняти план відповідної нецілочислової задачі.

Різні алгоритми методів відтинання відрізняються саме способами побудови додаткових обмежень. Вони застосовуються лише до лінійних цілочислових (чи дискретних) задач та мають ряд недоліків, серед яких відзначимо повільну збіжність. Однак для розв’язування певних типів задач вони можуть успішно застосовуватись.

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків. Тобто вони реа-

лізують процедуру цілеспрямованого пошуку оптимуму на дискретній множині планів задачі, на кожному кроці якого виключається з розгляду значна кількість неоптимальних планів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і границь. Суть методу полягає в тому, що множину планів задачі розбивають на ряд підмножин. Для кожної з цих множин знаходять оцінку цільової функції по оптимуму, що являє собою самотійну, але, як правило, більш просту, ніж основна, задачу. Підмножини, які дають явно погані оцінки, не розглядаються. Далі процедуру повторюють доти, поки не знаходять підмножину, яка складається з одного оптимального плану.

Способи розбиття сукупностей планів на підмножини та методи одержання оцінок цільової функції можуть бути дуже різноманітними і їх вибір залежатиме від конкретних умов дослідження. Серед комбінаторних методів можна відмітити метод послідовного аналізу варіантів, метод вектора спаду і метод Беллмана, який застосовується в динамічному програмуванні.

Комбінаторні методи використовуються і для розв'язування дискретних нелінійних задач. Певним їх недоліком є те, що кожен метод виявляється найкращим для досить вузького класу.

Для розв'язування задач із булевими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є булевими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Наближені методи знаходження оптимального плану цілочислових задач часто дозволяють за меншого обсягу обчислень та спрощення відповідних алгоритмів знайти шуканий розв'язок. Самий простий з них – звичайний метод лінійного програмування. У випадку, якщо компоненти оптимального розв'язку виявляються нецілочисловими, їх округлюють до найближчих цілих чисел.

Цей метод застосовується тоді, коли окрема одиниця сукупності складає малу частину об'єму всій сукупності. В протилежному випадку

округлення може привести до досить далекого від оптимального цілочислового значення (рис. 6.1). Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві дістали, що воно потребує 1235,6 корів. Округливши це значення корів до 1236, не припустимося значної похибки. Проте, скажімо, у разі розв'язування як неперервної задачі про сушильний цех, що може бути обладнаний агрегатами трьох типів, дістали $x_1 = 2,6$, $x_2 = 4,3$ і $x_3 = 0,7$, будь які округлення недопустимі.

Загальна задача цілочислового лінійного програмування записується так:

Знайти максимум або мінімум функції

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_{ij} \rightarrow \max(\min); \quad (6.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (6.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (6.3)$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

6.2. МЕТОД ГОМОРІ

Існує два алгоритми методу Гоморі. Перший алгоритм застосовується для розв'язування повністю цілочислової задачі, в той час як другий – придатний для розв'язування і частково цілочислових задач. Дальтон та Ллевелін модифікували другий алгоритм Гоморі для розв'язування задач дискретного програмування, в яких кожна чи деякі змінні x_j повинні приймати значення чисел з певних дискретних множин $x_j \in M_j$, $M_j = (m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jk})$.

Введемо означення.

Цілою частиною числа a називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому (позначають $[a]$).

Дробовою частиною числа a називають різницю між числом a та її цілою частиною (позначають $\{a\}$):

$$\{a\} = a - [a].$$

Наприклад, для числа $\frac{7}{4}$ ціла частина $\left[\frac{7}{4}\right] = 1$, дробова частина дорівнює $\left\{\frac{7}{4}\right\} = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ ціла частина $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, дробова частина дорівнює $\left\{-\frac{9}{5}\right\} = -\frac{9}{5} - (-2) = \frac{1}{5}$.

Очевидно, що $\{a\} \geq 0$, причому $\{a\} = 0$ тоді і тільки тоді, коли a – ціле число.

В теорії чисел для дробової частини числа виводять такі властивості:

- 1) $\{a + b\} \leq \{a\} + \{b\}$;
- 2) якщо $k \geq 0$ – ціле, то $\{k \cdot a\} \leq k \cdot \{a\}$.

Властивості 1) і 2) дають змогу записати нерівність

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}, \quad (6.5)$$

яку називають нерівністю Гоморі. Вона відіграє важливу роль у пошуку цілочислових розв'язків. Наприклад, обмеження задачі має вигляд:

$$2,3x_1 + 0,7x_2 - 1,4x_3 + x_4 = 9,1.$$

Нерівність Гоморі перетворює його в інше обмеження:

$$\{2,3\}x_1 + \{0,7\}x_2 + \{-1,4\}x_3 + \{1\}x_4 \geq \{9,1\},$$

$$0,3x_1 + 0,7x_2 + 0,6x_3 \geq 0,1.$$

Перший алгоритм методу Гоморі.

1. Знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочислових значень змінних, тобто задачі (6.1) – (6.3).

2. Якщо оптимальний план цілочисловий, то задача розв'язана. У протилежному випадку вибирають базисну змінну з найбільшою дробовою частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складають нерівність Гоморі (6.5), яка й буде додатковим обмеженням. Це додаткове обмеження задовольняє умові правильності та умові відтинання.
3. Додаткове обмеження-нерівність за допомогою введення додаткової невід'ємної цілочислової змінної перетворюють у рівносильне обмеження-рівняння

$$-\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j + x_{n+1} = -b_i$$

і включають його в систему обмежень (6.2).

4. Здобуту розширену задачу розв'язують і повертаються до пункту 2).

Процес повторюється доти, доки розв'язок не буде цілочисловим або симплексні таблиці не покажуть, що задача не має розв'язку.

Якщо в процесі розв'язування з'явиться рівняння, що виражає базисну змінну через вільні, з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння не має розв'язків в цілих числах. В цьому випадку і дана задача не має цілочислового оптимального розв'язку.

Важливо підкреслити, що застосування першого алгоритму Гоморі передбачає, що всі змінні, включаючи додаткові, є цілочисловими. Це означає, що даний алгоритм можна застосовувати тільки до розв'язування повністю цілочислових задач.

Детальніше перший алгоритм Гоморі розглянемо на прикладі.

Приклад 6.1. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 20 тис. грн. Обладнання можна розмістити на площі, меншій ніж 38 м². Підприємство може замовити обладнання двох типів *A* та *B* з такими даними:

A – вартість 5 тис. грн.; потребує площі 8 м²; випускає 7 тис. од. продукції за зміну;

B – вартість 2 тис. грн.; потребує площі 4 м²; випускає 3 тис. од. продукції за зміну.

Треба розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, який би забезпечив максимальний обсяг продукції.

Розв'язання. Позначимо через x_1 кількість одиниць обладнання A , через x_2 – B , тоді математичну модель задачі формуємо таким чином:

знайти максимум цільової функції

$$z = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

за таких обмежень:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 38,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

Запишемо канонічну форму задачі:

$$z - 7x_1 - 3x_2 = 0,$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38,$$

$$x_j \geq 0 \text{ – цілі, } j = 1, 2, 3, 4.$$

Знайдемо розв'язок задачі без накладання умови цілочислових значень змінних. Результати обчислень подані в таблиці 6.1:

Таблиця 6.1

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4
<i>I</i>	0	z	0	-7	-3	0	0
	1	x_3	20	$\boxed{5}$	2	1	0
	2	x_4	38	8	4	0	1
<i>II</i>	0	z	28	0	-1/5	7/5	0
	1	x_1	4	1	2/5	1/5	0
	2	x_4	6	0	$\boxed{4/5}$	-8/5	1
<i>III</i>	0	z	59/2	0	0	1	1/4
	1	x_1	1	1	0	1	-1/2
	2	x_2	15/2	0	1	-2	5/4

Остання симплексна таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисловим. Тому переходимо до п.2 алгоритму.

Дробовому плану відповідає обмеження

$$x_2 - 2x_3 + 5/4 x_4 = 15/2.$$

Нерівність Гоморі для нього має вигляд:

$$1/4 x_4 \geq 1/2.$$

Згідно п.3 алгоритму перетворюємо нерівність Гоморі у рівність

$$-\frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

і для зменшення обчислень дописуємо її до канонічної форми оптимальної симплексної таблиці:

$$z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4,$$

$$x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1,$$

$$x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2},$$

$$-\frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2},$$

$$x_j \geq 0 \text{ – цілі, } j = 1, 2, \dots, 5.$$

Далі розв'язуємо отриману розширену задачу (таблиця 6.2):

Таблиця 6.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	59/2	0	0	1	1/4	0
	1	x_1	1	1	0	1	-1/2	0
	2	x_2	15/2	0	1	-2	5/4	0
	3	x_5	-1/2	0	0	0	-1/4	1
II	0	z	29	0	0	1	0	1
	1	x_1	2	1	0	1	0	2
	2	x_2	5	0	1	-2	0	5
	3	x_4	2	0	0	0	1	-4

Оскільки у нульовому рядку симплексної таблиці немає від'ємних чисел, то план оптимальний. Крім того, він цілочисловий.

$$\vec{X}_{opt} = (2, 5, 0, 2, 0), z_{\max} = 29.$$

Задачу розв'язано: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $z_{\max} = 29$.

У даному прикладі оптимальне значення можна знайти за допомогою заокруглення на останній ітерації симплексної таблиці 6.1. Але просте заокруглення дає менше значення цільової функції:

$$x_1 = 1, x_2 = 7, z = 7 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 28.$$

Другий алгоритм методу Гоморі.

Застосовується для частково цілочислових задач лінійного програмування і відрізняється від першого алгоритму лише способом визначення коефіцієнтів додаткового обмеження, яке має форму аналогічну нерівності Гоморі (6.5).

Нехай, умова цілочислових значень накладена на перші n_1 компонент плану задачі ($n_1 < n$). Позначимо коефіцієнти при змінних x_j пра-

вільного відтинання в другому алгоритмі Гоморі значком „штрих”, тобто a'_{ij} , так що замість (6.5) запишемо

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j \geq \{b_i\},$$

де коефіцієнти a'_{ij} слід визначити за формулами:

- $a'_{ij} = \frac{\{b_i\}}{1 - \{b_i\}} (1 - \{a_{ij}\})$ для $j \leq n_1$ та $\{a_{ij}\} > \{b_i\}$;
- $a'_{ij} = \{a_{ij}\}$ для $j \leq n_1$ та $\{a_{ij}\} \leq \{b_i\}$;
- $a'_{ij} = a_{ij}$ для $j \geq n_1 + 1$ та $a_{ij} \geq 0$;
- $a'_{ij} = \frac{\{b_i\}}{1 - \{b_i\}} (-a_{ij})$ для $j \geq n_1 + 1$ та $a_{ij} < 0$.

Алгоритм Дальтона-Ллевеліна.

Застосовується для розв'язування задач *дискретного лінійного програмування*, де змінні x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) означені на дискретній множині чисел $M_j = m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{lj}$ (кількість елементів l в множині може бути різним для кожної змінної x_j).

Нехай, в оптимальному плані відповідної недискретної задачі змінна x_{k+i} приймає недопустиме значення $m_{s,k+i} < x_{k+i} < m_{s+1,k+i}$. (Нагадаємо, що перші k змінних є вільними, а останні $n - k = m$ – базисними, де m – кількість основних обмежень задачі). Тоді правильне відтинання має вигляд:

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j \geq b_i - m_{s,k+i},$$

де коефіцієнти a'_{ij} визначаються за формулами:

- $a'_{ij} = a_{ij}$, якщо $a_{ij} \geq 0$;
- $a'_{ij} = \frac{b_i - m_{s,k+i}}{m_{s+1,k+i} - b_i} (-a_{ij})$, якщо $a_{ij} < 0$.

6.3. МЕТОД ВІТОК І ГРАНИЦЬ

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є *метод віток і границь* – один з комбінаторних методів. Його суть полягає у впорядкованому переборі варіантів і розгляданні лише тих з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, та відкиданні безперспективних варіантів.

Алгоритм методу віток і границь такий: множину допустимих планів деяким способом розбивають на підмножини, кожна з яких таким же способом знову розбивається на підмножини. Процес продовжується до тих пір, поки не отримується оптимальний цілочисловий розв'язок вихідної задачі.

Розглянемо задачу цілочислового програмування (6.1) – (6.4). Нехай задача є задачею максимізації. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, розв'язується послаблена задача (6.1) – (6.3) без умови цілочислових значень змінних (позначимо її ЛПО). З цією метою застосовується симплексний метод.

Задамо нижню границю оптимального значення цільової функції z вихідної задачі рівною $-\infty$ (у випадку задачі мінімізації в алгоритмі необхідно замінити нижню границю верхньою, початкове значення якої $+\infty$). Нехай для визначеності, що тільки одна компонента x_s^* оптимального плану задачі ЛПО не цілочислова. Тоді з області допустимих планів задачі ЛПО виключається область

$$[x_s^*] < x_s < [x_s^*] + 1,$$

де $[x_s^*]$ – ціла частина числа x_s^* . В результаті із задачі ЛПО формують дві задачі ЛП1 і ЛП2, які відрізняються одна від одної тим, що в задачі ЛП1 додано обмеження $x_s \leq [x_s^*]$, а в задачі ЛП2 – обмеження $x_s \geq [x_s^*] + 1$. Це означає, що симплексним методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

$$\text{ЛП1: } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_s \leq [x_s^*];$$

$$\text{ЛП2: } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_s \geq [x_s^*] + 1.$$

Якщо ми продовжимо „розумно” виключати області, які не містять цілочислових розв’язків, шляхом введення відповідних обмежень, то врешті-решт отримуємо задачу лінійного програмування, оптимальний план якої задовольняє умові цілочислових значень змінних. Іншими словами, будемо розв’язувати вихідну цілочислову задачу шляхом розв’язування послідовності неперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_s \leq [x_s^*]$ і $x_s \geq [x_s^*] + 1$ взаємно виключають одне інше, так що задачі ЛП1 і ЛП2 необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування. В цьому випадку x_s називається *змінною розгалуження*.

Оптимальний план вихідної цілочислової задачі знаходиться в області допустимих планів або задачі ЛП1, або задачі ЛП2. Отже, обидві задачі повинні бути розв’язані.

Якщо один із знайдених оптимальних планів задач ЛП1, ЛП2 задовольняє умові цілочислових значень, то цей план є розв’язком вихідної підзадачі. Інакше, пошук розв’язку триває.

Для подальшого розгалуження беруть задачу з найбільшим значенням цільової функції (і навпаки – з найменшим значенням цільової

функції в разі її мінімізації). Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку.

Алгоритм методу віток і границь безпосередньо поширюється на задачі частково-цілочислового лінійного програмування. Якщо деяка змінна є неперервною, то її просто не обирають у якості змінної розгалуження. Допустима підзадача визначає нову границю для значення цільової функції, якщо значення дискретних змінних є цілочисловими і значення цільової функції поліпшено у порівнянні з поточною границею.

Розглянемо застосування методу віток і границь на прикладі.

Приклад 6.2.

$$\begin{aligned} z &= 350x_1 + 150x_2 \rightarrow \max, \\ 25x_1 + 10x_2 &\leq 100, \\ 40x_1 + 20x_2 &\leq 190, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &- \text{цілі.} \end{aligned}$$

Розв'язання. Відкинувши умову цілочислових значень змінних, дістанемо симплексним методом розв'язок задачі ЛПО (пропонуємо читачеві зробити це самостійно):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 7\frac{1}{2}, \quad z = 1475.$$

Отже, допустиме ціле значення змінної x_2 має задовольняти одну з нерівностей

$$x_2 \leq \left\lceil 7\frac{1}{2} \right\rceil = 7 \quad \text{або} \quad x_2 \geq \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 8.$$

Далі приєднуємо до останньої симплексної таблиці задачі ЛПО кожне з цих обмежень і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі ЛП1 (з додатковим обмеженням $x_2 \leq 7$) і ЛП2 (з додатковим обмеженням $x_2 \geq 8$). Для задачі ЛП1 оптимальним буде розв'язок:

$$x_1 = 1,2, x_2 = 7, z = 1470.$$

Для задачі ЛП2:

$$x_1 = 0,75, x_2 = 8, z = 1462,5.$$

Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, взявши для наступного розгалуження задачу ЛП1, оптимальний план якої дає більше значення цільової функції (змінна розгалуження – x_1).

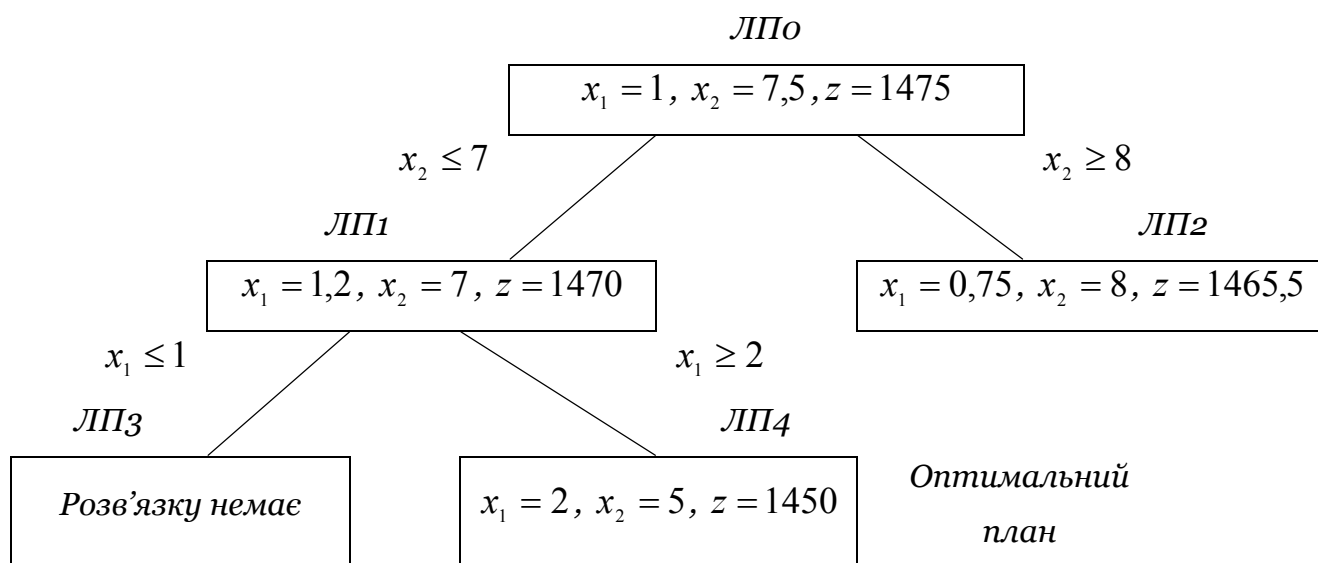
Далі розв'язуємо задачі ЛП3 і ЛП4, приєднуючи обмеження

$$x_1 \leq 1 \text{ і } x_1 \geq 2.$$

Після розв'язання цих задач знаходимо оптимальний план

$$\vec{X}_{opt} = (2;5), z = 1450.$$

Проілюструємо хід розв'язку задачі схемою:



6.4. АДИТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

Будь-яка цілочислова змінна x , значення якої не перевищує скінченної границі u (тобто $0 \leq x \leq u$), може бути виражена через двійкові змінні за допомогою представлення

$$x = 2^0 \cdot y_0 + 2^1 \cdot y_1 + 2^2 \cdot y_2 + \dots + 2^k \cdot y_k,$$

де k – найменше ціле число, яке задовольняє умові

$$2^{k+1} - 1 \geq u,$$

а $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ – булеві змінні.

Це представлення, а також простий алгоритм (описаний нижче) розв'язування задач цілочислового лінійного програмування з булевими змінними породило надію, що загальна задача цілочислового лінійного програмування може бути розв'язана більш ефективно як задача з двійковими змінними. На жаль, цей напрямок розвитку методів цілочислового лінійного програмування не виправдало надій, які покладались на нього.

Вперше спеціальний алгоритм розв'язування задач з двійковими змінними, названий *адитивним*, був запропонований у 1965 році, через сім років після створення методу віток і границь. Спочатку алгоритм не був пов'язаний з методом віток і границь, так як не вимагав розв'язування задач лінійного програмування; його основні операції зводилися лише до додавання і віднімання. Однак, незабаром був знайдений зв'язок між цими алгоритмами. Виявилось, що адитивний алгоритм є спеціальним випадком методу віток і границь.

Задум евристичного аналізу в адитивному алгоритмі вимагає подання задачі з двійковими змінними у зручній формі, яка задовольняє наступним двом вимогам:

1. У виразі цільової функції всі коефіцієнти повинні бути невід'ємними, і цільова функція повинна підлягати мінімізації.
2. Всі обмеження повинні бути нерівності типу „ \leq ”, можливо з від'ємними правими частинами. Ці обмеження перетворюються потім у рівності за допомогою введення неперервних додаткових змінних у ліві частини обмежень.

Будь-яка задача з двійковими змінними може задовольнити цим умовам. Для того, щоб забезпечити невід'ємність коефіцієнтів цільової функції, виконують підстановку $x_j = 1 - x'_j$ для всіх змінних x_j з від'ємними коефіцієнтами в цільовій функції. Обмеження-рівність

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ перетворюється у два обмеження нерівності: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ та

$-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$. Наприклад, рівність $x_1 + x_2 = 8$ замінюється двома нерівно-

стями: $x_1 + x_2 \leq 8$ та $-x_1 - x_2 \leq -8$.

Наведений нижче приклад демонструє застосування адитивного алгоритму.

Приклад 6.3. Необхідно розв'язати наступну задачу з двійковими змінними.

$$w = 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 2y_4 + 3y_5 \rightarrow \max,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 4,$$

$$7y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \leq 8,$$

$$11y_1 - 6y_2 + 3y_4 - 3y_5 \geq 3,$$

$$y_j = 0 \text{ або } 1, \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

Розв'язання. Цю задачу неважко представити у формі, що задовольняє адитивному алгоритму. Для цього необхідно виконати наступні дії.

- Множать цільову функцію на (-1) , для того щоб перетворити задачу на максимум в задачу на мінімум.
- Множать третє обмеження на (-1) , для зміни знаку нерівності.
- Вводять додаткові змінні s_1 , s_2 і s_3 для перетворення обмежень в рівності.
- Для того щоб всі коефіцієнти цільової функції були додатні, застосовують підстановки $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$, $y_5 = 1 - x_5$, $y_3 = x_3$ і $y_4 = x_4$.

Вказані перетворення приводять до наступної цільової функції (перевірте!)

$$z' = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8 \rightarrow \min.$$

Для зручності будемо ігнорувати константу -8 та замінимо $z' + 8$ на z , так що задача набуває наступного виду.

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \min ,$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + s_1 = 1 ,$$

$$-7x_1 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + s_2 = -2 ,$$

$$11x_1 - 6x_2 - 3x_4 - 3x_5 + s_3 = -1 ,$$

$$x_j = 0 \text{ або } 1, j = 1, 2, \dots, 5,$$

$$s_1, s_2, s_3 \geq 0 .$$

Оскільки, в отриманій після перетворень задачі йдеться про пошук мінімуму цільової функції з додатними коефіцієнтами, логічно, що у початковому плані всі двійкові змінні повинні дорівнювати нулю. В цьому випадку додаткові змінні будуть базисними та їх значення визначаються правими частинами обмежень. Розв'язок подано у таблиці 6.3.

Таблиця 6.3.

Базис	ОП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3
s_1	1	-1	-1	1	2	-1	1	0	0
s_2	-2	-7	0	3	-4	-3	0	1	0
s_3	-1	11	-6	0	-3	-3	0	0	1
z	0	3	2	5	2	3			

Застосування адитивного алгоритму вимагає у кожній підзадачі лише зміни стовпчика „ОП” таблиці.

Так як всі двійкові змінні рівні нулю, то додаткові змінні приймають наступні значення:

$$s_1 = 1, s_2 = -2, s_3 = -1,$$

при цьому $z = 0$. Якби всі додаткові змінні були невід'ємними, можна було б зробити висновок, що отриманий розв'язок, в якому всі двійкові змінні дорівнюють нулю, є оптимальним. Оскільки, деякі додаткові змінні є недопустимими (так як від'ємні), необхідно збільшити значення однієї або декількох двійкових змінних до 1, для того щоб отримати до-

пустимий план (або прийти до висновку, що задача не має допустимого розв'язку).

Збільшення значення двійкових змінних до 1 в адитивному алгоритмі відбувається по черзі. Обрана змінна називається *змінною розгалуження*, її вибір ґрунтується на використанні спеціальних тестів.

Змінна розгалуження повинна зменшувати абсолютне значення від'ємних додаткових змінних. Як видно з таблиці 6.3, змінна x_3 не може бути обрана в якості змінної розгалуження, так як її коефіцієнти у всіх обмеженнях невід'ємні. Отже, поклавши $x_3 = 1$, ми лише збільшимо від'ємне значення змінної s_2 та не змінимо від'ємне значення s_3 . Всі інші змінні мають принаймні один від'ємний коефіцієнт у другому і третьому обмеженнях. Отже, комбінація цих змінних може привести до додатних значень додаткових змінних. Таким чином, лише змінні x_1 , x_2 , x_4 і x_5 можна розглядати в якості можливих кандидатів на змінну розгалуження.

Вибір змінної розгалуження з усіх можливих претендентів заснований на використанні *міри недопустимості додаткової змінної (тест на верхню границю)*. Ця міра, яка заснована на припущенні, що значення двійкової змінної x_l буде збільшено до 1, визначається співвідношенням

$$I_l = \sum_{i=1}^m \min(0; s_i - a_{il}),$$

де s_i – поточне значення додаткової змінної, a_{il} – коефіцієнт при змінній x_l в i -му обмеженні.

В дійсності I_l є не що інше, як сума від'ємних додаткових змінних, які є результатом збільшення значення змінної x_l до 1. Складна на вигляд формула може бути спрощена:

$$I_l = \sum_{i=1}^m (\text{від'ємне значення } s_i \text{ при заданому } x_l = 1).$$

Наприклад, якщо покласти $x_1 = 1$, то отримуємо $s_1 = 1 - (-1) = 2$, $s_2 = -2 - (-7) = 5$ і $s_3 = -1 - 11 = -12$. Отже, $I_1 = -12$. Аналогічно, $I_2 = -2$, $I_4 = -1$ і $I_5 = 0$ (нагадаємо, що змінна x_3 була виключена з претендентів на змінну розгалуження, як безперспективна). Так як I_5 має найменшу міру недопустимості, змінна x_5 обирається в якості змінної розгалуження. На рис. 7.2 зображені дві вітки, які відповідають $x_5 = 0$ і $x_5 = 1$, що утворюють вузли 1 та 2. Вершина 2 дає допустиме значення додаткових змінних $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$ і $z = 3$. Отже, вузол 2 протестований, і значення $z^* = 3$ визначає поточну верхню границю оптимального значення цільової функції.

Переходимо до вузла 1, для якого $x_5 = 0$. Тут маємо $s_1 = 1$, $s_2 = -2$ і $s_3 = -1$, тобто розв'язок недопустимий. Змінні x_1 , x_2 , x_3 і x_4 є кандидатами на змінну розгалуження. (Відмітимо, що хоча розв'язки у вузлах 0 і 1 ідентичні, вузол 1 відрізняється тим, що змінна x_5 не є більше претендентом на розгалуження). Як і у вершині 0, тут змінна x_3 безперспективна, так як не зменшує за абсолютною величиною від'ємне значення додаткових змінних s_2 і s_3 . Крім того, значення $x_3 = 1$ приводить до значення цільової функції, рівне 5, що гірше поточного значення верхньої границі $z^* = 3$. Змінна x_1 також безперспективна, так як відповідний коефіцієнт у цільовій функції дорівнює 3, тому значення $x_1 = 1$ не приводить до покращення поточного значення цільової функції $z^* = 3$. Для змінних x_2 і x_4 , що залишились, обчислюємо міру недопустимості: $I_2 = -2$, $I_4 = -1$. Отже, у вузлі 1 змінною розгалуження буде x_4 .

На рис. 6.2 показаний весь адитивний алгоритм задачі, коли всі вузли протестовані і метод віток і границь закінчує роботу. Оптимальний план знайдено у вузлі 2, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ і $z = 3$. Звідси отримуємо розв'язок вихідної задачі:

$$y_1 = y_2 = 1, y_3 = y_4 = y_5 = 0, w = 5.$$

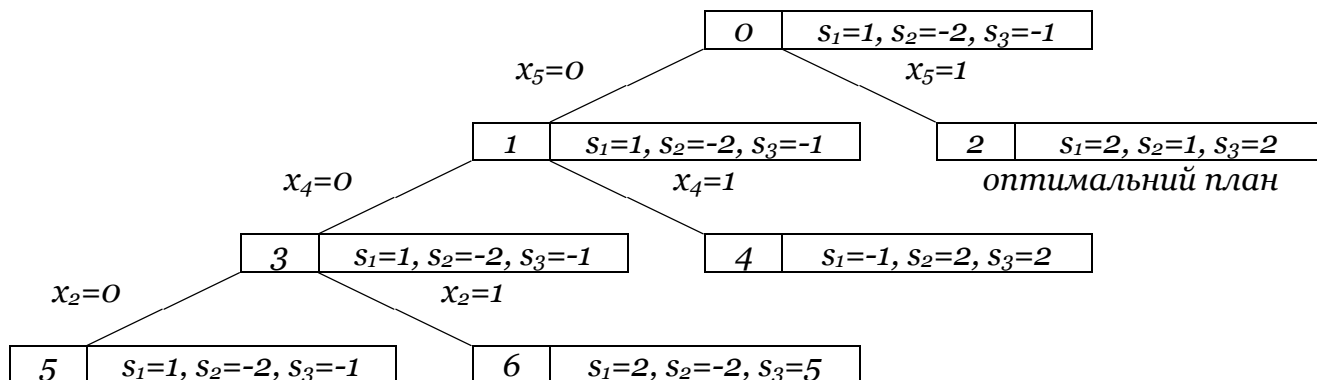


Рис. 6.2

Тести, які запропоновані в прикладі 6.3, є явно евристичними, та їх ефективність у виключенні змінних, які не можуть ініціювати процес розгалуження, залежить від того, наскільки „розумними” ми їх конструємо. В дійсності повний адитивний алгоритм містить більш сильні тести, ніж ті, які показані в прикладі 6.3. Однак, всі вони засновані на евристичних міркуваннях.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які задачі математичного програмування називаються цілочисловими? Різниця між цілочисловим та дискретним програмуванням. Навести приклади.
2. Методи розв'язування задач цілочислового програмування. Які основні кроки їх алгоритмів?
3. Зміст поняття „правильне відтинання”.
4. Як визначаються поняття цілої та дробової частини числа?
5. Перший алгоритм методу Гоморі.
6. Другий алгоритм методу Гоморі.
7. Алгоритм Дальтона-Ллевеліна.
8. Основні засади методу віток і границь.
9. Представлення цілого числа через двійкові змінні.
10. Основні засади адитивного алгоритму.

ВПРАВИ

Методом Гоморі розв'язати задачі цілочислового лінійного програмування і порівняти розв'язок з розв'язком, який отриманий шляхом округлення відповідного неперервного розв'язку:

6.1. $z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max$,
 $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$,
 $x_1 + 4x_2 + x_5 = 11$,
 $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, \dots, 5$.

6.2. $x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$,
 $x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 10$,
 $3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 14$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

6.3. $z = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$,
 $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 23$,
 $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 17$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

6.4. $z = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 \rightarrow \max$,
 $x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 12$,
 $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 7$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

6.5. $z = x_1 + 2x_2 + x_5 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5$,
 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$,
 $x_3 - x_4 + x_6 = 1$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, \dots, 6$.

6.6. $z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq -1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

6.7. $z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$3x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

6.8. $z = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6,$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6,$$

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

6.9. $z = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \rightarrow \max,$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7,$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 4,$$

$$x_1 - 3x_3 \leq 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

6.10. $z = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3,$$

$$-2x_2 + 3x_3 \leq 4,$$

$$-3x_2 + 4x_3 \leq 7,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ – цілі.}$$

Методом віток і границь розв'язати задачі цілочислового лінійного програмування і порівняти розв'язок з розв'язком, який отриманий шляхом округлення відповідного неперервного розв'язку:

- 6.11. $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$,
 $x_1 + x_2 \leq 13$,
 $x_1 - x_2 \leq 6$,
 $-3x_1 + x_2 \leq 9$,
 $x_1, x_2 \geq 0$ – цілі.
- 6.12. $5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$,
 $-3x_1 + 14x_2 \leq 78$,
 $5x_1 - 6x_2 \leq 26$,
 $x_1 + 4x_2 \geq 25$,
 $x_1, x_2 \geq 0$ – цілі.
- 6.13. $z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$,
 $5x_1 + 2x_2 \leq 10$,
 $3x_1 + 7x_2 \leq 21$,
 $x_1, x_2 \geq 0$ – цілі.
- 6.14. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$,
 $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$,
 $x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7$,
 $x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.
- 6.15. $z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5$,
 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2$,
 $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 3$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ – цілі.
- 6.16. $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$,
 $|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \geq 15$,
 $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ – цілі.

Задачі 6.17–6.20 розв'язати за допомогою адитивного алгоритму:

6.17. $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$4x_2 - 3x_3 \leq 2,$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ або } 1.$$

6.18. $z = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$

$$8x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 5,$$

$$6x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 2,$$

$$-2x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ або } 1.$$

6.19. $z = -5x_1 + 7x_2 + 10x_3 \rightarrow \min,$

$$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 0,$$

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 4,$$

$$-x_2 + 2x_3 \geq 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ або } 1.$$

6.20. $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9,$$

$$10x_1 + 5x_2 \geq 1,$$

$$x_1, x_2 = 0 \text{ або } 1.$$

6.21. Фірма випускає три види виробів *A*, *B*, *B*, причому плановий випуск за зміну складає 9 шт. виробу *A*, 7 шт. виробу *B*, 6 шт. виробу *B*.

Ресурси на зміну: 51 од. виробничого обладнання, 48 од. сировини, 67 од. електроенергії. Їх витрати на один виріб подані у таблиці:

Ресурси	Виріб <i>A</i>	Виріб <i>B</i>	Виріб <i>B</i>
Обладнання	3	2	0
Сировина	1	4	0
Електроенергія	3	3	1

Прибуток від реалізації виробу *A* – 40 ум. од., *B* – 50 ум. од., *B* – 10 ум. од.

Визначити, скільки виробів кожного виду треба виготовляти, щоб отримати максимальний прибуток від виробів, що виготовлені понад план.

6.22. Для придбання обладнання для сортування зерна фермер виділяє 34 ум. од. Обладнання повинно бути розміщено на площі, яка не перевищує 60 м².

Фермер може замовити обладнання двох видів: менш потужні машини *A* вартістю 3 ум. од., що вимагають площу 3 м² (з урахування проходів) і забезпечують продуктивність 2 т зерна за зміну, і більш потужні машини *B* вартістю 4 ум. од., що займають площу 5 м² та забезпечують за зміну сортування 3 т зерна.

Визначити оптимальний варіант придбання обладнання, який забезпечив би фермеру максимум загальної продуктивності сортування, якщо він може придбати не більше 8 машин типу *B*.

6.23. Три типи літаків необхідно розподілити між чотирма авіалініями. У таблиці наведені дані місячного об'єму перевезень кожним літаком на кожній авіалінії і відповідні експлуатаційні витрати:

6.24.

Тип літака	К-сть літаків	Місячний об'єм перевезень одним літаком за авіалініями				Експлуатаційні витрати на один літак за авіалініями			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	30	25	10	17	70	28	15	45
3	30	25	50	30	45	40	70	40	65

Розподілити літаки за авіалініями так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти по кожній з чотирьох авіаліній не менше 300, 200, 1000 і 500 од. вантажу відповідно.

РОЗДІЛ 7

НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У задачах лінійного програмування, які розглядалися раніше, всі змінні входили як до системи обмежень, так і до цільової функції, у першому степені. Тому ці задачі були досить простими у постановці і за методами розв'язування.

Лінійні моделі є ефективним засобом дослідження широкого кола задач управління та економіки за умови короткотермінових проміжків або стабільного стану системи. Але практичний досвід показує, що гіпотези про лінійну залежність можуть лише наближено характеризувати об'єкт дослідження. У багатьох випадках залежності між основними параметрами системи мають суттєво нелінійний характер. Наприклад, нехай критерієм оптимальності є собівартість одиниці виробленої продукції. Очевидно, що вона залежить від розміру підприємства. Так, із збільшенням обсягу продукції собівартість її зменшується. Проте таке зменшення не безмежне. Настає такий момент, коли внутрішні витрати підприємства починають зростати (збільшуються витрати на перевезення, збереження продукції тощо), що у свою чергу призводить до збільшення собівартості. Функція, яка і спадає, і зростає, вже не може бути лінійною. Зиск від реалізації продукції виявляється нелінійною функцією ціни: чим нижче ціна, тим більше попит і, як наслідок, більше обсяг реалізації. Різного виду затрати праці та матеріальних ресурсів, як правило, є нелінійними функціями точності, надійності та інших характеристик якості продукції виробництва. Ретельний облік норм споживання певних ресурсів свідчить про необхідність використання моделей нелінійних обмежень як більш узгоджених з практикою.

Отже, лінійні моделі ми можемо вважати першим наближенням реальної задачі. У тих випадках, коли існує широкий вибір допустимих

планів і наше уявлення про характер оптимального зв'язку не зовсім повне, лінійні моделі можуть бути неадекватними.

Математична модель задачі нелінійного програмування в загальному вигляді формулюється наступним чином:

знайти вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє систему обмежень

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.1)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \quad (7.2)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m \quad (7.3)$$

і за якого досягає екстремуму (найбільшого або найменшого значення) цільова функція

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \quad (7.4)$$

де x_j – змінні, $j = 1, 2, \dots, n$; f, g_i – задані функції від n змінних; b_i – фіксовані значення.

Нелінійні задачі математичного програмування не зводяться до певної стандартної форми. Тип задачі визначається типом функцій, які входять до цільової функції і обмежень. Не існує загального універсального методу розв'язування нелінійних задач, подібного до того, яким є симплексний метод для задач лінійного програмування. Ця обставина, а також специфіка окремих типів нелінійних задач зумовили значну різноманітність методів їх розв'язування.

В залежності від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи розв'язування, до яких відносяться методи множників Лагранжа, градієнтні методи, опукле і квадратичне програмування, наближені методи, графічний метод.

Із нелінійного програмування найбільш розроблені задачі, в яких система обмежень лінійна, а цільова функція нелінійна. Однак, навіть для таких задач оптимальний розв'язок може бути знайдений для певного класу цільових функцій. Наприклад, коли цільова функція *квадра-*

тична (квадратичне програмування), або *сепарабельна*¹, тобто є сумою n функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

При цьому слід відмітити, що на відміну від задач лінійного програмування, де точками екстремуму є вершини многогранника розв'язків, в задачах з нелінійною цільовою функцією точки екстремуму можуть знаходитись всередині многогранника, на його ребрі або у вершині.

Якщо система обмежень нелінійна, то область існування планів задачі може бути не опуклою і навіть складатися з кількох окремих частин.

При розв'язуванні задач нелінійного програмування для цільової функції необхідно визначити глобальний максимум або глобальний мінімум. Наявність локальних екстремумів ускладнює розв'язування задач, так як більшість існуючих методів нелінійного програмування не дозволяє встановити, чи є знайдений екстремум локальним або глобальним. Тому існує можливість в якості оптимального розв'язку прийняти локальний екстремум, який може суттєво відрізнятися від глобального.

На закінчення відмітимо, що методи нелінійного програмування бувають *прямі* та *непрямі*. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукуються у напрямку найшвидшого збільшення або зменшення цільової функції. Типовими для цієї групи методів є градієнтні. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, методи квадратичного та сепарабельного програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами *зведеного градієнта*, скажімо *методом Якобі* або *методом множників Лагранжа*. У задачах оптимі-

¹ Необхідно зробити наступне зауваження, що поняття сепарабельності тут не має нічого спільного (крім назви) з „класичним” його визначенням з функціонального аналізу.

зації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму *Куна-Таккера*.

7.2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД

Розглянемо приклади розв'язування задач нелінійного програмування з двома змінними, які можуть бути розв'язані графічно. Графічний метод дозволяє більш наочно проілюструвати різні випадки у задачах нелінійного програмування.

Задача з лінійною цільовою функцією і нелінійною системою обмежень

Приклад 7.1. Знайти глобальний екстремум функції

$$z = 2x_1 + x_2$$

при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків – частина кола з радіусом 4, яка розташована у першій чверті координатної площини (рис.7.1).

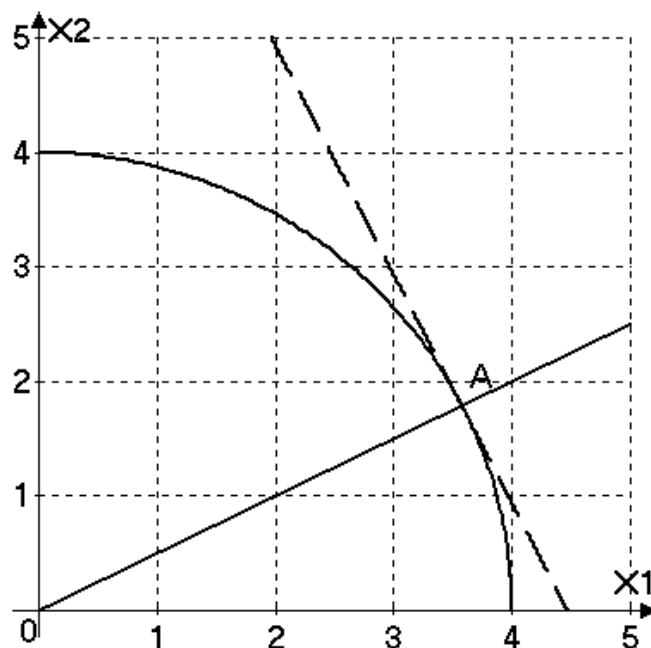


Рис. 7.1

Лініями рівня цільової функції є паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом, рівним -2 . Глобальний мінімум досягається в точці $O(0;0)$: $z_{\min} = 0$, глобальний максимум – в точці A дотику лінії рівня і кола. Проведемо через точку A пряму, яка перпендикулярна лінії рівня. Пряма проходить через початок координат, має кутовий коефіцієнт $1/2$ і рівняння $x_2 = 1/2 x_1$.

Розв'язуємо систему рівнянь

$$x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

$$x_2 = 1/2 x_1,$$

звідки знаходимо $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $z = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

Задача з нелінійною цільовою функцією і лінійною системою обмежень

Приклад 7.2. Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$x_1 + x_2 \leq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків – $OABD$ (рис 7.2). Лініями рівня будуть концентричні кола з центром у точці O_1 .

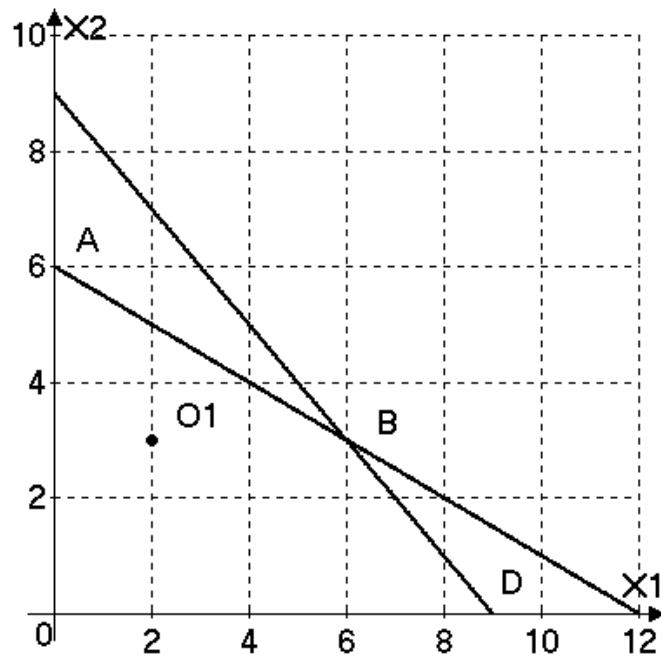


Рис. 7.2

Максимальне значення цільова функція приймає в точці $D(9;0)$, мінімальне – в точці $O_1(2;3)$. Тому

$$z_{\max} = (9 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 58.$$

Приклад 7.3. Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 14,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків – $OABD$ (рис. 7.3).

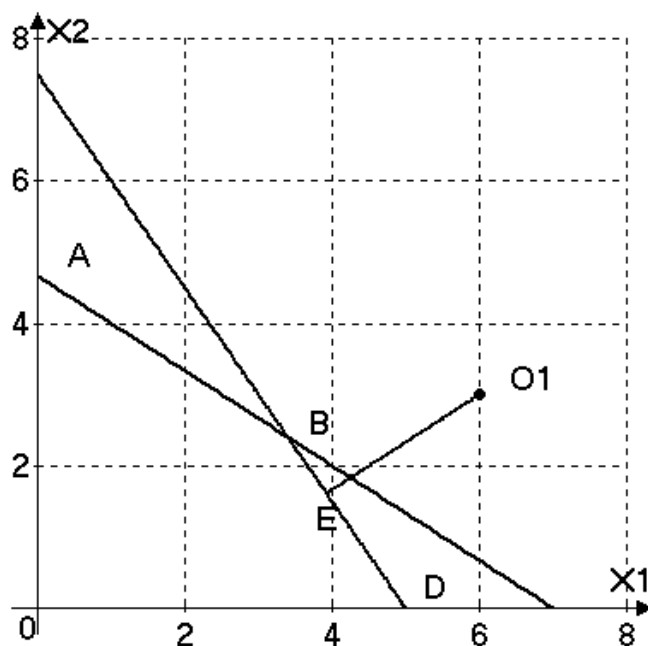


Рис. 7.3

Лінії рівня являють собою концентричні кола з центром у точці $O_1(6;3)$. Глобальний максимум знаходиться в точці $O(0;0)$ як найбільш віддаленої від точки O_1 : $z_{\max} = 45$.

Глобальний мінімум досягається в точці E , яка знаходиться на перетині прямої BD ($3x_1 + 2x_2 = 15$) і перпендикуляра до цієї прямої, проведеного з точки O_1 .

Знайдемо координати точки E : так як кутовий коефіцієнт прямої $3x_1 + 2x_2 = 15$ дорівнює $-3/2$, то кутовий коефіцієнт перпендикуляра O_1E дорівнює $2/3$. З рівняння прямої, що проходить через дану точку O_1 з кутовим коефіцієнтом $2/3$, отримуємо

$$(x_2 - 3) = \frac{2}{3}(x_1 - 6), \text{ звідки } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$2x_1 - 3x_2 = 3,$$

$$3x_1 + 2x_2 = 15$$

і знаходимо координати точки E : $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$. При цьому

$$z_{\min} = 1053/169.$$

Задача з нелінійною цільовою функцією і нелінійною системою обмежень

Приклад 7.4. Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків є коло з центром у точці $O(0;0)$ і радіусом рівним 4, яке розміщено у першій чверті координатної площини (рис. 7.4).

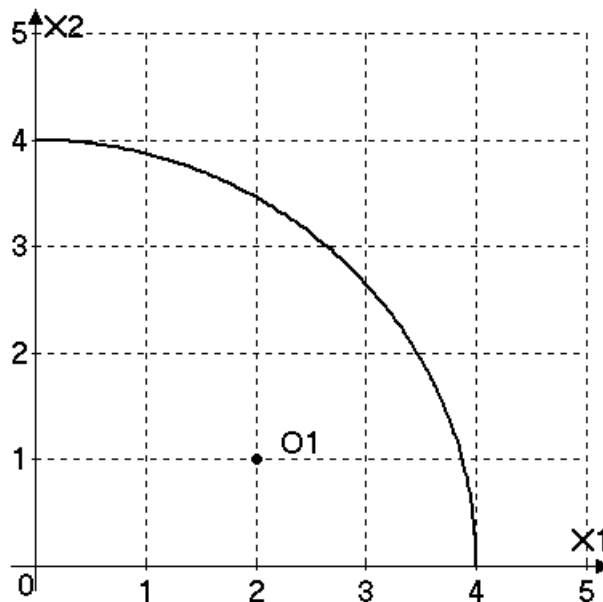


Рис. 7.4

Лініями рівня будуть концентричні кола з центром у точці $O_1(2;1)$. Глобальний мінімум досягається в точці O_1 : $z_{\min} = 0$. Глобальний максимум – в точці $A(0;4)$, при цьому

$$z_{\max} = (0 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 13.$$

Приклад 7.5. Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = x_1^2 + x_2^2$$

при обмеженнях:

$$x_1 x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$x_1 \leq 7,$$

$$x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків не є опуклою і складається з двох частин $ACKD$ і $BLME$ (рис. 7.5).

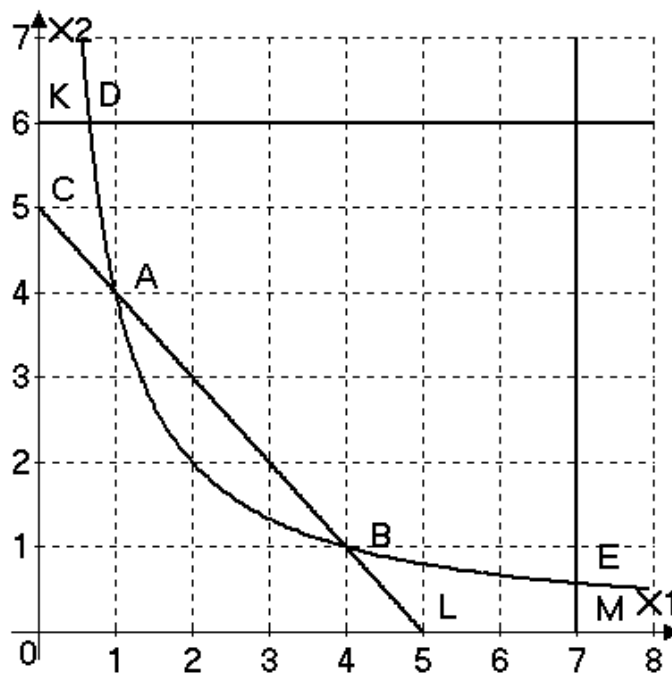


Рис. 7.5

Лініями рівня є концентричні кола з центром в точці $O(0;0)$. Знайдемо координати точок A і B , розв'язуючи систему рівнянь

$$x_1 x_2 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Знаходимо $A(1;4)$, $B(4;1)$. В цих точках цільова функція має глобальні мінімуми $z_{\min} = 17$.

Знайдемо координати точок D і E , розв'язуючи системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_2 = 6 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 = 7 \end{cases}.$$

Звідки отримуємо $D(2/3;6)$ і $z(D) = 328/9$, $E(7;4/7)$ і $z(E) = 2417/49$.
Тобто, глобальний максимум знаходиться в точці $E(7;4/7)$: $z_{\max} = 2417/49$.

7.3. Класичні методи оптимізації

У класичній теорії оптимізації для знаходження точок максимуму і мінімуму (екстремальних точок) функцій в умовах як відсутності, так і наявності обмежень на змінні широко використовується апарат диференціального числення. Методи, які при цьому отримуються, не завжди виявляються зручними при обчислювальних операціях і необхідно шукати інші методи розв'язування. Тому класичні методи часто використовуються не в якості обчислювального засобу, а як основа для теоретичного аналізу алгоритмів (більшості їх) розв'язування задач нелінійного програмування.

Використовуючи класичні методи оптимізації, слід чітко уявляти собі різницю між локальним екстремумом функції, глобальним екстремумом і умовним екстремумом.

Точка $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ є *точкою локального максимуму* функції $f(\vec{X})$, якщо нерівність

$$f(\vec{X}^0 + \vec{h}) \leq f(\vec{X}^0)$$

виконується для всіх $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ таких, що $|h_j|$ достатньо малі при всіх j . Іншими словами, точка \vec{X}^0 є *точкою максимуму*, якщо значення функції $f(\vec{X})$ в околу точки \vec{X}^0 не перевищує $f(\vec{X}^0)$.

Аналогічно, точка \vec{X}^0 є *точкою локального мінімуму* функції $f(\vec{X})$, якщо для визначеного вище вектора \vec{h} має місце нерівність

$$f(\vec{X}^0 + \vec{h}) \geq f(\vec{X}^0).$$

Саме часткове значення $f(\vec{X}^0)$ називається *локальним максимумом* (локальним мінімумом) функції $f(\vec{X})$.

Необхідна умова локального екстремуму формулюється наступним чином.

Якщо в точці $\vec{X}^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функція $f(\vec{X})$ має екстремум, то перші частинні похідні функції у цій точці дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(\vec{X}^0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(\vec{X}^0)}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f(\vec{X}^0)}{\partial x_n} = 0$$

(існування перших частинних похідних в точці \vec{X}^0 припускається).

Точка $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називається критичною (стаціонарною) для функції $f(\vec{X})$, якщо координати цієї точки задовольняють систему рівнянь

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_n} = 0.$$

Тому точки локального екстремуму функції $f(\vec{X})$, які лежать всередині її області визначення, слід шукати тільки серед критичних точок цієї функції.

Критична точка не обов'язково буде точкою локального екстремуму. Вона може бути точкою перегину (або сідловою точкою).

Нехай критична точка \vec{X}^0 підозріла на екстремальність. Розвинемо функцію $f(\vec{X})$ в ряд Тейлора в околі точки \vec{X}^0 :

$$f(\vec{X}) = f(\vec{X}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\vec{X}^0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + O(|\vec{X} - \vec{X}^0|^3).$$

Для екстремальності точки \vec{X}^0 необхідно, щоб в околі точки \vec{X}^0

$$f(\vec{X}) \leq f(\vec{X}^0) \quad (\vec{X}^0 - \text{точка максимуму}),$$

$$f(\vec{X}) \geq f(\vec{X}^0) \quad (\vec{X}^0 - \text{точка мінімуму}).$$

Це в свою чергу залежить від знака члена

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\vec{X}^0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0),$$

який являє собою квадратичну форму. Для його визначення введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку, яка називається матрицею Гессе:

$$H(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця Гессе додатно визначена в точці \bar{X}^0 , то $K > 0$; якщо від'ємно визначена – $K < 0$.

Достатня умова локального екстремуму формулюється наступним чином.

Для того щоб критична точка \bar{X}^0 була екстремальною, достатньо, щоб матриця Гессе $H(\bar{X})$ в точці \bar{X}^0 була:

- а) додатно визначена (тоді \bar{X}^0 – точка мінімуму);
- б) від'ємно визначена (тоді точка \bar{X}^0 – точка максимуму).

Найпростішими критеріями додатної (від'ємної) визначеності матриці є критерії Сильвестра.

Для матриці Гессе $H(\bar{X})$ випишемо головні мінори:

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

.....,

$$M_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Критерій Сильвестра додатної визначеності матриці Гессе $H(\bar{X})$ через головні мінори записується у вигляді:

$$M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0, \dots, M_n > 0;$$

від'ємної визначеності:

$$M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots, (-1)^n M_n > 0.$$

Матриця $H(\bar{X})$ називається *напіввизначеною* (додатно або від'ємно), якщо в попередніх нерівностях для головних її мінорів знаки замінити на \geq або \leq , тобто, матриця Гессе *додатно напіввизначена*, якщо значення всіх головних мінорів будуть невід'ємними і *від'ємно напіввизначена*, якщо значення головних мінорів дорівнюють нулю або мають знак $(-1)^k$, $k = 1, 2, \dots, n$. У всіх інших випадках матриця Гессе буде невизначеною.

В загальному випадку, коли матриця $H(\bar{X}^0)$ є невизначеною, точка \bar{X}^0 повинна бути сідловою. Якщо ж матриця Гессе в точці \bar{X}^0 виявляється напіввизначеною, то ця точка може як бути, так і не бути екстремальною. При цьому формулювання достатньої умови існування екстремуму ускладнюється, тому що для цього необхідно враховувати члени більш високих порядків в розкладі Тейлора.

Приклад 7.6. Дослідимо на екстремум функцію

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Необхідна умова екстремуму тут набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Розв'язання. Розв'язком цієї системи рівнянь є точка $\vec{X}^0 = (1/2; 2/3; 4/3)$.

Для перевірки виконання умови достатності обчислимо матрицю Гессе в точці \vec{X}^0 (слід відмітити, що в даному прикладі вигляд матриці Гессе не залежить від координат критичної точки):

$$H(\vec{X}^0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці $H(\vec{X}^0)$ дорівнюють $M_1 = -2 < 0$, $M_2 = 4 > 0$, $M_3 = -6 < 0$. У цьому випадку матриця $H(\vec{X}^0)$ є від'ємно визначеною, звідки випливає, що точка $\vec{X}^0 = (1/2; 2/3; 4/3)$ є точкою максимуму.

Точка \vec{X}^0 називається *точкою глобального максимуму (глобального мінімуму)* функції $f(\vec{X})$, якщо для всіх точок \vec{X} з області визначення функції справедлива нерівність

$$f(\vec{X}^0) \geq f(\vec{X}) \quad (f(\vec{X}^0) \leq f(\vec{X})).$$

Саме часткове значення $f(\vec{X}^0)$ називається *глобальним максимумом (глобальним мінімумом)* функції $f(\vec{X})$.

Якщо область визначення функції замкнена і обмежена, то диференційована функція $f(\vec{X})$ досягає у цій області своїх глобального

максимуму (найбільшого значення) і глобального мінімуму (найменшого значення) або в критичній точці, або в граничній точці області визначення.

На рис. 7.6 показані точки максимуму і мінімуму функції однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$. Точки x_1, x_2, x_3, x_4 і x_6 складають множину екстремальних точок функції $f(x)$. Тут точки x_1, x_3 і x_6 є точками максимуму, а точки x_2 і x_4 – точками мінімуму. Оскільки

$$f(x_6) = \max\{f(x_1), f(x_3), f(x_6)\},$$

значення $f(x_6)$ є глобальним максимумом, а значення $f(x_1)$ і $f(x_3)$ – локальними максимумами. Таким же чином, значення $f(x_4)$ є локальним, а $f(x_2)$ – глобальним мінімумом функції $f(x)$.

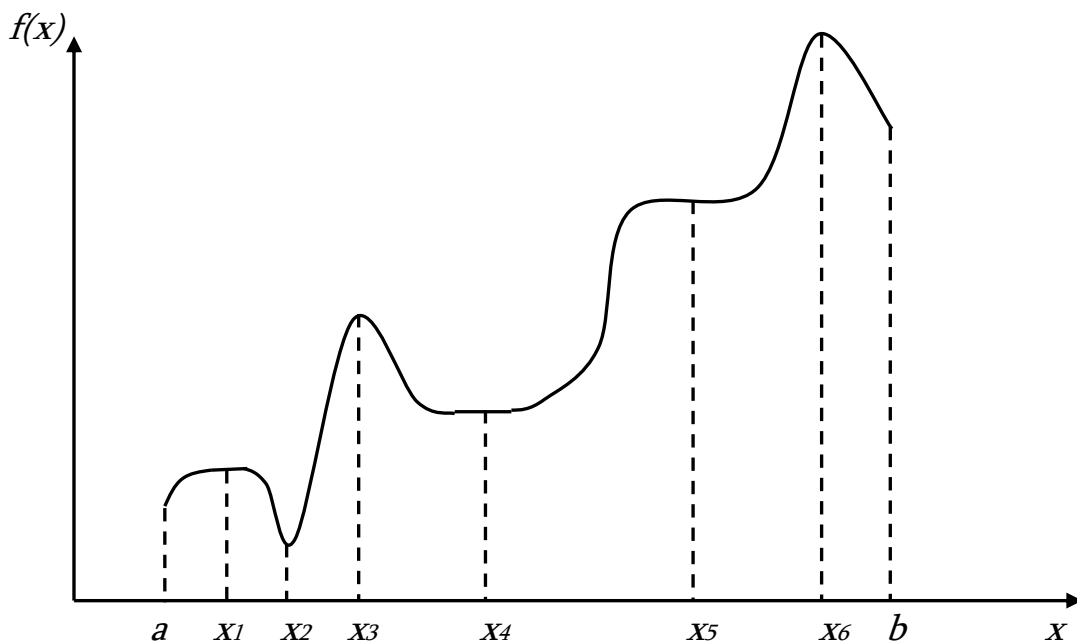


Рис. 7.6

Відмітимо, що хоч точка x_1 є точкою максимуму функції, вона відрізняється від інших локальних максимумів тим, що принаймні в одній точці її околу значення функції $f(x)$ співпадає з $f(x_1)$. Точка x_1 за цією причиною називається нестрогим максимумом функції $f(x)$, на відміну, наприклад, від точки x_3 , яка є строгим максимумом. Нестрогий макси-

мум, отже, передбачає наявність (нескінченної кількості) різних точок, яким відповідає одне і теж максимальне значення функції. Аналогічні результати мають місце в точці x_4 , де функція $f(x)$ має нестрогий мінімум.

В точці x_5 перша похідна функції дорівнює нулю, але вона не є точкою екстремуму, а є точкою перегину. Взагалі, якщо критична точка функції не є її екстремальною точкою, то вона автоматично повинна бути точкою перегину або сідловою точкою.

Відмітимо, що для екстремумів, які розглянуті вище, більш точними є терміни: *безумовний локальний максимум (мінімум), безумовний глобальний максимум (мінімум)*. В теорії локального безумовного екстремуму на незалежні змінні x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ не накладаються ніякі додаткові обмеження, тобто не вимагається, щоб змінні x_j задовольняли деяким додатковим обмеженням.

Розглянемо тепер таку задачу.

Нехай треба знайти екстремум функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при умові, що змінні x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ задовольняють рівнянням

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n. \quad (7.5)$$

Усі функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ повинні бути диференційованими. Рівняння (7.5) називають *рівняннями зв'язку*. Важливою умовою є відсутність обмежень на знак змінних.

Кажуть, що в точці $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, яка задовольняє рівнянням зв'язку (8.5), функція $z = f(\vec{X})$ має *умовний локальний максимум (мінімум)*, якщо нерівність $f(\vec{X}^0) \geq f(\vec{X})$ ($f(\vec{X}^0) \leq f(\vec{X})$) має місце для всіх точок \vec{X} , координати яких задовольняють рівнянням зв'язку.

Легко помітити, що задача визначення умовного екстремуму співпадає із задачею нелінійного програмування (7.1), (7.4), так як функції (8.5) можуть містити вільні члени, перенесені з правих частин.

Співвідношення (7.5) означають, що серед загального числа n змінних m є неявними функціями $k = n - m$ інших. Якби вдалося розв'язати систему рівнянь (7.5) відносно залежних змінних, наприклад змінних:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_k), \\x_{k+2} &= \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \\&\dots\dots\dots, \\x_n &= \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_k),\end{aligned}\tag{7.6}$$

то, замінюючи у цільовій функції (7.4) $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ці змінні правими частинами виразів (7.6), дістали б функцію від k незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_k

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_k) = f[x_1, \dots, x_k, \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_k)]\tag{7.7}$$

і задача звелась би до задачі на знаходження точок безумовного локального (глобального) екстремуму функції (7.7) при відсутності обмежень. Питання про існування функцій (7.6) розв'язується теоремою про неявні функції.

Проте такий шлях, як правило, буває нездійсненним через складність знаходження аналітичного розв'язку системи (7.5).

Метод множників Лагранжа.

Ідея методу множників Лагранжа також полягає в заміні задачі (7.1) або (7.5) і (7.4) простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення хоч і складнішої функції, проте без обмежень. Остання називається *функцією Лагранжа* і має таку структуру:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ – поки що неозначені числа, які і називаються множниками Лагранжа.

Відмітимо, що множникам Лагранжа можна надати економічного тлумачення. Якщо $f(\vec{X})$ – прибуток, а функція $\varphi_i(\vec{X})$ – витрати i -го ре-

сурсу, що відповідають плану $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то λ_i – ціна (оцінка) i -го ресурсу, яка характеризує зміну екстремального значення цільової функції в залежності від зміни об'єму i -го ресурсу (маргінальна оцінка).

$L(\vec{X}, \vec{\lambda})$ – функція $n + m$ змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Визначення критичних точок цієї функції приводить до розв'язування системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Отже, задача знаходження умовного екстремуму функції $z = f(\vec{X})$ зводиться до знаходження локального екстремуму функції $L(\vec{X}, \vec{\lambda})$.

Приклад 7.7. Розглянемо задачу

$$\text{мінімізувати } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при обмеженні

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0.$$

Розв'язання. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(\vec{X}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14).$$

Звідки отримуємо необхідні умови екстремуму у вигляді системи рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 4\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0,$$

розв'язком якої є точки

$$\vec{X}_1 = (2; 2; 1), \lambda_1 = -1,$$

$$\vec{X}_2 = (2; -2; 1), \lambda_2 = -1,$$

$$\vec{X}_3 = (2, 8; 0; 1, 4), \lambda_3 = -1, 4.$$

Використовуючи достатні умови, обчислюємо матрицю Гессе для цільової функції $z(\vec{X})$

$$H(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

яка для всіх екстремальних точок має однаковий вигляд. Головні мінори матриці Гессе дорівнюють

$$M_1 = 2 > 0, M_2 = 4 > 0, M_3 = 8 > 0.$$

Отже, у всіх критичних точках маємо локальні мінімуми. Глобальний мінімум знаходимо порівнюючи значення цільової функції в критичних точках

$$z(\vec{X}_1) = 9, z(\vec{X}_2) = 9, z(\vec{X}_3) = 9, 8.$$

В точках \vec{X}_1 і \vec{X}_2 маємо глобальні мінімуми.

Метод множників Лагранжа у випадку наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей призводить до великих труднощів обчислювального характеру, проте вивчення цього випадку має серйозне теоретичне значення.

Розглянемо задачу (7.1), (7.4) **при умові невід'ємності змінних**

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.9)$$

Глобального екстремуму функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може досягти або у внутрішній точці невід'ємного октанта (гіпероктанта¹), або ж у граничній точці цього октанта. Тому, крім критичних внутрішніх точок не-

¹ Октант – восьма частина тривимірного простору, яка обмежується координатними площинами. Гіпероктант – умовна назва частин n -вимірного точкового простору, обмежених координатними площинами, кількість яких 2^n .

від'ємного октанта, які задовольняють систему обмежень (7.1), слід дослідити на екстремум і всі межі зазначеного октанта різних розмірностей, точніше, ті точки цих меж, що задовольняють обмеження (7.1).

Можна рекомендувати такий метод відшукування глобального екстремуму в розглядуваному випадку.

1-й крок. Знайти всі критичні точки функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у розглянутому n -вимірному просторі і, відібравши ті, координати яких задовольняють умови невід'ємності, обчислити для них значення цільової функції. Для знаходження критичних точок можна скористатися методом множників Лагранжа, не звертаючи уваги на обмеження по знаку змінних.

2-й крок. Поклавши у функціях $f(\vec{X})$ і $g_i(\vec{X})$, що одна змінна дорівнює нулю, зробити те саме (крок 1) для першого октанта відповідної координатної площини. Крок 2 провести по черзі для всіх змінних, тобто n раз.

3-й крок. Зробити те саме, що й у кроках 1 і 2, для кожного перетину двох координатних площин, покладаючи $x_k = 0$, $x_l = 0$ ($k \neq l$, $k, l = 0, 1, \dots, n$). Крок 3 провести по черзі для всіх комбінацій $x_k x_l$, тобто C_n^2 раз.

4-й крок. Аналогічні дії зробити для підпросторів, що є перетинами трьох різних координатних гіперплощин $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_s = 0$ ($k \neq l \neq s$) і так далі доти, поки не здійснимо $(n - m + 1)$ кроку, при якому покладемо, що $(n - m)$ координат у всіх можливих комбінаціях дорівнюють нулю.

Зауважимо, що таким, які дорівнюють нулю, слід покласти лише ті змінні, на які накладена умова невід'ємності.

Глобальний екстремум потрібного виду знаходимо порівнянням знайдених так значень цільової функції.

Зрозуміло, що при вимозі невід'ємності значного числа змінних виникають труднощі обчислювального характеру, які важко ліквідувати.

Розглянемо тепер застосування методу множників Лагранжа до загальної задачі нелінійного програмування, **система умов якої включає і обмеження нерівності**. Проте всі функції, що входять у задачу (7.1) – (7.4), повинні бути диференційованими хоча б один раз.

Цілком зрозуміло, що ввівши в ліві частини додаткові невід'ємні змінні $x_{n+i} \geq 0$ ($i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$), дістанемо задачу, що містить лише обмеження-рівності:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_{n+i} &= b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{n+i} &= b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad x_{n+i} \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі нелінійного програмування, яка включає обмеження-нерівності можна знайти так.

1-й крок. Розглядаючи всі обмеження як строгі рівності, знайти точки екстремуму і обчислити в них значення цільової функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функція Лагранжа при цьому матиме вигляд

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(\vec{X}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(\vec{X})]. \quad (7.10)$$

Так знаходимо лише екстремальні точки тієї межі множини планів задачі, де всі додаткові змінні дорівнюють нулю.

2-й крок. Відкидаючи в сумі (7.10) один доданок, який відповідає одному обмеженню-нерівності, визначимо критичні точки зміненої так функції Лагранжа. Відберемо серед них ті, які задовольняють відкинуте обмеження як строгу нерівність, і обчислимо для них значення цільової функції.

Крок 2 повторюємо послідовно для всіх обмежень-нерівностей, тобто $m - m_1$ раз.

3-й крок. Відкидаючи послідовно по два члени суми (7.10), які відповідають обмеженням-нерівностям у всіх можливих комбінаціях по дві,

визначаємо щоразу критичні точки нової функції Лагранжа. Відбираємо серед них ті, які задовольняють відкинуті два обмеження як строгі нерівності і обчислюємо в них значення цільової функції.

Аналогічні кроки продовжуємо доти, поки не здійснимо $(n - m_1 + 1)$ -й крок. Глобальний екстремум потрібного типу знаходимо, порівнюючи всі обчислені значення цільової функції.

Розглянутий метод множників Лагранжа дає, взагалі кажучи, можливість знаходити лише локальні сідлові точки функції Лагранжа, а отже, точки локальних екстремумів для відповідних задач нелінійного програмування.

Результати, добуті Куном і Таккером, що розглядаються в наступному параграфі, дають можливість установити типи задач, для яких в області їх означеності існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу.

7.4. ОПУКЛЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

Задачами опуклого програмування називають нелінійні задачі, в яких усі функції опуклі, усі обмеження – однотипні нерівності типу „ \leq ” („ \geq ”) або рівняння.

Нагадаємо, що множина точок називається *опуклою*, якщо вона разом з будь-якими двома точками містить і весь відрізок, який з'єднує

ці точки. Якщо M – опуклий простір, то $\sum_{i=1}^r t_i \vec{X}_i \in M$ для будь-яких точок

$\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r \in M$ і будь-яких дійсних чисел $t_i \geq 0$, що задовольняють умо-

ві $\sum_{i=1}^r t_i = 1$.

Функція $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначена на опуклій множині M n -вимірного простору, називається *опуклою* (або *опуклою вниз*) на цій множині, якщо

$$f(\alpha \vec{X}_1 + (1 - \alpha) \vec{X}_2) \leq \alpha f(\vec{X}_1) + (1 - \alpha) f(\vec{X}_2) \quad (7.11)$$

для будь-яких точок $\bar{X}_1, \bar{X}_2 \in M$ і будь-якого числа $\alpha \in [0; 1]$.

Якщо в умові (7.11) замінити знак нерівності „ \leq ” на „ \geq ”, то отримуємо визначення *угнутої* (або *опуклої вгору*). Якщо ж нерівності являються строгими, то функція називається строго опуклою (строго угнутою).

На рис. 7.7 зображений графік функції однієї змінної, опуклої на всій числовій прямій.

Для будь-якої пари \bar{X}_1, \bar{X}_2 значень аргументу довільну точку $\bar{X} \in [\bar{X}_1; \bar{X}_2]$ можна задати у вигляді $\bar{X} = \alpha\bar{X}_1 + (1 - \alpha)\bar{X}_2$. Як видно з рис. 7.7, нерівність (7.11) означає, що відрізок, який з'єднує точки значення функції $(\bar{X}_1; f(\bar{X}_1))$ і $(\bar{X}_2; f(\bar{X}_2))$ розташований не нижче графіка опуклої функції на цій ділянці (для строго опуклої функції цей відрізок лежить вище графіка функції).

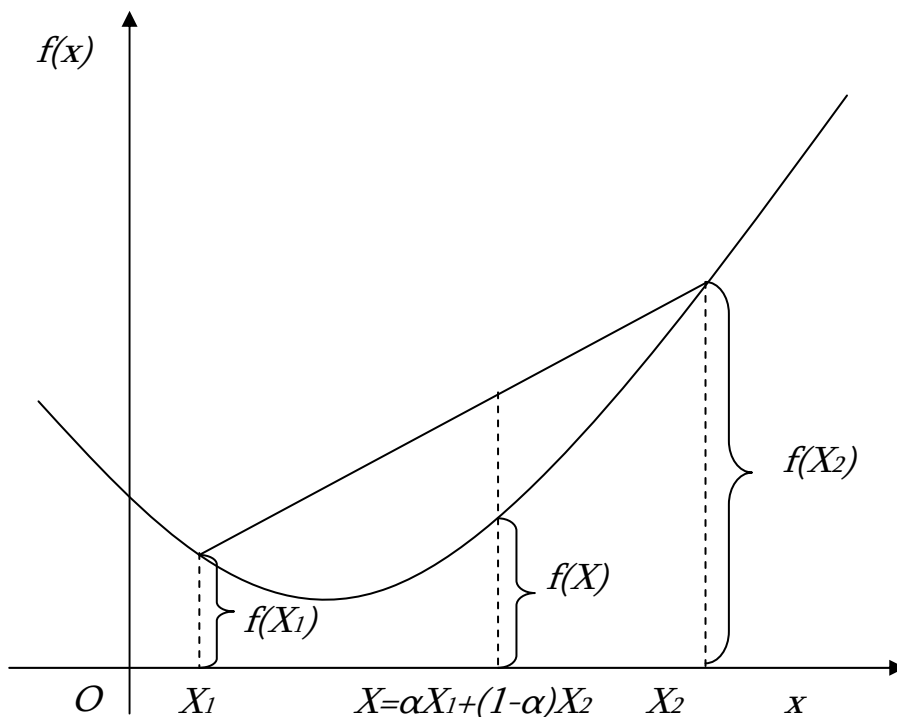


Рис. 7.7

Розглянемо властивості опуклих функцій. Всі функції, що розглядаються, визначені на деякій опуклій множині M . Властивості приводяться без доказу, але багато з них перевіряється за визначенням (7.11).

Алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій:

1. Якщо функція $f(\vec{X})$ опукла, то функція $-f(\vec{X})$ угнута.
2. Функцію $f(\vec{X})=C$ і лінійну функцію $f(\vec{X})=a\vec{X}+b$ можна вважати і опуклою і угнутою одночасно.
3. Якщо функції $f_i(\vec{X})$, $i=1,2,\dots,m$ опуклі, то при будь-яких дійсних числах $\alpha_i \geq 0$ функція $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\vec{X})$ також є опуклою.
4. Опукла (угнута) функція, визначена на опуклій множині M , неперервна в кожній внутрішній точці цієї множини.
5. Якщо $f(\vec{X})$ опукла функція, то множина точок, яка задовольняє нерівності $f(\vec{X}) \leq b$, опукла (якщо вона не пуста).
6. Всякий локальний мінімум опуклої функції є її глобальним мінімумом.
7. Якщо функції $f(\vec{X})$ та $g_i(\vec{X})$ ($i=1,2,\dots,m$) опуклі, то задача мінімізації функції $f(\vec{X})$ при умовах $g_i(\vec{X}) \leq b_i$ ($i=1,2,\dots,m$) має єдиний мінімум.
8. Якщо квадратична форма

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\vec{X})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \quad (7.12)$$

додатно означена або невід'ємна, то функція $f(\vec{X})$ опукла. Якщо квадратична форма (7.12) від'ємно означена або недодатна, то функція $f(\vec{X})$ угнута.

Щоб використовувати цю умову для визначення опуклості конкретної функції, часто корисно використати критерій Сильвестра, який розглянуто в попередньому параграфі.

У попередньому параграфі було показано, що точка оптимуму \vec{X}^0 задачі нелінійного програмування дає n компонент сідлової точки функції Лагранжа цієї задачі.

Точка $(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0)$, що належить множині M , називається *сідловою*, якщо значення функції Лагранжа $L(\vec{X}, \vec{\lambda})$ в деякому ε -околу цієї точки для всіх інших точок $(\vec{X}, \vec{\lambda}^0)$ і $(\vec{X}^0, \vec{\lambda})$, які також належать множині M , задовольняє співвідношення

$$L(\vec{X}, \vec{\lambda}^0) \leq L(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0) \leq L(\vec{X}^0, \vec{\lambda}). \quad (7.13)$$

Звертаємо увагу читача, що запис $L(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0)$ визначає число, яке дорівнює значенню функції Лагранжа в точці $(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0)$, а функція $L(\vec{X}, \vec{\lambda}^0)$ в лівій частині нерівності залежить тільки від \vec{X} і функція $L(\vec{X}^0, \vec{\lambda})$ в правій частині нерівності – від $\vec{\lambda}$. У неперервних функціях

$$L_{\max}(\vec{X}, \vec{\lambda}^0) = L_{\min}(\vec{X}^0, \vec{\lambda}) = L(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0),$$

тобто оптимальні значення функцій збігаються.

Достатні умови існування сідлової точки можна сформулювати таким чином:

Для того щоб точка $(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0)$ була сідловою точкою функції $L(\vec{X}, \vec{\lambda})$ достатньо, щоб в околі цієї точки функція була угнутою по \vec{X} та опуклою по $\vec{\lambda}$.

Розглянемо необхідні умови Куна-Таккера, які дозволяють визначити критичні точки в задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Ці умови є також і достатніми, якщо виконуються правила сформульовані у теоремі. Теорема Куна-Таккера тісно пов'язана з необхідними і достатніми умовами для сідлової точки і, по суті, впливає з них.

Розглянемо задачу нелінійного програмування:

$$z = f(\vec{X}) \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
g_i(\bar{X}) &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\
g_i(\bar{X}) &= b_i, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, m, \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Задачами опуклого програмування називають нелінійні задачі типу (7.14), в яких усі функції (ліві частини) системи обмежень опуклі, усі обмеження – однотипні нерівності типу „ \leq ” (при обмеженнях типу „ \geq ” ліві частини обмежень повинні бути угнутими функціями), або рівняння; цільова функція в задачах максимізації угнута, а в задачах мінімізації – опукла. При цьому множина планів задачі є опуклою областю, а задача задовольняє умови теореми Куна-Таккера, тобто має глобальний єдиний екстремум.

Теорема Куна-Таккера. Для того щоб деякий план \bar{X}^0 був розв'язком (точкою глобального максимуму) задачі (7.14), необхідно і достатньо, щоб існував відповідний цьому плану вектор $\bar{\lambda}^0$ множників Лагранжа такий, що точка $(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0)$ буде сідловою точкою функції Лагранжа задачі

$$L(\bar{X}, \bar{\lambda}) = f(\bar{X}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(\bar{X})) \tag{8.15}$$

і скрізь на множині планів цієї задачі цільова функція $f(\bar{X})$ буде угнута, а функції $g_i(\bar{X})$ – опуклі, причому множники Лагранжа, які відповідають обмеженням-нерівностям, повинні бути невід'ємними.

Тепер для задачі максимізації можна сформулювати **умови Куна-Таккера**, необхідні для того, щоб вектори \bar{X} і $\bar{\lambda}$ визначали критичну точку:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &\geq \bar{0}, \\
\frac{\partial f(\bar{X}^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{X}^0)}{\partial x_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
\lambda_i (b_i - g_i(\bar{X}^0)) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned}$$

$$g_i(\bar{X}^0) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Якщо цільова функція і область допустимих розв'язків задачі володіють певними властивостями, які пов'язані з опуклістю і угнутістю, то необхідні умови Куна-Таккера являються також достатніми. Згадані властивості перераховані в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Тип оптимізації	Необхідні умови	
	Цільова функція	Область допустимих розв'язків
Максимізація	Опукла	Опукла множина
Мінімізація	Угнута	Опукла множина

Процедура перевірки опуклості або угнутості деякої функції є більш простою процедурою, ніж доведення опуклості множини допустимих розв'язків задачі. Так як опуклість допустимої множини може бути встановлена шляхом безпосередньої перевірки опуклості або угнутості функцій обмежень, то завдяки цьому в таблиці 7.2 приведений перелік вимог, які простіше використовувати на практиці.

Таблиця 7.2

Тип оптимізації	Тип обмеження	Необхідні властивості		
		$f(\bar{X})$	$g_i(\bar{X})$	λ_i
Максимізація	\leq	Опукла	Опукла	≥ 0
	\geq		Угнута	≤ 0
	$=$		Лінійна	Без обмежень
Мінімізація	\leq	Угнута	Опукла	≤ 0
	\geq		Угнута	≥ 0
	$=$		Лінійна	Без обмежень

Приклад 7.8. Розглянемо задачу

$$\text{Мінімізувати } f(\bar{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при обмеженнях

$$g_1(\bar{X}) = 2x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$g_2(\vec{X}) = x_1 + x_3 \leq 2,$$

$$g_3(\vec{X}) = x_1 \geq 1,$$

$$g_4(\vec{X}) = x_2 \geq 2,$$

$$g_5(\vec{X}) = x_3 \geq 0.$$

Розв'язання. Оскільки розглядається задача мінімізації, то $\vec{\lambda} \leq \vec{0}$.

Тому умови Куна-Таккера записуються у вигляді:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \leq 0,$$

$$2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = 0,$$

$$2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0,$$

$$\lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0,$$

$$\lambda_3(1 - x_1) = 0,$$

$$\lambda_4(2 - x_2) = 0,$$

$$\lambda_5 x_3 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$x_1 + x_3 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0.$$

Звідси отримується розв'язок:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4.$$

Оскільки і цільова функція $f(\vec{X})$, і область допустимих розв'язків є опуклими, то отримана критична точка визначає глобальний мінімум задачі.

Розглянутий приклад показує, що розв'язування системи, яка народжується умовами Куна-Таккера, в явному вигляді може бути складним.

У загальному випадку опуклих задач доводиться звертатися до універсальних методів їх розв'язування. Одним з методів такого типу є градієнтний метод і його різноманітні модифікації. Зауважимо, що градієнтні методи можуть бути застосовані до всіх тих задач нелінійного програмування, цільова функція і обмеження яких диференційовані хоча б один раз, але при цьому є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Для опуклих задач, в яких виконуються умови теореми Куна-Таккера, градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму. Градієнтні методи є наближеними ітераційними методами і тому дають лише певне наближення дійсної екстремальної точки, якого при збільшенні обсягу обчислень можна досягнути з наперед заданою точністю.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції – визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції.

Введемо необхідні поняття.

Похідною $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ функції $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за напрямом \vec{l} в точці

\vec{X} називається границя

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\vec{X} + \lambda \vec{l}) - f(\vec{X})}{\lambda}.$$

Напрямок \vec{l} задається вектором $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Якщо функція $f(\vec{X})$ диференційована в точці \vec{X} , то вона має в цій точці похідну за будь-яким напрямом \vec{l} , яка виражається через частинні похідні за формулою

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{|\vec{l}|} \sum_{i=1}^n l_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

де $|\vec{l}|$ – довжина вектора \vec{l} , тобто $|\vec{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2}$.

Абсолютна величина похідної за напрямом дає швидкість зміни функції в цьому напрямку, а знак вказує на характер зміни (зростання або спадання).

Градiєнтом ∇f (*gradf*) функції $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні, тобто

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Можна показати, що максимум похідної за напрямом $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ досягається тоді, коли напрямок \vec{l} співпадає з напрямом ∇f . Похідна функції f за напрямом градієнта ∇f дорівнює

$$\frac{\partial f}{\partial(\nabla f)} = \frac{1}{|\nabla f|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = |\nabla f|.$$

Таким чином, в кожній точці \vec{X} напрям градієнта є напрямом найбільшого зростання функції, а довжина градієнта дорівнює найбільшій швидкості зростання функції в цій точці.

Ідея градієнтних методів полягає в переході від точки до точки на гіперповерхні цільової функції в напрямі градієнта з деяким, наперед заданим, кроком. Згідно з градієнтним методом, обчислення завершуються при знаходженні точки, в якій градієнт дорівнює нулю. Але це лише необхідна умова для того, щоб в даній точці знаходився оптимум. Щоб впевнитись, що знайдена саме точка оптимуму, звичайно залучаються властивості опуклості та угнутості цільової функції.

Одним з градієнтних методів є *метод найшвидшого спуску* (в іноземній літературі цей метод називається *методом найшвидшого підйому*).

Загальна схема розв'язування задач математичного програмування методами спуску полягає в побудові послідовності

$$\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k, \dots \quad (7.16)$$

розв'язків системи обмежень даної задачі за наступним принципом: в якості \vec{X}_0 обирається будь-яка точка області допустимих розв'язків і потім кожна наступна точка отримується з попередньої за формулою:

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \lambda \vec{l}, \quad (7.17)$$

де $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – деякий напрямок, а λ – число. При цьому напрямок \vec{l} і „довжина кроку” λ обираються так, щоб забезпечити збіжність послідовності (7.16) до оптимального розв'язку \vec{X}^* . В загальному випадку процес отримання послідовних наближень \vec{X}_k нескінченний (і тоді деяке \vec{X}_r приймається за наближене значення оптимального розв'язку \vec{X}^*), однак іноді процес може завершитись і за скінчене число кроків, які приводять до локального, а в задачах опуклого програмування і глобального оптимуму.

Знаходячи похідну за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$, можна визначати, чи є напрямок \vec{l} „вигідним” або „невигідним” в змісті наближення до оптимуму.

Так як напрямок градієнта ∇z цільової функції є напрямом її найшвидшого росту, то при відшуканні максимуму угнутої функції (мінімуму опуклої функції) в якості \vec{l} часто береться ∇z ($-\nabla z$) і тоді формула (7.17) приймає вид

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \lambda \cdot \nabla z(\vec{X}_k), \quad \lambda > 0 \text{ (якщо шукається } \max z \text{)} \quad (7.18)$$

або

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - \lambda \cdot \nabla z(\vec{X}_k), \quad \lambda > 0 \text{ (якщо шукається } \min z \text{)}. \quad (7.19)$$

Методи спуску, в яких ітераційна послідовність (7.16) знаходиться за формулою (7.18) або (7.19), називаються *градієнтними*. Між собою вони відрізняються способами вибору довжини кроку λ і алгоритмами знаходження точки \vec{X}_{k+1} , якщо \vec{X}_k знаходиться на границі області

розв'язків і формула (7.18) виводить \vec{X}_{k+1} за межі цієї області. (Вибір довжини кроку λ дуже важливий, так як пересуваючись від точки \vec{X}_k в напрямі ∇z можна „проскочити” мимо точки, в якій досягається шуканий максимум). Якщо величина λ вибирається так, щоб приріст функції Δz при переміщенні з точки \vec{X}_k в точку \vec{X}_{k+1} був найбільшим (при відшуканні $\max z$) або найменшим (при відшуканні $\min z$), то градієнтний метод називається *методом найшвидшого спуску*. Отже, за методом найшвидшого спуску довжина кроку λ в формулі (7.18) або (7.19) обирається так, щоб при цьому значенні λ досягався екстремум функції $\Delta z = z(\vec{X}_{k+1}) - z(\vec{X}_k)$. Слід звернути увагу на той факт, що при знаходженні точки \vec{X}_{k+1} попередня точка \vec{X}_k вважається вже відомою, тобто $z(\vec{X}_k)$ і $\nabla z(\vec{X}_k)$ є сталими величинами, а Δz – функцією однієї змінної λ . Якщо продиференціювати функцію Δz та врахувати вираз (7.18) і вираз градієнта в точці \vec{X}_k , то отримуємо, що необхідна умова екстремуму $\frac{d(\Delta z)}{d\lambda} = 0$

прийме вигляд:

$$\frac{\partial z(\vec{X}_{k+1})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z(\vec{X}_k)}{\partial x_1} + \frac{\partial z(\vec{X}_{k+1})}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial z(\vec{X}_k)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z(\vec{X}_{k+1})}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial z(\vec{X}_k)}{\partial x_n} = 0 \quad (7.20)$$

Цьому виразу можна надати більш компактну форму, якщо скористатись скалярним добутком векторів:

$$\nabla z(\vec{X}_{k+1}) \cdot \nabla z(\vec{X}_k) = 0. \quad (7.21)$$

Якщо оптимум досягається всередині області розв'язків системи обмежень даної задачі опуклого програмування, то немає небезпеки, що точка \vec{X}_{k+1} , знайдена за формулою (7.18) або (7.19), вийде за межі цієї області та довжину кроку λ визначають за формулою (7.20) без яких-небудь додаткових обмежень. Розглянемо приклад розв'язування такої задачі. Замість $\nabla z(\vec{X}_k)$ будемо писати ∇z_k .

Зауваження 1. Для різних k довжина кроку λ в формулі (7.18), взагалі кажучи, різна, і для строгості треба писати λ_k , але це зробило б запис розв'язування більш громіздким.

Зауваження 2. Для спрощення розрахунків в формулах (7.18) і (7.21) замість ∇z_k можна брати будь-який вектор з тим самим напрямом, тобто координати вектора ∇z_k можна множити або ділити на додатне число.

Приклад 7.9. Знайти методом найшвидшого спуску з точністю до 0,001 мінімум функції

$$z = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - 1$$

та загальний вираз градієнту цільової функції:

$$\nabla z = (4x_1 - x_2 - 1; -x_1 + 2x_2 - 1).$$

В якості вихідної точки беремо точку $\vec{X}_0 = (1;1)$, яка лежить в області розв'язків. Так як z є опуклою функцією, то для знаходження точок \vec{X}_{k+1} будемо користуватись формулою (7.19), в якій замість ∇z_k в деяких випадках будемо брати вектор l_k з тим самим напрямком, але більш простими координатами. Довжина кроку λ знаходиться за формулою (7.21).

1-й крок. Підставимо у вираз градієнта цільової функції координати точки \vec{X}_0 та отримуємо $\nabla z_0 = (2;0)$.

За формулою (7.19) $\vec{X}_1 = \vec{X}_0 - \lambda \nabla z_0 = (1;1) - \lambda(2;0) = (1 - 2\lambda;1)$.

Підставивши координати точки у вираз градієнта, отримуємо

$$\nabla z_1 = (4(1-2\lambda) - 1 - 1; -1 + 2\lambda + 2 \cdot 1 - 1) = (2 - 8\lambda; 2\lambda).$$

Тепер можна записати рівняння (7.21) для знаходження λ :

$$\nabla z_0 \cdot \nabla z_1 = (2; 0) \cdot (2 - 8\lambda; 2\lambda) = 4 - 16\lambda + 0 \cdot 2\lambda = 4 - 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

Підставивши це значення λ у вирази для \vec{X}_1 і ∇z_1 , отримуємо

$$\vec{X}_1 = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}; 1\right) = \left(\frac{1}{2}; 1\right), \quad \nabla z_1 = \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

На кожному подальшому кроці виконуються аналогічні обчислення, які описані у 1-му кроці.

2-й крок. Замість ∇z_1 візьмемо $\vec{l}_1 = (0; 1)$. Тоді

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_1 - \lambda \vec{l}_1 = \left(\frac{1}{2}; 1\right) - \lambda(0; 1) = \left(\frac{1}{2}; 1 - \lambda\right).$$

$$\nabla z_2 = \left(4 \cdot \frac{1}{2} - (1 - \lambda) - 1; -\frac{1}{2} + 2(1 - \lambda) - 1\right) = \left(\lambda; \frac{1}{2} - 2\lambda\right).$$

$$\vec{l}_1 \cdot \nabla z_2 = (0; 1) \cdot \left(\lambda; \frac{1}{2} - 2\lambda\right) = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right) = \frac{1}{2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

$$\vec{X}_2 = \left(\frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right),$$

$$\nabla z_2 = \left(4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1; -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) = \left(\frac{1}{4}; 0\right).$$

3-й крок. Замість ∇z_2 візьмемо $\vec{l}_2 = (1; 0)$. Тоді

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_2 - \lambda \vec{l}_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) - \lambda(1; 0) = \left(\frac{1}{2} - \lambda; \frac{3}{4}\right).$$

$$\nabla z_3 = \left(4 \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} - 1; -\frac{1}{2} + \lambda + 2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) = \left(\frac{1}{4} - 4\lambda; \lambda\right).$$

$$\vec{l}_2 \cdot \nabla z_3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4} - 4\lambda\right) + 0 \cdot \lambda = \frac{1}{4} - 4\lambda = 0, \text{ звідки } \lambda = \frac{1}{16}.$$

$$\vec{X}_3 = \left(\frac{1}{2} - \lambda; \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{7}{16}; \frac{3}{4}\right) = (0,4375; 0,75) \quad \text{і} \quad \nabla z_3 = \left(\frac{1}{4} - 4\lambda; \lambda\right) = \left(0; \frac{1}{16}\right).$$

4-й крок. Беремо $\vec{l}_3 = (0; 1)$. Тоді

$$\vec{X}_4 = \vec{X}_3 - \lambda \vec{l}_3 = \left(\frac{7}{16}; \frac{3}{4} \right) - \lambda(0;1) = \left(\frac{7}{16}; \frac{3}{4} - \lambda \right).$$

$$\nabla z_4 = \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4} + \lambda - 1; -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} - 2\lambda - 1 \right).$$

$$\vec{l}_3 \cdot \nabla z_4 = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \left(\frac{1}{16} - 2\lambda \right) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{32}.$$

$$\vec{X}_4 = \left(\frac{7}{16}; \frac{3}{4} - \lambda \right) = \left(\frac{7}{16}; \frac{23}{32} \right) = (0,4375; 0,71875).$$

$$\nabla z_4 = \left(\frac{1}{32}; 0 \right).$$

5-й крок. Беремо $\vec{l}_4 = (1;0)$. Тоді

$$\vec{X}_5 = \vec{X}_4 - \lambda \vec{l}_4 = \left(\frac{7}{16}; \frac{23}{32} \right) - \lambda(1;0) = \left(\frac{7}{16} - \lambda; \frac{23}{32} \right).$$

$$l_4 \cdot \nabla z_5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{32} - 4\lambda \right) + 0 \cdot \lambda = \frac{1}{32} - 4\lambda = 0, \text{ звідки}$$

$$\lambda = \frac{1}{128} \text{ і } \vec{X}_5 = \left(\frac{55}{128}; \frac{23}{32} \right).$$

Отже, $\vec{X}_5 = (0,4296875; 0,71875)$. Порівняння \vec{X}_4 і \vec{X}_5 показує, що координати цих точок відрізняються менше, ніж на 0,01 і тому (це не зовсім строго) можна покласти $\vec{X}^* \approx (0,43; 0,72)$. Неважко переконатись, що всі точки $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_5, \vec{X}^*$ лежать в області розв'язків системи обмежень.

7.5. КВАДРАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

До задач квадратичного програмування відносяться ті нелінійні задачі, які мають лінійні обмеження і цільову функцію, що становить суму лінійної і квадратичної форм. Отже, квадратичні задачі є окремим випадком опуклих задач. Спеціальні методи розв'язування квадратичних задач повністю ґрунтуються на їх специфіці.

У матричній формі загальну задачу квадратичного програмування можна записати у вигляді:

максимізувати (або мінімізувати) $z = \vec{C}\vec{X} + \vec{X}^T D\vec{X}$

при обмеженнях

$$A\vec{X} \leq \vec{b},$$

$$\vec{X} \geq \vec{0},$$

де

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

(Нагадаємо, що символом „ T ” позначають транспоновані вектори і матриці).

D – симетрична квадратична матриця, а функція $\vec{X}^T D\vec{X}$ є квадратичною формою. Матриця D буде від’ємно означеною в задачі максимізації і додатньо означеною – в задачі мінімізації. Це означає, що цільова функція z є строго опуклою у випадку задачі мінімізації і строго угнутою – в задачі максимізації. Оскільки обмеження лінійні і, отже, можуть вважатися опуклими функціями, умови теореми Куна-Таккера повністю виконуються і задача має глобальний екстремум. Ця обставина дає можливість використати необхідні умови Куна-Таккера для побудови ефективного методу розв’язку квадратичних задач, в основі якого лежить обчислювальний алгоритм симплексного методу.

Задачу квадратичного програмування розглянемо для випадку, коли цільова функція підлягає максимізації. Зміна формулювання задачі при мінімізації являється тривіальною. Використовуючи блочні матриці, загальну постановку задачі можна записати в більш компактному вигляді, а саме:

$$z = \vec{C}\vec{X} + \vec{X}^T D\vec{X} \rightarrow \max,$$

$$G(\vec{X}) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} \vec{X} - \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \leq \vec{0},$$

де I – одинична матриця.

Позначимо через

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \text{ і } \vec{U} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

множники Лагранжа, які відповідають обмеженням $A\vec{X} - \vec{b} \leq \vec{0}$ і $-\vec{X} \leq \vec{0}$ відповідно. Застосовуючи умови Куна-Таккера, отримуємо

$$\vec{\lambda} \geq \vec{0}, \vec{U} \geq \vec{0},$$

$$\nabla_z - (\vec{\lambda}^T, \vec{U}^T) \cdot \nabla G(\vec{X}) = \vec{0},$$

$$\lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mu_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$A\vec{X} \leq \vec{b},$$

$$-\vec{X} \leq \vec{0}.$$

Звідки маємо

$$\nabla_z = \vec{C} + 2\vec{X}^T D,$$

$$\nabla G(\vec{X}) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\vec{S} = \vec{b} - A\vec{X} \geq \vec{0}$ вектор додаткових змінних. Тоді наведені вище умови набувають наступного вигляду.

$$-2\vec{X}^T D + \vec{\lambda}^T A - \vec{U}^T = \vec{C},$$

$$A\vec{X} + \vec{S} = \vec{b},$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i \text{ для всіх } i \text{ та } j,$$

$$\vec{\lambda}, \vec{U}, \vec{X}, \vec{S} \geq \vec{0}.$$

Отже, необхідні умови можуть бути записані у вигляді

$$\begin{pmatrix} -2D & A^T & -I & \vec{0} \\ A & \vec{0} & \vec{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\lambda} \\ \vec{U} \\ \vec{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{C}^T \\ \vec{b} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i \text{ для всіх } i \text{ та } j, \\ \vec{\lambda}, \vec{U}, \vec{X}, \vec{S} \geq \vec{0}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Всі рівняння, за виключенням $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$, є лінійними відносно змінних \vec{X} , $\vec{\lambda}$, \vec{U} і \vec{S} . Отже, вихідна задача зводиться до знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь, що задовольняють додатковим умовам $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$. Виконання цієї умови означає, що якщо змінна λ_i в базисному розв'язку приймає додатне значення, то змінна s_i не може бути базисною і приймати додатного значення. Аналогічно змінні μ_j і x_j не можуть одночасно приймати додатних значень. Оскільки функція z строго угнута, а область допустимих розв'язків являє собою опуклу множину, допустимий розв'язок, який задовольняє всі ці умови, повинен бути єдиним і оптимальним.

Розв'язок системи, що розглядається, знаходиться шляхом реалізації першого етапу так званого *двохетапного методу* розв'язування задач лінійного програмування. В *двохетапному методі* процес розв'язування задачі розбивається на два етапи. На першому етапі ведеться пошук початкового допустимого базисного розв'язку. Якщо такий розв'язок знайдено, то на другому розв'язується вихідна задача. Як було сказано, для нас цікавим є тільки перший етап, тому розглянемо його алгоритм.

Задача лінійного програмування записується у першій стандартній формі, а в обмеження додаються штучні змінні для отримання канонічної форми задачі і початкового базисного розв'язку. Розв'язується задача *мінімізації* суми штучних змінних з вихідними обмеженнями. Якщо мінімальне значення цієї нової цільової функції більше нуля, то це озна-

чає, що вихідна задача не має допустимих розв'язків, і процес обчислень завершується. Якщо нова цільова функція дорівнює нулю, тобто обертаються в нуль всі штучні змінні, то це означає, що вихідна задача має непусту множину допустимих розв'язків.

Розглянемо наступну задачу.

Приклад 7.10. Максимізувати

$$z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Цю задачу можна записати в матричній формі

$$z = (4, 6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$(1, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Отже, $\vec{C} = (4, 6)$, $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A = (1 \ 2)$, $\vec{b} = (2)$ і $\vec{C}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

та умови Куна-Таккера (7.22) приймають вигляд.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Початкова симплексна таблиця будується шляхом введення штучних змінних R_1 і R_2 у перше і друге рівняння (у третьому рівнянні є базисна змінна s_1). Нову цільову функцію $r = R_1 + R_2$ виразимо через небазисні змінні $r = -6x_1 - 6x_2 - 3\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2 + 10$.

Маємо початкову симплексну таблицю

Базис	ОП	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	R_1	R_2
r	10	6	6	3	-1	-1	0	0	0
R_1	4	4	2	1	-1	0	0	1	0
R_2	6	2	4	2	0	-1	0	0	1
s_1	2	1	2	0	0	0	1	0	0

Перша ітерація

Оскільки $\mu_1 = 0$ (μ_1 не є базисною), то в базис можна ввести змінну x_1 , так як вона згідно з додатковим обмеженням (7.23) може бути додатною. При цьому з числа базисних змінних виключаємо змінну R_1 . Отримуємо симплексну таблицю.

Базис	ОП	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	R_1	R_2
r	4	0	3	3/2	1/2	-1	0	-3/2	0
x_1	1	1	1/2	1/4	-1/4	0	0	1/4	0
R_2	4	0	3	3/2	1/2	-1	0	-1/2	1
s_1	1	0	3/2	-1/4	1/4	0	1	-1/4	0

Друга ітерація

Так як $\mu_2 = 0$, змінною, що вводиться в базис буде x_2 . В результаті переходимо до наступної таблиці.

Базис	ОП	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	R_1	R_2
r	2	0	0	2	0	-1	-2	-1	0
x_1	2/3	1	0	1/3	-1/3	0	-1/3	1/3	0
R_2	2	0	0	2	0	-1	-2	0	1
x_2	2/3	0	1	-1/6	1/6	0	2/3	-1/6	0

Третя ітерація

Так як $s_1 = 0$, в число базисних можна ввести змінну λ_1 . В результаті отримуємо симплексну таблицю.

Базис	ОП	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	R_1	R_2
r	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
x_1	1/3	1	0	0	-1/3	1/6	0	1/3	-1/6
λ_1	1	0	0	1	0	-1/2	-1	0	1/2
x_2	5/6	0	1	0	1/6	-1/12	1/2	-1/6	1/12

Остання таблиця дає оптимальний розв'язок. Так як $r = 0$, отриманий розв'язок $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/6$ є допустимим. Оптимальне значення z обчислюється підстановкою отриманого розв'язку у вираз для цільової функції вихідної задачі і дорівнює $z = 4,16$.

7.6. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ З СЕПАРАБЕЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Сепарабельною¹ називають таку функцію n змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що є сумою n функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j). \quad (7.24)$$

Звернемо увагу, що всі лінійні функції

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (a_i - \text{константи})$$

є сепарабельними і тому розглядувані тут задачі мають структуру, подібну до задач лінійного програмування. Тому природно використати цю подібність для побудови методів розв'язування нелінійних задач із сепарабельними функціями. В цьому параграфі розглядається метод наближеного розв'язування задач сепарабельного програмування, заснований на лінійній апроксимації і на симплексному методі лінійного програмування.

Деякі несепарабельні відносно даних змінних функції являються сепарабельними відносно інших змінних. Знайшовши відповідну заміну

¹ Слід відмітити, що поняття сепарабельності тут не має нічого спільного (крім назви) з „класичним” його значенням з функціонального аналізу.

змінних, можна застосувати методи сепарабельного програмування. Наприклад, функція $z = x_1 x_2$ буде сепарабельною відносно змінних y_1 і y_2 , де $x_1 = y_1 + y_2$, а $x_2 = y_1 - y_2$, звідки $z = y_1^2 - y_2^2$. Якщо ввести позначення $z' = \ln z = y_1 + y_2$, де $y_1 = \ln x_1$ і $y_2 = \ln x_2$, то нова функція z' буде сепарабельною.

У сепарабельному програмуванні розглядаються задачі нелінійного програмування, в яких як цільова функція, так і функції системи обмежень являються сепарабельними, а саме:

$$z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max, \quad (7.25)$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.26)$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \quad (7.27)$$

Кожну функцію однієї змінної $f_j(x_j)$ можна апроксимувати кусково-лінійною функцією $\tilde{f}_j(x_j)$, значення якої збігаються в точках зламу (вузлових) із значеннями заданої нелінійної функції (рис 7.8).

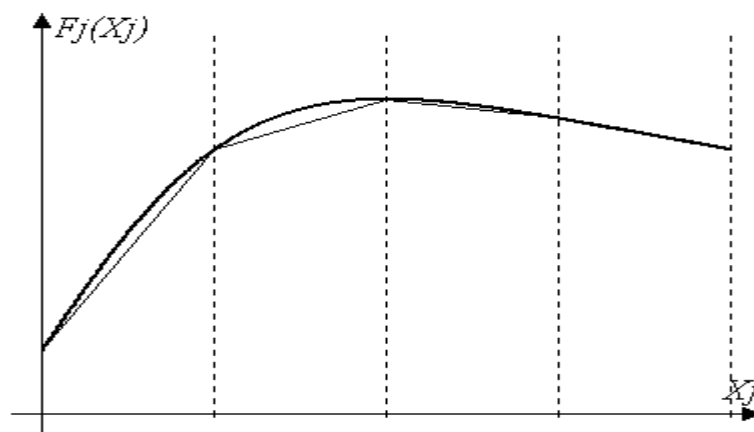


Рис. 7.8

Вузлові точки, як правило, вибирають на однаковій, наперед вибраній, відстані одна від іншої і вони повинні належати області значення функції. Очевидно, апроксимована функція повинна бути неперервною.

Апроксимуючи таким способом усі функції заданої нелінійної задачі, дістаємо вже лінійну задачу, наближену до вихідної. Зрозуміло, що і розв'язок наближеної задачі не буде точним розв'язком вихідної задачі, а дає лише певне його наближення. За рахунок зменшення довжини ланок апроксимуючих ламаних ліній це наближення, як правило, можна визначити з наперед заданою точністю, що потребує часто значного збільшення обсягу обчислень. (Проте, можливі випадки, коли встановити збіжність розв'язків наближених задач до локальних екстремумів вихідної задачі при цьому дуже важко).

З геометричних міркувань зрозуміло, що для знаходження глобального екстремуму функції мети на множині планів задачі треба, щоб функції цієї задачі мали потрібні властивості опуклості. Якщо ця умова не виконана, то метод кусково-лінійної апроксимації приводить лише до наближеного визначення точок локального екстремуму. Більш того, побудова наближених задач інколи приводить до появи їх власних „фіктивних” для вихідної задачі екстремумів. Усе це потребує великої обережності при застосуванні методу кусково-лінійної апроксимації.

Нехай $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – деяка сепарабельна функція, яка входить у задачу (7.25) – (7.27). Знайдемо аналітичний запис апроксимуючої її кусково-лінійної функції. Позначимо $[\alpha_j; \beta_j]$ – інтервал допустимих значень змінної x_j . Розіб'ємо його за допомогою фіксованих точок x_{kj} ($k = 1, 2, \dots, r$) на r частин-сегментів (взагалі число сегментів для різних змінних x_j може бути різною і точніше було позначати її r_j). Якщо x_j міститься між x_{kj} і $x_{k+1,j}$, то рівняння відповідної хорди, яка апроксимує цю функцію, буде таким:

$$\frac{\tilde{\varphi}_j(x_j) - \varphi_{kj}}{\varphi_{k+1,j} - \varphi_{kj}} = \frac{x_j - x_{kj}}{x_{k+1,j} - x_{kj}} \quad (7.28)$$

(рівняння прямої, що проходить через дві задані точки), де $\varphi_{kj} = \varphi_j(x_{kj})$; $\varphi_{k+1,j} = \varphi_j(x_{k+1,j})$. Якщо кожне з відношень в рівності (7.28) позначити через λ_j , то отримуємо:

$$x_j = \lambda_j x_{k+1,j} + (1 - \lambda_j) x_{kj}, \quad (7.29)$$

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) = \lambda_j \varphi_{k+1,j} + (1 - \lambda_j) \varphi_{kj}, \quad (7.29a)$$

причому $0 \leq \lambda_j \leq 1$. Рівняння (7.29), (7.29a) є параметричними рівняннями хорди (7.28). Позначивши тепер для k -го сегмента

$$\lambda_j = \lambda_{k+1,j}; \quad 1 - \lambda_j = \lambda_{kj}$$

дістанемо з (7.29), (7.29a)

$$\tilde{\varphi}(x_j) = \lambda_{kj} \varphi_{kj} + \lambda_{k+1,j} \varphi_{k+1,j} \quad (7.30)$$

для

$$x_j = \lambda_{kj} x_{kj} + \lambda_{k+1,j} x_{k+1,j} \quad (7.31)$$

де

$$\lambda_{kj} + \lambda_{k+1,j} = 1; \quad \lambda_{kj}, \lambda_{k+1,j} \geq 0 \quad (7.32)$$

Формули (7.30) – (7.32) можна узагальнити для зображення довільного $x_j \in [\alpha_j; \beta_j]$ і відповідних довільних значень апроксимуючої функції $\tilde{\varphi}_j(x_j)$, якщо прийняти таку додаткову умову, яку іноді називають *правилом обмеженого введення у базис*:

у базисі повинно бути не більше двох, і при тому сусідніх, λ_{kj} для кожного $j = 1, 2, \dots, n$ відмінних від нуля (тобто додатних).

Тоді узагальнені формули матимуть такий вигляд:

$$x_j = \sum_{k=0}^r \lambda_{kj} x_{kj}, \quad (7.33)$$

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) = \sum_{k=0}^r \lambda_{kj} \varphi_{kj}, \quad (7.34)$$

$$\sum_{k=0}^r \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \geq 0. \quad (7.35)$$

Користуючись виразами (7.33) – (7.35) і правилом обмеженого введення у базис, можемо для задачі (7.25) – (7.27) записати наближену задачу так:

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^r f_{kj} \lambda_{kj} \rightarrow \max, \quad (7.36)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^r g_{kij} \lambda_{kj} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.37)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^r g_{kij} \lambda_{kj} = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m, \quad (7.38)$$

$$\sum_{k=0}^r \lambda_{kj} = 1, \quad (7.39)$$

$$\lambda_{kj} \geq 0 \text{ для всіх } k \text{ і } j. \quad (7.40)$$

Змінними наближеної задачі (7.36) – (7.40) є величини λ_{kj} , оскільки значення функцій f_{kj} і g_{kij} фіксовані (обчислені у вузлових точках).

Число змінних λ_{kj} легко підрахувати, а саме

$$N = n \cdot r + 1$$

або, якщо число частин-сегментів для змінних різні

$$N = \sum_{j=1}^n r_j + 1.$$

Ця наближена задача називається задачею в λ -формі. Вона була б лінійною, якби не правило обмеженого введення у базис, накладене на змінні λ_{kj} . Проте, незважаючи на це, наближена задача допускає застосування такої модифікації алгоритму симплексного методу, яка враховує згадане правило.

Як видно, з останньої формули, наближена задача навіть для невеликої вихідної задачі може бути дуже великих розмірів за рахунок різкого збільшення числа змінних. Проте на практиці часто трапляється, що вихідна задача нелінійна лише відносно однієї змінної x_j , через що за-

міни через змінні λ_{kj} потребує лише зазначена змінна, а решту можна розглядати як звичайні змінні лінійної задачі.

Знайшовши розв'язок наближеної задачі, оптимальні значення x_j визначають за формулою (7.33). Для ілюстрації розв'яжемо описаним способом елементарний приклад.

Приклад 7.11. Знайти оптимальний розв'язок задачі

$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Зауважимо, що задачу легко розв'язати графічно. Множина допустимих розв'язків опукла, а функції $f_1(x_1) = 2x_1 - x_1^2$ та $f_2(x_2) = x_2$ – угнуті. Тому задача задовольняє умови Куна-Таккера: має єдиний глобальний максимум у точці $x_1^* = 0,7906$; $x_2^* = 1,258$, $z = 2,213$.

Перейдемо до побудови наближеної задачі. Зауважимо, що

$$g_1(x_1) = 2x_1^2, \quad g_2(x_2) = 3x_2^2.$$

Визначимо границі допустимих значень змінних x_1 та x_2 . З обмеження задачі випливає, що

$$0 \leq x_1 \leq \sqrt{3} = 1,732;$$

$$0 \leq x_2 \leq \sqrt{2} = 1,414.$$

Виберемо точки x_{kj} ($j = 1, 2$) рівновіддаленими з кроком 0,25. Тоді $r_1 = 7$; $r_2 = 6$, причому маємо $x_{71} = 1,750 > 1,732$, а $x_{62} = 1,500 > 1,414$, що не впливає в цьому прикладі на метод побудови наближеної задачі. Отже, замість змінної x_1 маємо 8 нових змінних λ_{kj} ($k = 0, 1, \dots, 7$), а замість змінної x_2 – 7 нових змінних λ_{k2} ($k = 0, 1, \dots, 6$). Значення обчислених x_{k1} , x_{k2} , f_{k1} , f_{k2} , g_{k1} , g_{k2} зведені в таблицю:

k	x_1	f_1	g_1	x_2	f_2	g_2
0	0,00	0	0	0,00	0	0
1	0,25	0,4375	0,1250	0,25	0,2500	0,1875
2	0,50	0,7500	0,5000	0,50	0,5000	0,7500
3	0,75	0,9375	1,1250	0,75	0,7500	1,6875
4	1,00	1,0000	2,0000	1,00	1,0000	3,0000
5	1,25	0,9375	3,1250	1,25	1,2500	4,6875
6	1,50	0,7500	4,5000	1,50	1,5000	6,7500
7	1,75	0,4375	6,1250	—	—	—

Не розписуючи наближену задачу докладно, подамо її у вигляді

$$\tilde{z} = \sum_{k=0}^7 f_{k1} \lambda_{k1} + \sum_{k=0}^6 f_{k2} \lambda_{k2} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{k=0}^7 g_{k1} \lambda_{k1} + \sum_{k=0}^6 g_{k2} \lambda_{k2} + x_3 = 6,$$

$$\sum_{k=0}^7 \lambda_{k1} = 1, \quad \sum_{k=0}^6 \lambda_{k2} = 1,$$

$$\lambda_{kj} \geq 0, \quad j = 1, 2 \text{ і для всіх } k, \quad x_3 \geq 0.$$

Зрозуміло, що сюди ще слід додати *правило обмеженого введення у базис*.

Враховуючи велику кількість змінних не будемо приводити алгоритм симплекс-методу, а наведемо оптимальний план наближеної задачі. Отже, $\tilde{z}^* = 2,2102$ при $\lambda_{31}^* = 1$, $\lambda_{52}^* = 0,9091$, $\lambda_{62}^* = 0,0909$. Решта $\lambda_{kj}^* = 0$, $j = 1, 2$. Можна пересвідчитись, що цей план є оптимальним, якщо скористатись, наприклад, інструментарієм універсального інтегрованого середовища Mathcad (приклади розв'язування оптимізаційних задач у середовищі Mathcad приведені в розділі 15).

Звернемо увагу, що оптимальне \tilde{z}^* наближеної задачі всього на 0,0028 відрізняється від точного оптимального z^* .

Визначимо оптимальні значення \tilde{x}_1^* і \tilde{x}_2^* , які знаходимо з наближеної задачі:

$$\tilde{x}_1^* = \lambda_{31}^* x_{31} = 1 \cdot 0,75 = 0,75;$$

$$\tilde{x}_2^* = \lambda_{52}^* x_{52} + \lambda_{62}^* x_{62} = 0,9091 \cdot 1,25 + 0,0909 \cdot 1,50 = 1,2727.$$

Зазначимо, що \tilde{x}_1^* і \tilde{x}_2^* значно більше відрізняються від відповідних значень точного оптимального плану x_1^* і x_2^* , ніж значення цільових функцій при цих планах.

Для збільшення точності розв'язку задачі слід встановити деякий окіл точки знайденого з наближеної задачі оптимального плану і знову розробити інтервали зміни окремих координат в цьому околі на певне число проміжків. Потім скласти нову наближену задачу та розв'язати її.

Для прикладу 7.11 таким оком є квадрат $0,5 \leq x_1 \leq 1,0$; $1,0 \leq x_2 \leq 1,5$. Величину кроку можна зменшити до 0,1. Ітерації можна повторювати до одержання необхідної точності розв'язку.

7.7. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

До задач дробово-лінійного програмування належать задачі з дробово-лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями. Дробово-лінійне програмування відноситься до нелінійного програмування, так як має цільову функцію, яка задана у нелінійному вигляді.

Задача дробово-лінійного програмування в загальному вигляді записується наступним чином:

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{j=1}^n q_j x_j} = \frac{P(\vec{X})}{Q(\vec{X})} \rightarrow opt, \quad (7.41)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.42)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m, \quad (7.43)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.44)$$

Практичне значення дробово-лінійних задач зумовлюється тим, що значна кількість важливих економічних показників є відносними, тобто вони визначаються як частка від ділення двох інших показників. Наприклад, математична модель задачі дробово-лінійного програмування може бути використана для визначення собівартості продукції, рівня рентабельності господарської діяльності.

Позначимо: p_j – прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції j -го виду;

x_j – кількість випущеної продукції j -го виду;

s_j – ціна одиниці продукції j -го виду;

c_j – собівартість виробництва одиниці продукції j -го виду;

d_j – витрати на виробництво одиниці продукції j -го виду.

Задача рентабельності (P_v) витрат на виробництво продукції має вид

$$P_v = \frac{\sum p_j x_j}{\sum c_j x_j} \rightarrow \max.$$

Задача рентабельності (P_p) продаж має вид

$$P_p = \frac{\sum p_j x_j}{\sum s_j x_j} \rightarrow \max.$$

Задача визначення витрат (V_g) у розрахунку на гривню товарної продукції записується у вигляді

$$V_g = \frac{\sum c_j x_j}{\sum s_j x_j} \rightarrow \min.$$

Задача знаходження середньої собівартості одиниці продукції записується як

$$C_o = \frac{\sum d_j}{\sum x_j} \rightarrow \min.$$

Вказані математичні моделі мають системи обмежень в залежності від умов задачі.

Хоч вигляд цільової функції дає підстави віднести дробово-лінійні задачі до нелінійних, їх математична структура дозволяє розв'язувати ці задачі одним з варіантів симплексного методу.

Якщо дробово-лінійна цільова функція неоднорідна, тобто має вид

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n + p_0}{q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n + q_0},$$

то заміною змінних $x_1 = x'_1 - x_1^{(0)}$ і $x_2 = x'_2 - x_2^{(0)}$ її слід привести до однорідного виду. Очевидно, що $x_1^{(0)}$ та $x_2^{(0)}$ повинні задовольняти систему рівнянь, з якої вони і визначаються:

$$p_1x_1^{(0)} + p_2x_2^{(0)} = p_0,$$

$$q_1x_1^{(0)} + q_2x_2^{(0)} = q_0.$$

Покладемо, що на множині планів задачі знаменник цільової функції не стає рівним нулю: $Q(\vec{X}) \neq 0$, якщо $\vec{X} \in \Omega$. На практиці ця умова завжди реалізується. Внаслідок цього на множині планів задачі функція $Q(\vec{X})$ приймає або лише додатні, або лише від'ємні значення, оскільки вона лінійна, а отже неперервна. Відносячи знак мінус, в разі потреби, до знаменника, вважаємо цю функцію завжди додатною: $Q(\vec{X}) > 0$ при $\vec{X} \in \Omega$.

Для подальшого розгляду приведемо без доведення три важливих твердження.

Дробово-лінійна функція монотонно змінюється вздовж довільного прямолінійного відрізка $[\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}]$.

Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування досягає свого оптимуму в крайній точці множини планів задачі, тобто хоча б один з опорних планів буде розв'язком задачі.

Якщо оптимум дробово-лінійної цільової функції досягається в кількох крайніх точках многогранника планів за-

дачі, то кожна точка грані, що є лінійною комбінацією цих вершин, являється розв'язком задачі.

Розглянемо геометрію задачі дробово-лінійного програмування. Відмінність від задачі лінійного програмування полягатиме лише в інтерпретації гіперповерхонь рівня цільової функції при зміні її значень. Рівнянням гіперповерхні рівня $z = \text{const}$, очевидно, буде рівняння гіперплощини, яка проходить через початок координат

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n - z(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) = 0.$$

Змінюючи z від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо пучок гіперплощин. У випадку $n = 2$ центром симетрії пучка прямих буде початок координат, при $n = 3$ – віссю симетрії пучка – пряма, що проходить через початок координат, при $n > 3$ гіперплощини пучка симетричні відносно деякого точкового підпростору (гіперсиметрії) розмірності $n - 2$. При зростанні (зменшенні) параметра z гіперплощина рівня обертається відносно гіперосі симетрії в одну сторону. Положення гіперплощини рівня, при яких вона дотикається до множини планів (у вершині чи по грані), відповідає екстремальним значенням цільової функції на множині планів задачі.

Виходячи з описаної геометрії задач дробово-лінійного програмування, найпростіші з них ($n = 2$, $n = 3$) можна розв'язувати графічним способом. Розглянемо задачу дробово-лінійного програмування з двома змінними в загальному вигляді

$$z = (p_1x_1 + p_2x_2)/(q_1x_1 + q_2x_2) \rightarrow \max/\min$$

при обмеженнях:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Для розв'язування цієї задачі знайдемо область допустимих розв'язків, яка визначається системою обмежень. Нехай ця область не є пустою множиною (рис. 7.9).

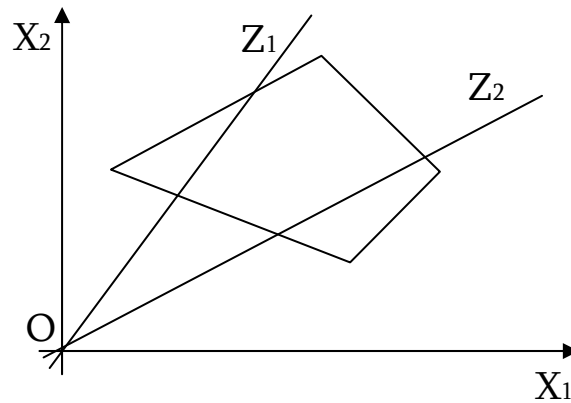


Рис. 7.9

З виразу для цільової функції знайдемо x_2 :

$$x_2 = kx_1,$$

де $k = (p_1 - zq_1)/(zq_2 - p_2)$.

Встановимо, як буде вести себе кутовий коефіцієнт k при монотонному зростанні z . Знайдемо похідну від k по z :

$$\frac{dk}{dz} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{(zq_2 - p_2)^2}.$$

Знаменник похідної завжди додатний, а чисельник від z не залежить. Отже, похідна має сталий знак і при збільшенні z кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або спадати, а пряма буде обертатись в один бік. Якщо кутовий коефіцієнт прямої має додатне значення, то пряма обертається проти годинникової стрілки, при від'ємному значенні k – за стрілкою годинника. Після встановлення напрямку обертання, знаходимо вершину або вершини многокутника, в яких цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, або встановлюємо необмеженість задачі.

При цьому можливі наступні випадки.

1. Область допустимих розв'язків обмежена, максимум і мінімум цільової функції досягаються в її кутових точках (рис. 7.10).

2. Область допустимих розв'язків необмежена, але існують кутові точки, в яких цільова функція приймає максимальне і мінімальне значення (рис. 7.11).
3. Область допустимих розв'язків необмежена, маємо один з екстремумів. Наприклад, мінімум досягається в одній з вершин області і є, так званий, асимптотичний максимум (рис. 7.12).
4. Область допустимих розв'язків необмежена. Максимум і мінімум є асимптотичними (рис. 7.13).

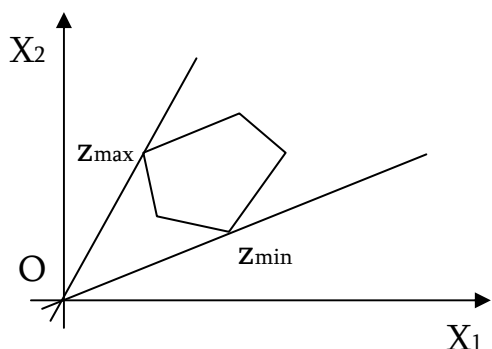


Рис. 7.10

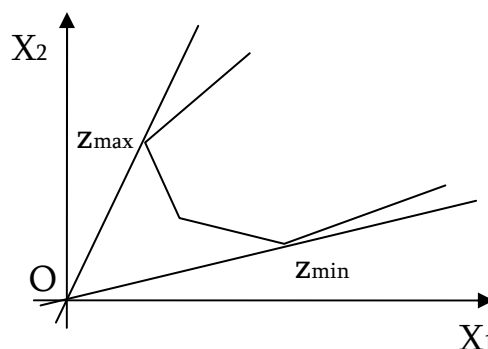


Рис. 7.11

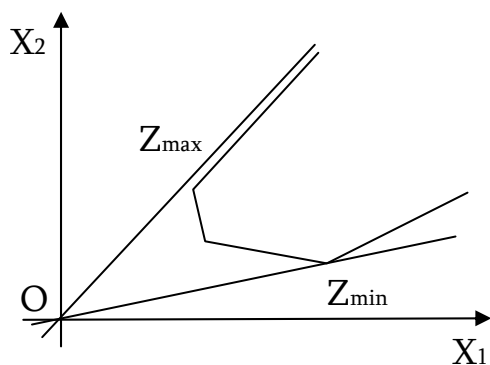


Рис. 7.12

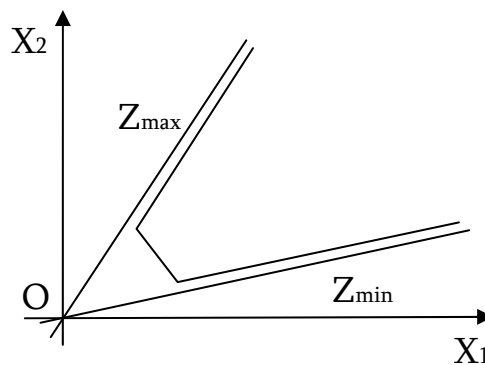


Рис. 7.13

Розглянемо використання графічного методу розв'язування задач дробово-лінійного програмування для знаходження собівартості продукції.

Приклад 7.12. Для виробництва двох видів продукції A і B підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен з виробів повинен пройти обробку на кожному з типів обладнання. Час

обробки кожного з виробів, витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, подані у таблиці:

Тип обладнання	Витрати часу на обробку одного виробу, год	
	<i>A</i>	<i>B</i>
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Витрати на виробництво одного виробу, у.г.о.	2	3

Обладнання I і III типів підприємство може використати не більше 26 год і 39 год відповідно, обладнання II типу доцільно використовувати не менше 4 год.

Визначити, скільки виробів кожного виду слід виготовити підприємству, щоб середня собівартість одного виробу була мінімальною.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Нехай x_1 – кількість виробу A, яку слід виготовити підприємству, x_2 – кількість виробу B. Загальні витрати на їх виробництво становлять $(2x_1 + 3x_2)$ у.г.о., а середня собівартість одного виробу буде рівною

$$(2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2).$$

Математична модель задачі матиме вигляд

$$z = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \rightarrow \min ,$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 26 ,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4 ,$$

$$12x_1 + 3x_2 \leq 39 ,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 .$$

Трикутник *ABC* – область допустимих розв'язків задачі (рис. 7.14).

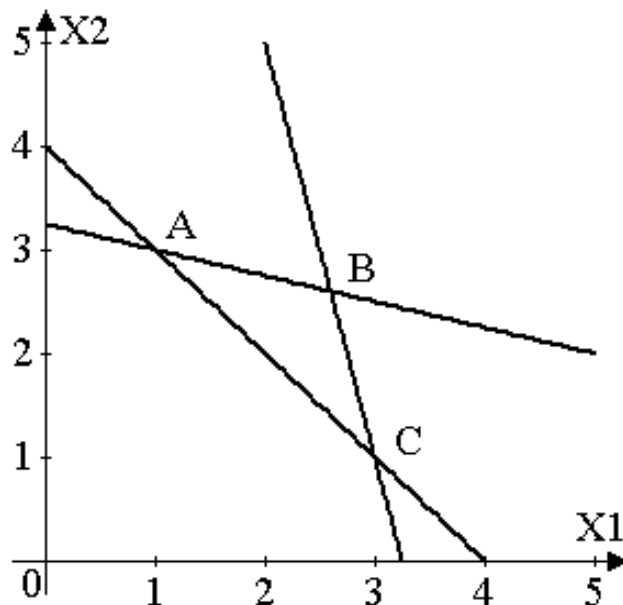


Рис. 7.14

Знайдемо x_2 :

$$x_2 = \frac{z-2}{3-z}x_1 = kx_1.$$

Кутовий коефіцієнт прямої рівний $k = (z-2)/(3-z)$, тоді

$$\frac{dk}{dz} = \frac{1}{(3-z)^2}.$$

Так як $dk/dz > 0$, то функція $k = (z-2)/(3-z)$ зростає. Це відповідає обертанню прямої проти годинникової стрілки. Отже, в точці C (рис. 7.14) цільова функція буде мати найменше значення (глобальний мінімум).

Знайдемо координати точки C . Розв'язуючи систему

$$12x_1 + 3x_2 = 39,$$

$$x_1 + x_2 = 4,$$

отримуємо: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, тобто $C(3;1)$.

$$\bar{X}_{opt} = (3;1), z = 9/4.$$

Отже, підприємству слід випускати 3 вироби A і 1 виріб B . При цьому середня собівартість одного виробу буде мінімальною і рівною 2,25 у.г.о.

Задачу дробово-лінійного програмування можна звести до задачі лінійного програмування і розв'язати симплексним методом.

Позначимо

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n q_j x_j}$$

при умові

$$\sum_{j=1}^n q_j x_j \neq 0$$

та введемо нові змінні $y_j = y_0 x_j$.

Тоді задача прийме вид

$$z = \sum_{j=1}^n p_j y_j \rightarrow \max/\min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n q_j y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0, y_0 > 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Після знаходження оптимального розв'язку отриманої задачі, використовуючи співвідношення між y_j і x_j , знаходять оптимальний розв'язок вихідної задачі дробово-лінійного програмування.

Приклад 7.13. Дана задача дробово-лінійного програмування

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Розв'язання. Позначимо: $x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0}$, $y_0 > 0$, тоді $z = 2x_1y_0 - x_2y_0$.

Позначимо: $x_1y_0 = y_1$, $x_2y_0 = y_2$, $x_3y_0 = y_3$, $x_4y_0 = y_4$.

Помножимо обидві частини всіх обмежень на y_0 та перейдемо до нових змінних y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 . Задача набуває вигляду

$$z = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max,$$

$$-2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0,$$

$$-6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0,$$

$$y_0 + y_1 + 2y_2 = 1,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y_0 > 0.$$

Отримали задачу лінійного програмування, розв'язуємо її симплексним методом (таблиця 7.3).

Таблиця 7.3

Номер ітерації	Номер рядка	Базис	ОП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
I	0	z	0	0	-2	1	0	0
	1	y_3	0	-2	1	-2	1	0
	2	y_4	0	-6	2	1	0	1
	3		1	$\boxed{1}$	1	2	0	0
II	0	z	0	0	-2	1	0	0
	1	y_3	2	0	$\boxed{3}$	2	1	0
	2	y_4	6	0	8	13	0	1
	3	y_0	1	1	1	2	0	0
III	0	z	4/3	0	0	7/3	2/3	0
	1	y_1	2/3	0	1	2/3	1/3	0
	2	y_4	2/3	0	0	2/3	-8/3	1
	3	y_0	1/3	1	0	4/3	-1/3	0

Отримуємо

$$\bar{Y}^* = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3),$$

тоді

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 2, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0, \quad x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0, \quad x_4 = \frac{y_4}{y_0} = 2, \quad z_{\max} = 4/3.$$

7.8. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

На практиці у більшості випадків ефективність прийнятого рішення оцінюється не за одним, а відразу за декількома критеріями. Такі задачі називаються багатокритеріальними.

Отже, в багатокритеріальній задачі оптимізації є декілька цільових функцій $z_1 = f_1(x)$, $z_2 = f_2(x)$, ..., $z_k = f_k(x)$, які досягають своїх оптимальних значень у різних точках допустимої множини X .

Критерії можуть бути суперечливими. Тобто рішення, яке краще за певною ознакою, може виявитись гіршим за іншою ознакою. Наприклад, мінімізація вартості та максимізація якості товару майже завжди суперечливі. У цьому випадку задача відшукування розв'язку, який оптимізує всі цільові функції, буде некоректною, тобто не буде мати жодного розв'язку.

У випадку суперечливих критеріїв теорія прийняття рішень пропонує наступні підходи до відшукування розв'язку, який буде найбільш сприйнятливим:

1) Заміна деяких критеріїв обмеженнями виду \leq або \geq . Наприклад, мінімізація вартості $f(x) \rightarrow \min$, може бути замінена обмеженням виду $f(x) \leq A$, де A – деяка верхня оцінка вартості, тобто максимально допустима вартість.

2) Згортка критеріїв. Створюється один глобальний скалярний критерій, цільова функція якого є деякою функцією від вихідних цільових функцій. Більш застосовуються лінійні згортки виду $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (у випадку двох критеріїв). Нетривіальною є задача відшукування адекватних значень коефіцієнтів α і β , які відображають відносну вагу цільових функцій $f(x)$ і $g(x)$.

3) Ранжирування критеріїв. Критерії ранжуються за ступенем важливості.

4) Відшукування розв'язків, які кращі хоча б за одним критерієм.

Підходи 1) і 2) приводять до однокритеріальної задачі. Третій підхід приводить до задачі з впорядкованими критеріями, в якій необхідно знайти оптимальний розв'язок для найменш важливого критерію на множині розв'язків, оптимальних для більш важливого критерію (рис. 7.15). Найбільшою є множина всіх допустимих розв'язків. В неї вкладена множина розв'язків, які оптимальні для найбільш важливого критерію.

Далі вкладена множина оптимальних розв'язків за другим по важливості критерієм, і т.д.

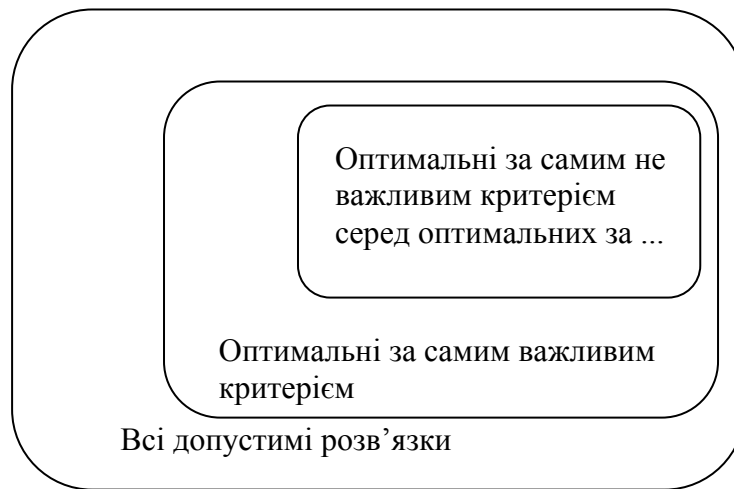


Рис. 7.15

Підхід 4) приводить до задачі з незалежними критеріями. У цій задачі необхідно знайти множину невідомуючих (ефективних) розв'язків, яка також називається *множиною за Парето*.

Отже, в багатокритеріальному програмуванні ставиться задача знаходження такого *компромісного (ефективного) розв'язку* моделі, яке тільки намагається врахувати всі цільові функції, але, як правило, не співпадає з їх оптимальними розв'язками.

Крім того, в багатокритеріальних задачах необхідно не тільки описати допустиму область X , задати цільові функції, але й вказати принцип оптимальності. Від вибору останнього залежить компромісний розв'язок. Таким чином, в розв'язанні такого роду задач суттєво зростає роль суб'єктивного фактору, тобто роль особи, яка приймає рішення.

Математична модель знаходження компромісного розв'язку багатокритеріальної задачі.

Розглянемо задачу оптимізації з двома цільовими функціями. Буде аналогічною математична модель у випадку знаходження компромісних розв'язків задач, які мають три цільові функції та більше.

Дана математична модель економічної задачі, в якій дві цільові функції і система обмежень лінійні. Знайдемо компромісний розв'язок за двома показниками, один з яких вимагає відшукання максимуму, а інший мінімуму:

$$z_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$z_2 = \sum_{j=1}^n d_j x_j \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де z_1, z_2 – цільові функції (економічні показники).

Розв'яжемо задачу за кожним показником окремо та знайдемо оптимальні значення цільових функцій $z_{1\max}, z_{2\min}$.

Введемо узагальнену цільову функцію, а вихідні цільові функції замінимо нерівностями та отримуємо математичну модель для знаходження компромісного розв'язку.

$$w = y \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + z_{1\max} y \geq z_{1\max},$$

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j - z_{2\min} y \leq z_{2\min},$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad y \geq 0,$$

де w – узагальнена цільова функція, y – відхиляюча змінна.

На практиці використовуються й інші критерії оптимальності. Відомо, що всі задачі математичного програмування можна розглядати як задачі максимізації або мінімізації. Тобто цільові функції багатокритеріальної задачі можна привести до вигляду, в якому вони всі, наприклад,

максимізуються. Розглянемо ще два способи відшукування компромісного розв'язку.

Складемо вираз

$$R(x) = \sum_{i=1}^m [z_{i\max} - z_i(x)]^2 \rightarrow \min.$$

Якщо вихідна багатокритеріальна задача була лінійною, то в даному випадку вона зводиться до розв'язання задачі квадратичного програмування.

У другому способі розв'язання зводиться до мінімізації функції

$$V(x) = \max_i \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j - z_{i\max} \right| \rightarrow \min.$$

Точка, яка мінімізує $V(x)$, є *чебишевською точкою* для системи лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j - z_{i\max} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Приклад 7.14. Фірма випускає два види виробів за ціною 2 гр. од. та 3 гр. од. відповідно. За результатами маркетингових досліджень попит на виріб другого виду не менш 1 тис. од. у рік. Для виробництва виробів використовуються матеріали А і Б, запаси яких на фірмі складають 18 та 15 т відповідно. Для виготовлення 1 тис. виробів норма витрат матеріалу А для виробів 1-го виду складає 3 т, а для виробів 2-го виду – 5 т. Для виготовлення 1 тис. виробів норма витрат матеріалу Б для виробів 1-го виду – 5 т, для виробів 2-го виду – 3 т. Собівартість виробів 1-го виду – 1 гр. од., а для 2-го виду – 2 гр. од.

Знайти оптимальний розв'язок для виробництва виробів обох видів, який максимізує прибуток та кількість виробів і мінімізує собівартість.

Розв'язання. Позначимо: x_1 – кількість виробів 1-го виду, тис. од.; x_2 – кількість виробів 2-го виду, тис. од.

Математична модель задачі має вигляд

$$z_1 = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$z_3 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 18,$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15,$$

$$x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу для кожній цільовій функції окремо. Отримуємо

$$\vec{X}_{1opt} = (1,31; 2,81), z_{1max} = 4,125;$$

$$\vec{X}_{2opt} = (1,31; 2,81), z_{2max} = 11,063;$$

$$\vec{X}_{3opt} = (0; 1), z_{3min} = 2,0.$$

Математична модель задачі знаходження компромісного розв'язку:

$$w = y \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$x_1 + x_2 + 4,125y \geq 4,125,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1,063y \geq 11,063,$$

$$x_1 + 2x_2 - 2y \leq 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 18,$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15,$$

$$x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0.$$

Розв'язком цієї задачі є вектор

$$\vec{X}_{eff} = (1,07; 1).$$

Таким чином, фірмі доцільно виготовляти 1,07 тис. виробів 1-го виду та 1 тис. виробів 2-го виду.

Розв'язати цю задачу за допомогою виразів

$$R(x) = \sum_{i=1}^m [z_{i\max} - z_i(x)]^2 \rightarrow \min \text{ і } V(x) = \max_i \left| \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j - z_{i\max} \right| \rightarrow \min$$

та порівняти з отриманим розв'язком пропонуємо читачеві самостійно.

Знаходження компромісного розв'язку багатокритеріальної задачі з незалежними критеріями на множині Парето.

Поняття оптимальності за Парето є одним із найважливіших в економічній теорії. Розглянемо багатокритеріальну задачу максимізації з m цільовими функціями z_1, z_2, \dots, z_m та допустимою множиною X .

Принцип домінування. Нехай x^1, x^2 – два допустимих розв'язки. Будемо казати, що x^1 домінує x^2 , якщо $z_i(x^1) \geq z_i(x^2)$ для всіх $i = 1, 2, \dots, m$, та знайдеться таке k ($1 \leq k \leq m$), що $z_k(x^1) > z_k(x^2)$.

Якщо x^1 домінує x^2 , то ні при якому розумному підході x^2 неможна признати найкращім розв'язком.

Розв'язок x^* називається таким, що не домінується, якщо не існує розв'язка x , який домінував би x^* .

Отже, найкращий розв'язок необхідно шукати серед таких, що не домінуються.

Множина розв'язків, що не домінуються, називається *множиною Парето* або *множиною оптимальності за Парето*.

У випадку багатокритеріальної задачі мінімізації знаки нерівностей \geq та $>$ в умовах треба замінити на \leq та $<$.

Отже, в багатокритеріальній задачі оптимізації з незалежними критеріями найкращий розв'язок необхідно шукати на множині Парето.

Приклад 7.15. Фірма, яка займається розробкою програмного забезпечення повинна виконати проекти 1 і 2. Для виконання кожного

проекту можна залучити від одного до трьох виконавців. Нехай x_1 і x_2 – кількість виконавців, які залучені для виконання проектів 1 і 2 відповідно. Час виконання проекту i дорівнює $t_i(x_i)$ місяців, а відповідна вартість – $c_i(x_i)$ сотні тис. грн. Необхідно мінімізувати загальний час виконання при мінімальній вартості. Значення функцій задані наступним чином:

x	1	2	3
$t_1(x)$	2	1	1
$t_2(x)$	3	1	1
$c_1(x)$	1	2	3
$c_2(x)$	4	4	5

Загальний час виконання проектів дорівнює $z_1(x) = t_1(x_1) + t_2(x_2)$, а вартість їх виконання $z_2(x) = c_1(x_1) + c_2(x_2)$.

Визначимо всі можливі значення пар (z_1, z_2) :

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3
1	(5, 5)	(3, 5)	(3, 6)
2	(4, 6)	(2, 6)	(2, 7)
3	(4, 7)	(2, 7)	(2, 8)

Отриманні пари позначені на рис. 7.16 відповідними точками.

Задача відшукування множини Парето у випадку двох критеріїв виду $z_1(x) \rightarrow \min$ та $z_2(x) \rightarrow \min$ може бути розв'язана графічно. Знаходимо всі точки з найменшим значенням $z_1(x)$. Якщо їх декілька, обираємо з них точку з найменшим значенням $z_2(x)$. Включаємо її в множину Парето. Відсікаємо точки з більшими або рівними значеннями $z_1(x)$ і $z_2(x)$ (північно-східний кут з вершиною в обраній точці). Повторюємо процедуру для допустимої області, що залишилась.

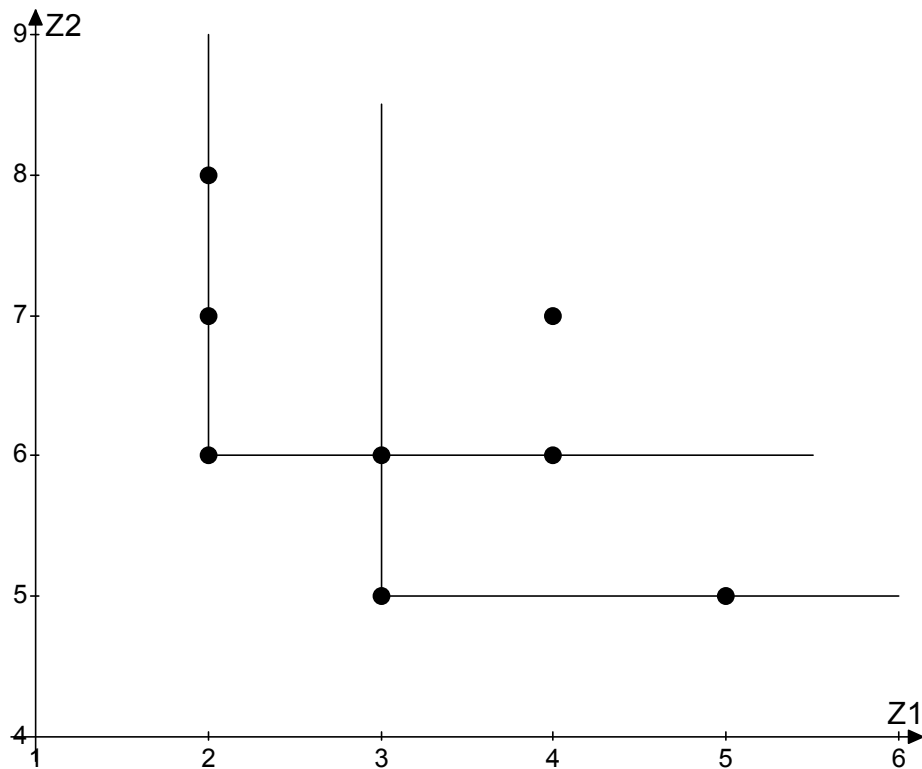


Рис. 7.16

З рис. 7.16 видно, що нас цікавлять пари $(z_1, z_2) \in \{(2, 6); (3, 5)\}$ та відповідні розв'язки $(x_1, x_2) \in \{(2, 2); (1, 2)\}$, які й утворюють множину Парето для даної задачі. Остаточне рішення вибору з двох можливих розв'язків залежить від особи, що приймає це рішення, а точніше залежить від того, який критерій час або вартість більш важливий.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За яких властивостей задачі пошуку оптимальних рішень належать до класу задач нелінійного програмування? Запишіть загальну задачу нелінійного програмування.
2. Яка різниця в поняттях локального, умовного та глобального екстремуму?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови локального екстремуму.
4. Метод множників Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)? Алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій.
6. Яка задача оптимізації відноситься до задач опуклого програмування?
7. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.
8. Зміст теореми Куна-Таккера.
9. Властивості градієнта функції та їх використання при пошуку оптимального розв'язку. Метод найшвидшого спуску.
10. Як формулюється задача квадратичного програмування? Методи її розв'язування.
11. Яка функція називається сепарабельною?
12. Метод розв'язування задач сепарабельного програмування.
13. Сформулюйте задачу дробово-лінійного програмування. Наведіть приклади задач економічного змісту, що відносяться до класу дробово-лінійних.
14. Метод розв'язування задач дробово-лінійного програмування.
15. Які ви знаєте підходи до розв'язання багатокритеріальних задач?
16. Поняття оптимальності за Парето.

ВПРАВИ

Використовуючи графічний метод, знайти глобальні екстремуми функцій.

7.1. $z = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 25,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.2. $z = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$x_1 x_2 \leq 8,$$

$$x_1 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.3. $z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.4. $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$ при обмеженнях:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 7,$$

$$10x_1 - x_2 \leq 8,$$

$$-18x_1 + 4x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.5. $z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 18,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.6. $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 36,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.7. $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ при обмеженнях:

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1) \leq 4,$$

$$x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.8. $z = x_1^2 + x_2^2$ при обмеженнях:

$$x_1 x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$x_1 \leq 7,$$

$$x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Методом множників Лагранжа розв'язати наступні задачі.

7.9. $z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 8 \rightarrow opt$ при обмеженні:

$$2x_1 + x_2 = 3.$$

7.10. $z = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 \rightarrow opt$ при обмеженні:

$$2x_1 + 2x_2 = 3.$$

7.11. $z = x_1 x_2 \rightarrow opt$ при обмеженні:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

7.12. $z = x_1 + 4x_2 + 3 \rightarrow opt$ при обмеженні:

$$x_1 x_2 = 3.$$

7.13. $z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0,$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 - 9 = 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

7.14. $z = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 \rightarrow \min$ при обмеженнях:

$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0.$$

7.15. $z = 2x_1x_3 - x_2x_3 \rightarrow opt$ при обмеженнях:

$$x_2 + 2x_3 = 3,$$

$$x_1 + x_2 = 2.$$

7.16. $z = x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow opt$ при обмеженнях:

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_2 + x_3 = 2.$$

7.17. $z = x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow opt$ при обмеженнях:

$$x_1 - x_2 = 2,$$

$$x_2 + x_3 = 4.$$

7.18. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow opt$ при обмеженні:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

7.19. Фірма реалізує автомобілі двома шляхами: через роздрібну і оптову торгівлю. При реалізації x_1 автомобілів у роздріб витрати на реалізацію становлять $4x_1 + x_1^2$ грн., а при продажі x_2 автомобілів оптом – x_2^2 грн. Знайти оптимальний план реалізації автомобілів, який мінімізує сумарні витрати, якщо загальна кількість автомобілів на продаж складає 200 шт.

Для кожної з задач 7.20 – 7.23 виконайте не більше п'яти ітерацій методу найшвидшого спуску. У всіх випадках покладіть $\vec{X}^0 = \vec{0}$.

7.20. $z = 3 - x^2 - x^4 \rightarrow \max$.

7.21. $z = x_1 - x_2 + x_1^2 - x_1x_2 \rightarrow \min$.

7.22. $z = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$.

7.23. $f(\vec{X}) = \vec{c}\vec{X} + \vec{X}^* A \vec{X} \rightarrow \max$,

де $\vec{c} = (1, 3, 5)$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1/2 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

У задачах 7.24 – 7.35 покажіть, що z – строго опукла, і знайдіть розв'язок методом квадратичного програмування.

7.24. $z = -3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

7.25. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \max,$

$$x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.26. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 - 4x_2 + 8 \rightarrow \max,$

$$2x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7.27. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 - 4x_2 + 3 \rightarrow \max,$

$$0 \leq x_1 \leq 3,$$

$$0 \leq x_2 \leq 6.$$

7.28. $-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 4 \rightarrow \max,$

$$x_1 - x_2 \geq 6,$$

$$0 \leq x_1 \leq 10,$$

$$x_2 \geq 0.$$

7.29. $-2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2 + 2x_1 + 1 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$0 \leq x_1 \leq 4,$$

$$x_2 \geq 0.$$

$$7.30. -4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$0 \leq x_2 \leq 6,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$7.31. -x_1^2 - 1/2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12,$$

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$7.32. -1/2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$0 \leq x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$7.33. -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$7.34. z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$2x_2 + 3x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$7.35. 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7.36. Для наступної задачі побудуйте апроксимуючу модель у вигляді задачі частково-цілочислового програмування.

$$z = \exp(-x_1) + x_1 + (x_2 + 1)^2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжіть апроксимуючу задачу, використовуючи правило обмеженого вводу у базис. Потім знайдіть оптимальний розв'язок вихідної задачі.

7.37. Розгляньте наступну задачу.

$$z = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Побудуйте апроксимуючу задачу у вигляді задачі лінійного програмування з урахуванням подальшого використання правила обмеженого вводу у базис.

7.38. Покажіть, яким чином наведена нижче задача може бути приведена до сепарабельного виду.

$$z = x_1 x_2 + x_3 + x_1 x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1 x_2 + x_2 + x_1 x_3 \leq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7.39. Покажіть, яким чином наступну задачу можна перетворити в задачу сепарабельного програмування.

$$z = \exp(2x_1 + x_2^2) + (x_3 - 2)^2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7.40. Покажіть, як наступну задачу можна перетворити в задачу сепарабельного програмування.

$$z = \exp(x_1 x_2) + x_2^2 x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 x_3 + x_3 \leq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

x_4 без обмеження за знаком.

7.41. Розв'яжіть представлену нижче задачу як задачу опуклого сепарабельного програмування.

$$z = x_1^4 + 2x_2 + x_3^2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 4,$$

$$|x_1 + x_2| \leq 0,$$

$$x_1, x_3 \geq 0,$$

x_2 без обмеження за знаком.

7.42. Розв'яжіть як задачу опуклого сепарабельного програмування наступну задачу.

$$z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

В задачах 7.43 – 7.45 знайти глобальні максимум і мінімум дробово-лінійних функцій.

7.43. $z = (2x_1 - x_2)/(x_1 + x_2)$

при обмеженнях

$$2x_1 - 3x_2 \geq -13,$$

$$x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$4x_1 - x_2 \leq 19,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$7.44. z = (3x_1 - x_2)/(x_1 + x_2)$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 7,$$

$$3x_1 - x_2 \leq 11,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$7.45. z = (3x_1 + 7x_2)/(x_1 + x_2)$$

при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

В задачах 7.46 – 7.47 скласти математичну модель знаходження компромісного розв'язку та знайти його.

$$7.46. z_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, z_2 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24,$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 18,$$

$$x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

$$7.47. z_1 = x_1 - x_2 \rightarrow \max, z_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, z_3 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$3x_1 + 5x_2 \leq 18,$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$5x_1 - 3x_2 \leq 15,$$

$$x_2 \geq 1,$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

7.48. Для випуску двох видів продукції використовується три види ресурсів. Відома матриця норм витрат A , вартості C ресурсів, ціни реалізації P продукції та запаси B ресурсів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 2 \quad 3), P = (14 \quad 10), B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Якщо планується випуск $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то вартість необхідних ресурсів $CA X$, дохід $P X$ та прибуток $(P - CA) X$. Бажано досягти максимальних доходу та прибутку. Знайти множину Парето задачі.

РОЗДІЛ 8

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У попередніх розділах розглянуто методи розв'язування задач математичного програмування, реалізація яких приводила до знаходження всіх компонент оптимального плану одночасно на останньому кроці алгоритму. Знайдений оптимальний план вважався дійсним для всього розглядуваного періоду функціонування реальної системи. Отже, рішення про оптимізацію роботи системи за допомогою вибору значень її керованих параметрів приймається один раз. У цьому випадку говорять про однокроковий (одноетапний) процес прийняття рішення. Природно, таке рішення не може враховувати можливі зміни оптимального плану в часі протягом розглядуваного періоду.

Крім того, розглянуті методи часто не придатні для розв'язування багатьох важливих нелінійних задач великої розмірності. У загальному випадку можна сподіватися на відшукування деякого локального екстремуму функції мети.

Динамічне програмування – особливий метод оптимізації рішень, спеціально пристосований до так званих „багатокрокових” (або „багатоетапних”) операцій.

Економічний процес є керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Під управлінням розуміється сукупність рішень, які приймаються на кожному етапі з метою впливу на хід розвитку процесу. Наприклад, випуск продукції підприємства – керований процес. Сукупність рішень, які приймаються на початку року (кварталу, місяця) по забезпеченню підприємства сировиною, заміні обладнання, фінансуванню і т. д., є управлінням. Необхідно організувати випуск продукції так, щоб прийняті рішення на окремих етапах сприяли одержанню максимально можливого об'єму продукції або прибутку.

Моделі лінійного та нелінійного програмування використовуються при дослідженні широкомасштабних проблем макроекономіки. У мікроекономіці вони ефективні, якщо розглядаються короткотермінові процеси, які можна вважати стабільними на досліджуваних проміжках. Моделі динамічного програмування використовуються переважно в дослідженні задач мікроекономіки і, на відміну від моделей лінійного і нелінійного програмування, дають можливість враховувати перебіг процесу в часі, оцінюючи його стан і моделювати поетапне управління процесом.

Динамічне програмування дає досить ефективний метод послідовного прийняття рішень про оптимізацію роботи системи за допомогою розв'язування між собою однокрокових задач. Тоді говорять про багатокроковий процес прийняття рішення чи розв'язування задачі. Це дає можливість у ряді випадків оптимізувати динамічні системи, для яких час відіграє істотну роль. Проте з формально-математичної точки зору методи динамічного програмування не обов'язково пов'язані з реально-динамічними задачами, а є перш за все специфічним способом розв'язування.

На відміну від лінійного програмування, в якому симплексний метод є універсальним методом розв'язування, в динамічному програмуванні такого універсального методу не існує. Одним з основних методів динамічного програмування є метод рекурентних співвідношень, який ґрунтується на використанні *принципу оптимальності*, який розроблений американським математиком Р. Беллманом. Очевидно, повне розуміння цього принципу стає можливим (для осіб зі звичайним математичним розвитком) тільки після розгляду ряду прикладів, тому цей основний принци наводиться не на початку розділу, а у параграфі 8.3. Для застосування методу динамічного програмування до конкретної задачі остання повинна мати відповідну структуру. Особливістю усіх таких задач є те, що на кожному етапі можна керувати перебігом досліджуваного процесу та оцінювати ефективність такого управління. Крім того, реалі-

зація цих методів зв'язана з значною кількістю обчислень, яка різко зростає і стає непереборною із збільшенням числа обмежень задачі.

Таким чином динамічне програмування визначає оптимальний розв'язок задачі шляхом її декомпозиції на етапи, кожен з яких являє собою однокрокову підзадачу.

Розглянемо деяку операцію G , яка розпадається на m кроків (етапів), – наприклад, діяльність галузі промисловості протягом ряду господарських років. Деякі операції розпадаються на етапи природним шляхом, як вищенаведена; в інших ситуаціях поділ на етапи може мати умовний характер. Нехай ефективність операції G характеризується показником Z (цільова функція). Припустимо, що показник ефективності всієї операції складається з показників ефективностей окремих кроків:

$$Z = \sum_{i=1}^m z_i,$$

де z_i – показник ефективності i -го кроку.

Якщо Z має таку властивість, то її називають *адитивною цільовою функцією*.

Операція G являє собою керований процес, тобто ми можемо обирати деякі параметри, які впливають на його хід, причому на кожному кроці обирається якесь рішення, від якого залежить ефективність на даному кроці і ефективність операції в цілому. Будемо називати це рішення *кроковим управлінням*. Сукупність усіх крокових управлінь являє собою управління операції в цілому. Позначимо його літерою x , крокові управління – літерами x_1, x_2, \dots, x_m :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Слід мати на увазі, що x_1, x_2, \dots, x_m в загальному випадку – не числа, а, може бути, вектори, функції і т. д.

Необхідно знайти таке управління x , при якому Z обертається у максимум:

$$Z = \sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \max.$$

Те управління x^* , при якому цей максимум досягається, називається *оптимальним управлінням*. Воно складається із сукупності оптимальних крокових управлінь:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*).$$

Максимум, який досягається при цьому управлінні, будемо позначати Z^* :

$$Z^* = \max\{Z(x)\}.$$

Розглянемо декілька прикладів багатокрокових операцій.

1. Планується діяльність групи промислових підприємств $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ на період m господарських років. На початку періоду виділені деякі кошти M , які повинні бути розподілені між підприємствами. В процесі роботи підприємства вкладені у нього кошти частково витрачаються (амортизуються), а частково зберігаються і знову можуть бути перерозподілені. Кожне підприємство за рік приносить прибуток, який залежить від того, скільки коштів в нього вкладено. На початку кожного господарського року кошти, які є в наявності, перерозподіляються між підприємствами. Ставиться питання: яку кількість коштів на початку кожного року виділяти необхідно кожному підприємству, щоб сумарний прибуток за m років був максимальний?

Цільова функція Z (сумарний прибуток) являє собою суму прибутків на окремих кроках (роках):

$$Z = \sum_{i=1}^m z_i,$$

і, отже, має властивість адитивності.

Управління x_i на i -му кроці складається з того, що на початку кожного року виділяються деякі кошти $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ (перший індекс – номер кроку, другий – номер підприємства). Таким чином, крокове управління є вектор з k складовими:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}).$$

Зрозуміло, що величини z_i залежать від кількості вкладених у підприємство коштів.

Управління x всією операцією складається з сукупності усіх крокових управлінь:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Треба знайти такий розподіл коштів за підприємствами і за роками (оптимальне управління x^*), при якому величина Z набуває максимуму.

У цьому прикладі крокові управління були векторами.

2. Космічна ракета складається з m ступіней, а процес виводу її на орбіту – з m етапів, в кінці кожного з яких чергова ступінь скидається. На всі ступіні (без урахування „корисної ваги” кабіни) виділена деяка загальна вага:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_m,$$

де P_i – вага i -ї ступіні.

В результаті i -го етапу (згоряння і скидання i -ї ступіні) ракета отримує приріст швидкості Δv_i , який залежить від ваги даної ступіні і сумарної ваги усіх інших плюс вага кабіни. Запитується, як треба розподілити вагу P між ступінями, щоб швидкість ракети v при її виводі на орбіту була максимальною?

В даному випадку показник ефективності буде

$$v = \sum_{i=1}^m \Delta v_i,$$

де Δv_i – показник ефективності (приріст швидкості) i -го кроку.

Управління x являє собою сукупність ваг усіх ступіней P_i :

$$x = (P_1, P_2, \dots, P_m).$$

Оптимальним управлінням x^* буде той розподіл ваг за ступінями, при якому швидкість v максимальна. В цьому прикладі крокове управління – одне число, а саме, вага даної ступіні.

3. Власник автомобіля експлуатує її протягом m років. На початку кожного року він може прийняти одне з трьох рішень:

- 1) продати автомобіль і купити новий;
- 2) відремонтувати його та продовжувати експлуатацію;
- 3) продовжити експлуатацію без ремонту.

Крокове управління – вибір одного з цих трьох рішень. Безпосередньо числами вони не виражаються, але можна приписати першому числу значення 1, другому 2, третьому 3. Які необхідно прийняти рішення за роками (тобто як чергувати управління 1, 2, 3), щоб сумарні витрати на експлуатацію, ремонт і придбання нових автомобілів були мінімальні?

Показник ефективності (в даному випадку він повинен бути не максимальним, а мінімальним) дорівнює

$$Z = \sum_{i=1}^m z_i,$$

де z_i – витрати у i -му році. Величину Z треба звести до мінімуму.

Управління операцією в цілому являє собою деяку комбінацію чисел 1, 2, 3, наприклад:

$$x = (3, 3, 2, 2, 2, 1, 3, \dots),$$

що означає: перші два роки експлуатувати автомобіль без ремонту, наступні три роки його ремонтувати, на початку шостого року продати, купити новий, потім знову експлуатувати без ремонту і т. д. Будь-яке управління являє собою вектор (сукупність чисел):

$$x = (l_1, l_2, \dots, l_m),$$

де кожне з чисел l_i ($i = 1, 2, \dots, m$) має одне з трьох значень: 1, 2 або 3. Треба таку сукупність чисел, при якій цільова функція мінімальна.

4. Треба прокласти залізничний шлях між пунктами A і B . Місцевість пересічна, є лісові зони, пагорби, болота, річка, через яку треба побудувати міст. Необхідно так провести дорогу з A в B , щоб сумарні витрати на споруду ділянки були мінімальні.

В цієї задачі, на відміну від трьох попередніх, немає природного поділу на кроки: його треба робити штучно, для чого, наприклад, можна відрізок AB розділити на m ділянок, провести через точки поділу прямі, перпендикулярні AB , і вважати за крок перехід з однієї такої прямої до іншої. Якщо провести їх достатньо близько одна від іншої, то можна вважати на кожному кроці ділянку шляху прямолінійним. Крокове управління на i -му кроці являє собою кут φ_i , який складає ділянка шляху з прямою AB . Управління всією операцією складається з сукупності крокових управлінь:

$$x = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m).$$

Треба обрати таке (оптимальне) управління x^* , при якому сумарні витрати на споруду всіх ділянок мінімальні.

Розглянемо питання: як можна розв'язувати задачі подібні тим, що наведені у прикладах?

Будь-яку багатокрокову задачу можна розв'язувати двома способами: або шукати відразу всі елементи розв'язку на всіх m кроках, або ж будувати оптимальне управління крок за кроком, на кожному етапі розрахунку оптимізуючи тільки один крок. Звичайно другий спосіб оптимізації виявляється простішим, ніж перший, особливо при великій кількості кроків.

Така ідея рекурентної (поступової, покрокової) оптимізації і лежить в основі методу динамічного програмування. Оптимізація одного кроку, як правило, простіше оптимізації всього процесу: краще, виявляється, багато разів розв'язувати порівняно просту задачу, ніж один раз – складну.

Принцип динамічного програмування зовсім не передбачає, що кожен крок оптимізується окремо, незалежно від інших. Навпаки, крокове управління повинно обиратися далекоглядно, з урахуванням всіх його наслідків в майбутньому. Який сенс, що ми оберемо на даному етапі управління, при якому ефективність цього кроку максимальна, якщо цей

крок позбавить нас можливості отримати значну перевагу на наступних кроках?

Нехай, наприклад, планується робота групи підприємств, з яких частина зайнята випуском предметів споживання, а решта виготовляє для них устаткування. Задача операції – отримати за t років максимальний об'єм випуску предметів споживання. Припустимо, плануються капіталовкладення на перший рік. Виходячи з вузьких інтересів цього кроку (року), ми повинні були б всі наявні кошти вкласти у виробництво предметів споживання. Але чи правильним буде таке рішення з точки зору ефективності операції в цілому? Очевидно, ні. Це рішення – марнотратне, недалекоглядне. З погляду на майбутнє, треба виділити якусь частку коштів і на виробництво устаткувань. Від цього об'єм продукції за перший рік, звичайно, знизиться, проте будуть створені умови для його збільшення в наступні роки.

Ще один приклад. Припустимо, що в задачі 4 (прокладення залізничного шляху між A і B) ми захопимось ідеєю відразу ж прямувати по найбільш легкому (дешевому) напрямку. Яка користь від економії на першому кроці, якщо в подальшому він заведе нас (буквально чи фігурально) у „болото”?

Обчислення в динамічному програмуванні виконуються рекурентно в тому розумінні, що оптимальний розв'язок підзадачі на одному етапі використовується в якості вихідних даних для підзадачі наступного етапу. Розв'язавши підзадачу на останньому етапі, ми отримуємо оптимальний розв'язок вихідної задачі. Спосіб виконання рекурентних обчислень залежить від того, як виконується декомпозиція вихідної задачі. Зокрема, підзадачі на кожному етапі зв'язані між собою деякими загальними обмеженнями. Якщо здійснюється перехід від однієї підзадачі до іншої, то повинні враховуватись ці обмеження.

Розглянемо, як приклад, задачу про найкоротший шлях.

Приклад 8.1. Припустимо, що треба вибрати короткий шлях між двома містами. Сітка доріг, що показана на рис. 8.1, являє собою можливі маршрути між вихідним містом, яке знаходиться у вузлі 1, і кінцевим пунктом, який знаходиться у вузлі 7. Маршрути проходять через проміжні міста, позначені на сітці вузлами з номерами 2-6.

Розв'язання. Ми можемо розв'язати цю задачу простим повним перебором усіх маршрутів між вузлами 1 і 7 (є п'ять таких маршрутів). Однак у великій сітці повний перебір буде неефективним з обчислювальної точки зору.

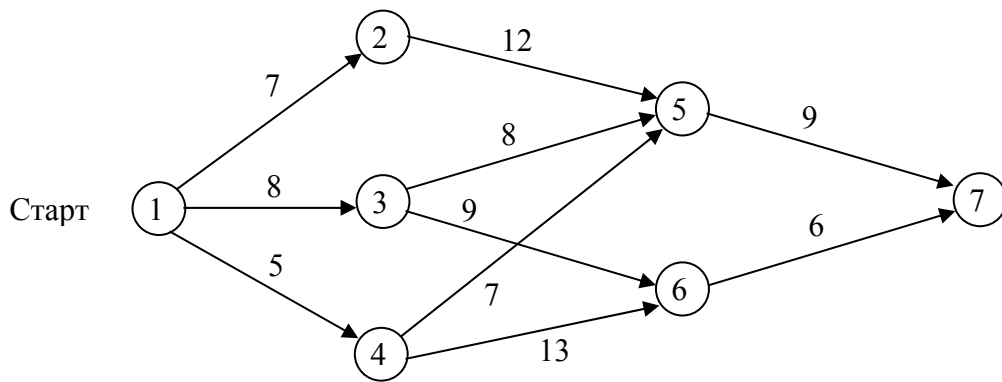


Рис. 8.1

Щоб розв'язати цю задачу методом динамічного програмування спочатку розділимо її на етапи. Вертикальні пунктирні лінії на рис. 8.2 відокремлюють три етапи задачі. Далі виконуються обчислення для кожного етапу окремо.

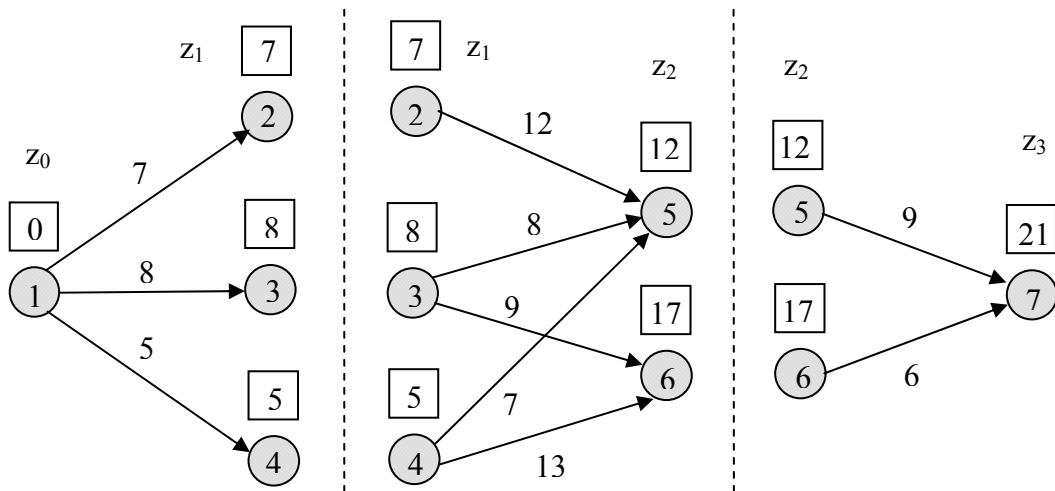


Рис. 8.2

Загальна задача полягає в обчисленні коротших (поступово накопичуються) відстаней до всіх вершин етапу з послідовним використанням цих відстаней в якості вихідних даних для наступного етапу. Розглядаючи вузли, які відносяться до першого етапу, відмічаємо, що кожен з вузлів 2, 3 і 4 зв'язаний з початковим вузлом 1 єдиною дугою (рис. 8.2). Отже, для першого етапу маємо наступне.

Етап 1. Підсумкові результати.

Коротший шлях до вузла 2 дорівнює 7 км (з вузла 1),

Коротший шлях до вузла 3 дорівнює 8 км (з вузла 1),

Коротший шлях до вузла 4 дорівнює 5 км (з вузла 1).

Далі переходимо до другого етапу для обчислення коротших (накопичених) відстаней до вузлів 5 і 6. Розглянемо вузол 5 першим, з рис. 8.2 помічаємо, що є три можливі маршрути, за якими можна досягти вузла 5, а саме (2, 5), (3, 5) і (4, 5). Ця інформація разом з коротшими відстанями до вузлів 2, 3 і 4 визначає коротшу (накопичену) відстань до вузла 5 наступним чином.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Коротший} \\ \text{шлях до вузла 5} \end{array} \right) = \min \left\{ \begin{array}{l} 7 + 12 = 19 \\ 8 + 8 = 16 \\ 5 + 7 = 12 \end{array} \right\} = 12 \text{ (з вузла 4)}.$$

Аналогічно для вузла 6 маємо наступне.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Коротший} \\ \text{шлях до вузла 6} \end{array} \right) = \min \left\{ \begin{array}{l} 8 + 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \end{array} \right\} = 17 \text{ (з вузла 3)}.$$

Етап 2. Підсумкові результати.

Коротший шлях до вузла 5 дорівнює 12 км (з вузла 4),

Коротший шлях до вузла 6 дорівнює 17 км (з вузла 3).

Останнім кроком є третій етап. Кінцевого вузла 7 можна досягти як з вузла 5, так і 6. Використовуючи підсумкові результати етапу 2 і відстані від вузлів 5 та 6 до вузла 7, отримуємо наступне.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Коротший} \\ \text{шлях до вузла 7} \end{array} \right) = \min \left\{ \begin{array}{l} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \end{array} \right\} = 21 \text{ (з вузла 5)}.$$

Етап 3. Підсумкові результати.

Коротший шлях до вузла 7 дорівнює 21 км (з вузла 5).

Наведені обчислення показують, що коротша відстань між вузлами 1 і 7 дорівнює 21 км, а оптимальним маршрутом є послідовність 1-4-5-7.

Тепер покажемо, як рекурентні обчислення динамічного програмування можна виразити математично. Нехай $f_i(x_i)$ – коротша відстань до вершини x_i на етапі i , $d(x_{i-1}, x_i)$ – відстань від вузла x_{i-1} до вузла x_i . Тоді f_i обчислюється з f_{i-1} за допомогою наступного рекурентного рівняння.

$$f_i(x_i) = \min\{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, \quad i = 1, 2, 3$$
 (мінімум шукається серед всіх можливих маршрутів (x_{i-1}, x_i)).

При $i = 1$ приймаємо $f_0(x_0) \equiv 0$. Рекурентне рівняння показує, що коротша відстань $f_i(x_i)$ на етапі i повинні бути виражені як функції наступного вузла x_i .

Отже, *плануючи багатокрокову операцію, треба обирати управління на кожному кроці з урахуванням усіх його майбутніх наслідків на кроках, які ще будуть здійснені.* Управління на i -му кроці обирається не так, щоб ефективність саме на даному кроці була максимальною, а так, щоб була максимальна сума ефективностей на всіх кроках, які залишилися, плюс даний.

Проте з цього правила є виключення. Серед усіх кроків є один, який може плануватись без розрахунків на майбутнє. Який це крок? Очевидно, останній! Цей крок, єдиний з усіх, можна планувати так, щоб він сам по собі приніс найбільшу ефективність.

Тому процес динамічного програмування звичайно розгортається від кінця до початку: перш за все планується останній, m -й крок. Така послідовність обчислень відома як *алгоритм зворотної прогонки*. Послідовність обчислень від першого етапу до останнього називається *алгоритмом прямої прогонки*.

Алгоритми прямої і зворотної прогонки приводять до одного й того ж розв'язку. Не дивлячись на те, що алгоритм прямої прогонки представляється більш логічним, в спеціальній літературі, присвяченій динамічному програмуванню, незмінно використовується алгоритм зворотної прогонки. Причина цього в тому, що в загальному випадку алгоритм зворотної прогонки може бути більш ефективним з обчислювальної точки зору.

Приклад 8.2. Продемонструємо використання алгоритму зворотної прогонки на прикладі 8.1.

Розв'язання. Ми також представимо обчислення динамічного програмування в компактній табличній формі.

Рекурентне рівняння для алгоритму зворотної прогонки у прикладі 8.1 має вигляд

$$f_i(x_i) = \min\{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \quad i = 3, 2, 1,$$

де $f_4(x_4) \equiv 0$ для $x_4 = 7$. Відповідною послідовністю обчислень буде $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

Етап 3. Так як вузол 7 ($x_4 = 7$) зв'язаний з вузлами 5 та 6 ($x_3 = 5; 6$) тільки одним маршрутом, то альтернатива вибору відсутня, а результати третього етапу можна підбити наступним чином (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

x_3	$d(x_3, x_4)$	Оптимальний розв'язок	
	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

Етап 2. Так як маршруту (2,6) не існує, відповідна альтернатива не розглядається. Використовуючи значення $f_3(x_3)$, яке отримане на третьому етапі, ми можемо порівняти допустимі альтернативні розв'язки, показані у таблиці 8.2.

Таблиця 8.2

x_2	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12+9=21	–	21	5
3	8+9=17	9+6=15	15	6
4	7+9=16	13+6=19	16	5

Оптимальний розв'язок другого етапу означає наступне. Якщо ви знаходитесь у вузлі (місті) 2 або 4, короткий шлях до вузла 7 проходить через вузол 5, а якщо знаходитесь у вузлі 3, короткий шлях до вузла 7 проходить через вузол 6.

Етап 1. З вузла 1 ми маємо три альтернативних маршрути: (1, 2), (1, 3) та (1, 4). Використовуючи значення $f_2(x_2)$, одержані на другому етапі, обчислюємо дані таблиці 8.3.

Таблиця 8.3

x_1	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	7+21=28	8+15=23	5+16=21	21	4

Оптимальний розв'язок на першому етапі показує, що короткий шлях проходить через вузол 4. Далі з оптимального розв'язку на другому етапі випливає, що з вузла 4 необхідно рухатись у вузол 5. Нарешті, з оптимального розв'язку на третьому етапі випливає, що вузол 5 зв'язаний з вузлом 7. Отже, повним маршрутом, який має коротшу довжину, є 1–4–5–7, і його довжина дорівнює 21 км.

Очевидно, що дійсне розуміння методу динамічного програмування з'являється при розгляді конкретних прикладів, які будуть розглянуті у наступному параграфі.

8.2. ДЕЯКІ ЕКОНОМІЧНІ ЗАДАЧІ, ЯКІ РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ МЕТОДАМИ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розгляді кожного прикладу зверніть увагу на три основні елементи моделей динамічного програмування.

1. Визначення *етапів*.
2. Визначення на кожному етапі *варіантів розв'язку* (альтернатив).
3. Визначення *стану* на кожному етапі.

Задача про заміну обладнання.

Однією з важливих економічних проблем є визначення оптимальної стратегії в заміні старих станків, агрегатів, машин (в подальшому обладнання) на нові.

Старіння обладнання включає його фізичне і моральне зношування, в наслідок чого зростають виробничі витрати при випуску продукції на старому обладнанні, збільшуються витрати на його ремонт та обслуговування, знижується продуктивність і ліквідна вартість.

Настає час, коли старе обладнання вигідніше продати, замінити новим, ніж експлуатувати ціною великих витрат. Причому його можна замінити новим обладнанням того ж виду або новим, більш досконалим.

Оптимальна стратегія заміни обладнання полягає у визначені оптимальних термінів експлуатації до заміни. Критерієм оптимальності при цьому може бути прибуток від експлуатації обладнання, який треба максимізувати, або сумарні витрати на експлуатацію протягом певного проміжку часу, які підлягають мінімізації.

Припустимо, що ми займаємось заміною обладнання протягом n років. На початку кожного року приймається рішення або про експлуатацію обладнання ще один рік, або про заміну його новим.

Введемо позначення: $r(t)$ – вартість продукції, яка виробляється за один рік на одиниці обладнання віком t років (або прибуток від експлуатації протягом одного року);

$u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком t років;

$s(t)$ – залишкова вартість обладнання віком t років;

P – вартість придбання нового обладнання.

Елементи моделі динамічного програмування такі:

1. *Етап i зображається порядковим номером року i , $i = 1, 2, \dots, n$.*
2. *Варіантами розв'язку на i -му етапі (тобто для i -го року) є альтернативи: продовжити експлуатацію або замінити обладнання на початку i -го року.*
3. *Станом на i -му етапі є термін експлуатації t (рік) обладнання на початок i -го року.*

Позначимо через $f_i(t)$ максимальний прибуток, який отримується за роки від i до n при умові, що на початку i -го року маємо обладнання віком t років.

Рекурентне рівняння має наступний вигляд:

$$f_i(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_{i+1}(t+1), \text{ якщо експлуатувати обладнання} \\ r(0) - u(0) + s(t) - P + f_{i+1}(1), \text{ якщо замінити обладнання} \end{array} \right\}$$

В рівнянні функція $r(t) - u(t)$ є різниця між вартістю виробленої продукції і експлуатаційними витратами на i -му етапі.

Функція $f_{i+1}(t+1)$ характеризує сумарний прибуток від етапів, що залишаються (тобто від $(i+1)$ -го до n -го), для обладнання віком $(t+1)$ рік.

Нижній рядок характеризується наступним чином: функція $s(t) - P$ являє чисті витрати по заміні обладнання, вік якого t років.

Припускається, що перехід від роботи на обладнанні віком t років до роботи на новому обладнанні відбувається миттєво, тобто період заміни старого обладнання і перехід на роботу на новому обладнанні входять в один і той же етап.

Слід відмітити, що $f_{n+1}(\dots) \equiv 0$ за означенням функції $f_i(t)$, тобто для $i = n$ маємо наступні рекурентні рівняння:

$$f_n(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + s(t+1), \text{ якщо експлуатувати обладнання} \\ r(0) - u(0) + s(t) - P + s(1), \text{ якщо замінити обладнання} \end{array} \right\},$$

в якому функції $f_{n+1}(t+1)$ і $f_{n+1}(1)$ замінені залишковими вартостями обладнання на кінець n -го етапу: $s(t+1)$ і $s(1)$.

Рекурентне рівняння дає можливість не тільки обрати лінію поведінки при розв'язанні питання про збереження або заміну обладнання, але й визначає прибуток, який отримується при прийнятті кожного з цих рішень.

Приклад 8.3. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного на даний час трьохлітнього обладнання протягом чотирьох наступних років ($n = 4$), тобто до початку п'ятого року. Наведена таблиця 8.4 містить дані задачі.

Таблиця 8.4

Вік t (роки)	Прибуток $r(t)$ (грн)	Вартість обслуговування $u(t)$ (грн)	Залишкова вартість $s(t)$ (грн)
0	20 000	200	–
1	19 000	600	80 000
2	18 500	1 200	60 000
3	17 200	1 500	50 000
4	15 500	1 700	30 000
5	14 000	1 800	10 000
6	12 200	2 200	5 000

Компанія вимагає заміни обладнання, яке знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нового обладнання дорівнює 100 000 грн.

Розв'язання. Визначення допустимих значень віку обладнання на кожному етапі є нетривіальною задачею. На рис. 8.3 дана задача представлена у вигляді сітки. На початку першого року маємо обладнання трьохрічного віку. Ми можемо або замінити його (З), або експлуатувати (Е) протягом наступного року. Якщо обладнання замінили, то на почат-

ку другого року його вік буде дорівнювати одному року, у протилежному випадку його вік буде чотири роки. Такий же підхід використовується на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий.

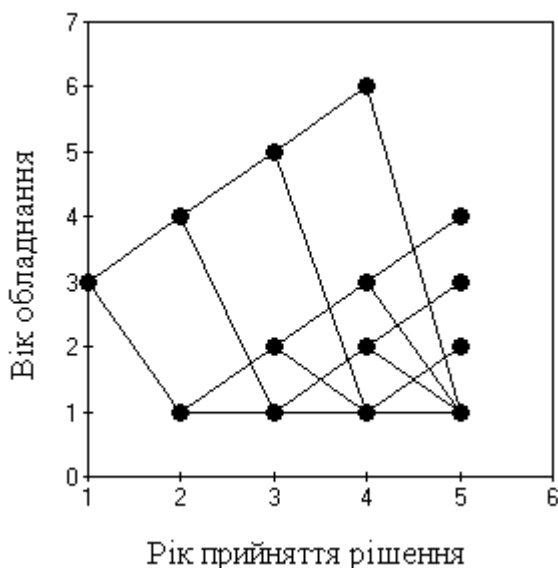


Рис. 8.3

Якщо однорічне обладнання замінити на початку другого або третього року, то обладнання, яке його замінює, на початок наступного року також буде однорічним. До того ж, на початку четвертого року шестирічне обладнання обов'язково повинно бути замінене, якщо воно ще експлуатується. На кінець четвертого року все обладнання продається в обов'язковому порядку. На схемі сітки (рис. 8.3) також видно, що на початку другого року можливе тільки обладнання з терміном експлуатації один або чотири роки. На початку третього року обладнання може мати вік один, два або п'ять років, а на початку четвертого – один, два, три або шість років.

Розв'язування даної задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (який приносить максимальний прибуток) від початку першого року до закінчення четвертого у сітці, яка показана на рис. 8.3. При розв'язуванні цієї задачі використаємо табличну форму запису (числові дані в таблиці кратні тисячам грн.).

Етап 4.

Таблиця 8.5

t	E	$З$	Оптимум	
	$r(t) - u(t) + s(t+1)$	$r(0) - u(0) + s(t) - P + s(1)$	$f_4(t)$	Розв'язок
1	$19,0 - 0,6 + 60 = 78,4$	$20 - 0,2 + 80 - 100 + 80 = 79,8$	79,8	$З$
2	$18,5 - 1,2 + 50 = 67,3$	$20 - 0,2 + 60 - 100 + 80 = 59,8$	67,3	E
3	$17,2 - 1,5 + 30 = 45,7$	$20 - 0,2 + 50 - 100 + 80 = 49,8$	49,8	$З$
6	Необхідна заміна	$20 - 0,2 + 5 - 100 + 80 = 4,8$	4,8	$З$

Етап 3.

Таблиця 8.6

t	E	$З$	Оптимум	
	$r(t) - u(t) + f_4(t+1)$	$r(0) - u(0) + s(t) - P + f_4(1)$	$f_3(t)$	Розв'язок
1	$19,0 - 0,6 + 67,3 = 85,7$	$20 - 0,2 + 80 - 100 + 79,8 = 79,6$	85,7	E
2	$18,5 - 1,2 + 49,8 = 67,1$	$20 - 0,2 + 60 - 100 + 79,8 = 59,6$	67,1	E
5	$14,0 - 1,8 + 4,8 = 17,0$	$20 - 0,2 + 10 - 100 + 79,8 = 9,6$	17,0	E

Етап 2.

Таблиця 8.7

t	E	$З$	Оптимум	
	$r(t) - u(t) + f_3(t+1)$	$r(0) - u(0) + s(t) - P + f_3(1)$	$f_2(t)$	Розв'язок
1	$19,0 - 0,6 + 67,1 = 85,5$	$20 - 0,2 + 80 - 100 + 85,7 = 85,5$	85,5	E або $З$
4	$15,5 - 1,7 + 17,0 = 30,8$	$20 - 0,2 + 30 - 100 + 85,7 = 35,5$	35,5	$З$

Етап 1.

Таблиця 8.8

t	E	$З$	Оптимум	
	$r(t) - u(t) + f_2(t+1)$	$r(0) - u(0) + s(t) - P + f_2(t)$	$f_1(t)$	Розв'язок
1	$17,2 - 1,5 + 35,5 = 51,2$	$20 - 0,2 + 50 - 100 + 85,5 = 55,3$	55,3	$З$

Розглянемо послідовність отримання оптимального розв'язку. На початку першого року оптимальним розв'язком при $t = 3$ є заміна обладнання. Отже, нове обладнання до початку другого року буде знаходитись в експлуатації один рік. При $t = 1$ на початку другого року оптимальним розв'язком буде або використання або заміна обладнання. Якщо воно замінюється, то нове до початку третього року буде знаходитись в експлуатації один рік, інакше обладнання буде мати вік два роки. Описаний процес продовжується доти, поки не буде визначений оптимальний розв'язок для четвертого року.

Отже, починаючи з першого року експлуатації обладнання, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни обладнання будуть $(З, Е, Е, З)$ та $(З, З, Е, Е)$. Загальний прибуток складає 55 300 грн.

Задача про розподіл ресурсів.

Нехай є деяка кількість ресурсів x , які необхідно розподілити між n різними підприємствами, об'єктами, роботами і т. д. так, щоб отримати максимальну сумарну ефективність від обраного способу розподілу.

Введемо позначення: x_i – кількість ресурсів, які виділяються i -му підприємству ($i = 1, 2, \dots, n$);

$g_i(x_i)$ – функція корисності, в даному випадку це величина прибутку від використання ресурсу x_i , отриманого i -м підприємством;

$f_k(x)$ – найбільший прибуток, який можна отримати при використанні ресурсів x від перших k різних підприємств.

Сформульовану задачу можна записати у математичній формі:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для розв'язання задачі необхідно отримати рекурентне рівняння, яке зв'язує $f_k(x)$ і $f_{k-1}(x)$.

Позначимо через x_k кількість ресурсу, який використовується k -м способом ($0 \leq x_k \leq x$), тоді для $(k-1)$ способів залишається величина ресурсів, рівна $(x - x_k)$. Найбільший прибуток, який отримується при використанні ресурсу $(x - x_k)$ від перших $(k-1)$ способів, складе $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимізації сумарного прибутку від k -го і перших $(k-1)$ способів необхідно вибрати x_k таким чином, щоб виконувались рівняння

$$f_1(x) = g_1(x),$$

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Розглянемо конкретну задачу по розподілу капіталовкладень між підприємствами.

Задача інвестування.

Приклад 8.4. Рада директорів фірми розглядає пропозиції по нарощуванню виробничих потужностей для збільшення випуску однорідної продукції на чотирьох підприємствах, які належать фірмі.

Для розширення виробництва рада директорів виділяє кошти в об'ємі 120 млн. грн. з дискретністю 20 млн. грн. Приріст випуску продукції на підприємствах залежить від виділеної суми, його значення представлені підприємствами і містяться у таблиці 8.9.

Знайти розподіл коштів між підприємствами, який забезпечує максимальний приріст випуску продукції, причому на одне підприємство можна здійснити не більше однієї інвестиції.

Виділені кош- ти, млн. грн.	Приріст випуску продукції, млн. грн. по підприємствам			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Розв'язання. Розіб'ємо розв'язування задачі на чотири етапи за кількістю підприємств, на яких передбачається здійснити інвестування.

Рекурентні рівняння будуть мати вигляд:

для підприємства № 1

$$f_1(x) = g_1(x_1),$$

для всіх інших підприємств

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = 2, 3, 4.$$

Розв'язування будемо проводити згідно рекурентним рівнянням у чотири етапи.

Етап 1. Інвестиції робимо тільки першому підприємству. Тоді

$$f_1(20) = 8, \quad f_1(40) = 16, \quad f_1(60) = 25, \quad f_1(80) = 36, \quad f_1(100) = 44, \quad f_1(120) = 62.$$

Етап 2. Інвестиції виділяємо першому і другому підприємствам.

Рекурентне рівняння має вигляд

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тоді

$$\text{при } x = 20: f_2(20) = \max\{0 + 8, 10 + 0\} = \max\{8, 10\} = 10;$$

$$\text{при } x = 40: f_2(40) = \max\{0 + 16, 10 + 8, 20 + 0\} = \max\{16, 18, 20\} = 20;$$

$$\text{при } x = 60: f_2(60) = \max\{25, 10 + 16, 20 + 8, 28\} = \max\{25, 26, 28, 28\} = 28;$$

$$\text{при } x = 80: f_2(80) = \max\{36, 10 + 25, 20 + 16, 28 + 8, 40\} = 40;$$

$$\text{при } x = 100: f_2(100) = \max\{44, 10 + 36, 20 + 25, 28 + 16, 40 + 8, 48\} = 48;$$

при $x = 120$: $f_2(120) = \max\{62, 10 + 44, 20 + 36, 28 + 25, 40 + 16, 48 + 8, 62\} = 62$.

Етап 3. Фінансуємо другий етап і третє підприємство. Розрахунки проводимо за формулою

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Тоді

при $x = 20$: $f_3(20) = \max\{12, 10\} = 12$;

при $x = 40$: $f_3(40) = \max\{20, 12 + 10, 21\} = 22$;

при $x = 60$: $f_3(60) = \max\{28, 12 + 20, 21 + 10, 27\} = 32$;

при $x = 80$: $f_3(80) = \max\{40, 12 + 28, 21 + 20, 27 + 10, 38\} = 41$;

при $x = 100$: $f_3(100) = \max\{48, 12 + 40, 21 + 28, 27 + 20, 38 + 10, 50\} = 52$;

при $x = 120$: $f_3(120) = \max\{62, 12 + 48, 21 + 40, 27 + 28, 38 + 20, 50 + 10, 63\} = 63$.

Етап 4. Інвестиції в об'ємі 120 млн. грн. розподіляємо між третім етапом та четвертим підприємством.

При $x = 120$:

$$f_4(120) = \max\{63, 11 + 52, 23 + 41, 30 + 31, 37 + 22, 51 + 12, 63\} = 64.$$

Отримані умови управління від першого до четвертого етапів. Повернемось від четвертого до першого етапу. Максимальний приріст випуску продукції в 64 млн. грн. отриманий на четвертому етапі як $23 + 41$, тобто 23 млн. грн. відповідають виділенню четвертому підприємству 40 млн. грн. (див. табл. 8.9). Згідно третьому етапу 41 млн. грн. отримано як $21 + 20$, тобто 21 млн. грн. відповідає виділенню третьому підприємству 40 млн. грн. Згідно з другим етапом 20 млн. грн. отримано при виділенні 40 млн. грн. другому підприємству.

Таким чином, інвестиції в об'ємі 120 млн. грн. доцільно виділити другому, третьому і четвертому підприємствам по 40 млн. грн. кожному, при цьому приріст продукції буде максимальним і складатиме 64 млн. грн.

Задача про завантаження.

Задача про завантаження – це задача про раціональне завантаження судна, літака, автомобіля і т. п., які мають обмеження по об'єму або вантажності. Кожний розміщений на засобі пересування вантаж приносить певний прибуток. Задача полягає у визначенні завантаження засобу пересування такими вантажами, які приносять максимальний прибуток.

Рекурентне рівняння процедури зворотної прогонки виводиться для загальної задачі завантаження засобу пересування вантажністю W предметів n найменувань. Нехай m_i – кількість предметів i -го найменування, які необхідно завантажити, r_i – прибуток, який дає один завантажений предмет i -го найменування, w_i – вага одного предмету i -го найменування. Загальна задача має вигляд наступної цілочислової задачі лінійного програмування.

$$\text{Максимізувати } z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n = \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

при умові, що

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \dots + w_n m_n \leq W,$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0 \text{ та цілі.}$$

Три елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином.

1. *Етап i* ставиться у відповідність предмету i -го найменування, $i = 1, 2, \dots, n$.
2. *Варіанти розв'язку* на етапі i описуються кількістю m_i предметів i -го найменування, які підлягають завантаженню. Відповідний прибуток дорівнює $r_i m_i$. Значення m_i лежить у межах від 0 до $[W/w_i]$, де $[W/w_i]$ – ціла частина числа W/w_i .

3. Стан x_i на етапі i виражає сумарну вагу предметів, рішення про завантаження яких прийняті на етапах $i, i+1, \dots, n$. Це визначення відображає той факт, що обмеження за вагою є єдиним, що зв'язує n етапів разом.

Нехай $f_i(x_i)$ – максимальний прибуток від етапів $i, i+1, \dots, n$ при заданому стані x_i . Простіше всього рекурентне рівняння визначається за допомогою наступної двохкрокової процедури.

Крок 1. Виразимо $f_i(x_i) = \max\{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, де $f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$.

Крок 2. Виразимо x_{i+1} як функцію x_i для гарантії того, що ліва частина останнього рівняння є функцією лише x_i . За визначенням $x_i - x_{i+1}$ є вага, яка завантажена на етапі i , тобто $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ або $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$. Отже, рекурентне рівняння набуває наступного вигляду.

$$f_i(x_i) = \max\{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Приклад 8.5. У чотирьохтонний літак завантажують предмети трьох найменувань. Наведена таблиця 8.10 містить дані про вагу одного предмету w_i (у тоннах) і прибутки r_i (у тис. грн.), отримані від одного завантаженого предмету. Як необхідно завантажити літак, щоб отримати максимальний прибуток?

Таблиця 8.10

Предмет i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Розв'язання. Так як вага одного предмету w_i для всіх найменувань і максимальна вага W приймають цілочислові значення, стан x_i може приймати лише цілочислові значення.

Етап 3. Точна вага, яка може бути завантажена на етапі 3 (предмет найменування 3), заздалегідь не відома, але вона повинна приймати одне із значень 1, 2, 3, 4 (так як $W = 4$ тонни). Стани $x_3 = 0$ і $x_3 = 4$ являють собою граничні випадки, коли предмети третього найменування зовсім не завантажуються або завантажують літак повністю. Інші значення x_3 (1, 2, 3) передбачають часткове завантаження літака предметами третього найменування.

Наступне рівняння є основою для порівняння альтернатив на третьому етапі.

$$f_3(x_3) = \max\{14 \cdot m_3\}, \max\{m_3\} = \left[\frac{4}{1} \right] = 4.$$

$$x_3 = 0: f_3(x_3) = 0;$$

$$x_3 = 1: f_3(x_3) = 14;$$

$$x_3 = 2: f_3(x_3) = 28;$$

$$x_3 = 3: f_3(x_3) = 42;$$

$$x_3 = 4: f_3(x_3) = 56.$$

Етап 2.

$$f_2(x_2) = \max\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \max\{m_2\} = \left[\frac{4}{3} \right] = 1.$$

В таблиці 8.11 порівнюються допустимі розв'язки для кожного значення x_2 .

Таблиця 8.11

x_2	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Оптимальний розв'язок	
	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0+0=0	—	0	0
1	0+14=14	—	14	0
2	0+28=28	—	28	0
3	0+42=42	47+0=47	47	1
4	0+56=56	47+14=61	61	1

Етап 1.

$$f_1(x_1) = \max\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}, \max\{m_1\} = \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil = 2.$$

Таблиця 8.12

x_1	$31m_1 + f_2(x_1 - 2x_1)$			Оптимальний розв'язок	
	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0+0=0	–	–	0	0
1	0+14=14	–	–	14	0
2	0+28=28	31+0=31	–	31	1
3	0+47=47	31+14=45	–	47	0
4	0+61=61	31+28=59	62+0=62	62	2

Оптимальний розв'язок визначається тепер наступним чином. З умови $W = 4$ випливає, що перший етап розв'язування задачі при $x_1 = 4$ дає оптимальний розв'язок $m_1^* = 2$, який означає, що два предмети першого найменування будуть завантажені у літак. Це завантаження залишає $x_2 = x_1 - 2m_1^* = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Розв'язування на другому етапі при $x_2 = 0$ приводить до оптимального розв'язку $m_2^* = 0$, яке в свою чергу, дає $x_3 = x_2 - 3m_2^* = 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Далі третій етап при $x_3 = 0$ приводить до $m_3^* = 0$. Отже, оптимальним розв'язком задачі є $m_1^* = 2$, $m_2^* = 0$, $m_3^* = 0$. Відповідний прибуток дорівнює 62 000 грн.

На першому етапі нам, по суті, необхідно отримати розв'язок лише для $x_1 = 4$, так як це останній етап, який підлягає розгляду. Однак значення для $x_1 = 0, 1, 2, 3$ дозволяють провести аналіз чутливості розв'язку. Наприклад, що відбудеться, якщо максимальна вантажність літака буде три тонни замість чотирьох? Новий оптимальний розв'язок може бути визначений починаючи з $x_1 = 3$ на першому етапі і продовжуючи так, як ми поступали при $x_1 = 4$.

Задача про завантаження є типовим представником задачі про розподіл ресурсів.

Задача про будівництво і експлуатацію підприємств.

Задача по оптимальному розміщенню виробничих підприємств також може бути зведена до задачі про розподіл ресурсів згідно з критерієм мінімізації та урахуванням умови цілочислових значень змінних.

Нехай задана потреба у продукті, який користується попитом у певному регіоні. Відомі пункти, в яких можна побудувати підприємства, які будуть випускати цей продукт. Підраховані витрати на будівництво та експлуатацію таких підприємств.

Необхідно так розмістити підприємства, щоб витрати на їх будівництво та експлуатацію були мінімальними.

Введемо позначення:

x – кількість ресурсу, що розподіляється та який можна використати n різними способами;

x_i – кількість ресурсу, який використовується за i -м способом ($i = 1, 2, \dots, n$);

$g_i(x_i)$ – функція витрат на виробництво при використанні ресурсу x_i за i -м способом;

$f_k(x)$ – найменші витрати, які необхідно зробити при використанні ресурсу x першими k способами.

Необхідно мінімізувати загальну величину витрат при освоєнні ресурсу x всіма способами:

$$f_n(x) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \right\}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^n x_i = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Економічний зміст змінних x_i полягає в знаходженні кількості підприємств, яка буде рекомендована для будівництва в i -му пункті. Для зручності розрахунків будемо вважати, що планується будівництво підприємств однакової потужності.

Розглянемо конкретну задачу по розміщенню підприємств.

Приклад 8.6. У трьох районах міста підприємець планує побудувати п'ять підприємств однакової потужності по випуску хлібобулочних виробів, які користуються попитом.

Необхідно розмістити підприємства таким чином, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їх будівництво та експлуатацію. Значення функції витрат наведені у таблиці 8.13.

Таблиця 8.13

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

Розв'язання. У даному прикладі $g_i(x)$ – функція витрат в млн. грн., яка характеризує величину витрат на будівництво та експлуатацію в залежності від кількості розміщених підприємств в i -му районі;

$f_k(x)$ – найменша величина витрат в млн. грн., які необхідно зробити при будівництві та експлуатації підприємств у перших k районах.

Розв'язування задачі проводимо з використанням рекурентних рівнянь:

для першого району

$$f_1(x) = \min\{g_i(x_i)\} = g_1(x),$$

для інших районів

$$f_k(x) = \min\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = 2, 3.$$

Етап 1. Якщо всі підприємства будувати лише в першому районі, то

$$f_1(1) = g_1(1) = 11, f_1(2) = g_1(2) = 18, f_1(3) = g_1(3) = 35,$$

$$f_1(4) = g_1(4) = 51, f_1(5) = g_1(5) = 76.$$

Мінімальні витрати при $x = 5$ складають 76 млн. грн.

Етап 2. Визначимо оптимальну стратегію при розміщенні підприємств в перших двох районах. Розрахунки подані у таблиці 8.14.

Таблиця 8.14

x	$g_2(x_2) + f_1(x - x_2)$						Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$f_2(x_2)$	x_2^*
1	0+11=11	10+0=10	–	–	–	–	10	1
2	0+18=18	10+11=21	19+0=19	–	–	–	18	0
3	0+35=35	10+18=28	19+11=30	34+0=34	–	–	28	1
4	0+51=51	10+35=45	19+18=37	34+11=45	53+0=53	–	37	2
5	0+76=76	10+51=61	19+35=54	34+18=52	53+11=64	75+0=75	52	3

Етап 3. Визначимо оптимальну стратегію при розміщенні п'яти підприємств у трьох районах за формулою

$$f_3(x) = \min\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Знайдемо $f_3(5)$:

$$g_3(0) + f_2(5) = 0 + 52 = 52,$$

$$g_3(1) + f_2(4) = 9 + 37 = 46,$$

$$g_3(2) + f_2(3) = 20 + 28 = 48,$$

$$g_3(3) + f_2(2) = 36 + 18 = 54,$$

$$g_3(4) + f_2(1) = 54 + 10 = 64,$$

$$g_3(5) + f_2(0) = 74 + 0 = 74,$$

$$f_3(5) = \min\{52, 46, 48, 54, 64, 74\} = 46.$$

Визначені витрати на будівництво та експлуатацію підприємств від першого до третього етапу. Повернемося від третього до першого етапу. Мінімальні витрати в 46 млн. грн. на третьому етапі отримані як $9+37$, тобто 9 млн. грн. відповідають будівництву одного підприємства у тре-

тьому районі. Згідно з другим етапом 37 млн. грн. одержані як 19+18, тобто 19 млн. грн. відповідають будівництву двох підприємств у другому районі. Згідно з першим етапом 18 млн. грн. відповідають будівництву двох підприємств у першому районі.

Отже, оптимальна стратегія полягає в будівництві одного підприємства у третьому районі і по два підприємства у першому та другому районах. При цьому мінімальна вартість будівництва та експлуатації складає 46 млн. грн.

Задача про планування робочої сили.

При виконанні деяких проектів кількість робочих, необхідних для цього, регулюються шляхом їх найму та звільнення. Оскільки як наймання, так і звільнення робітників пов'язані з додатковими витратами, необхідно визначити, яким чином повинна регулюватись чисельність робітників в період реалізації проекту.

Припустимо, що проект буде виконуватись протягом n тижнів і мінімальна потреба у робочій силі протягом i -го тижня складає b_i робітників. При ідеальних умовах бажано протягом i -го тижня мати в точності b_i робітників. Однак в залежності від вартісних показників може бути більш вигідним відхилення чисельності робітників як в один, так і в інший бік від мінімальних потреб. Якщо x_i – кількість працюючих протягом i -го тижня, то можливі витрати двох видів: 1) $c_1(x_i - b_i)$ – витрати, пов'язані з необхідністю утримувати надлишок $x_i - b_i$ робочої сили і 2) $c_2(x_i - x_{i-1})$ – витрати, пов'язані з необхідністю додаткового наймання $x_i - x_{i-1}$ робітників.

Елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином.

1. *Етап* i визначається порядковим номером тижня i , $i = 1, 2, \dots, n$.

2. *Варіантами розв'язку* на i -му етапі є значення x_i – кількість працюючих протягом i -го тижня.
3. *Станом* на i -му етапі є x_{i-1} – кількість працюючих протягом $(i-1)$ -го тижня (етапу).

Рекурентне рівняння динамічного програмування представляється у вигляді

$$f_i(x_{i-1}) = \min\{c_1(x_i - b_i) + c_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $f_{n+1}(x_n) \equiv 0$. Обчислення починаються з етапу n при $x_n = b_n$ і закінчуються на етапі 1.

Приклад 8.7. Будівельний підрядчик оцінює мінімальні потреби у робочій силі на кожен з послідовних п'яти тижнів наступним чином: 5, 7, 8, 4 і 6 робітників відповідно. Утримання надлишку робочої сили обходиться підряднику у 300 грн. за одного робітника в тиждень, а наймання робочої сили протягом одного тижня коштує 400 грн. плюс 200 грн. за кожного робітника в тиждень.

Виражаємо c_1 і c_2 в сотнях грн. та маємо наступне:

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 7, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 4, \quad b_5 = 6,$$

$$c_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), \quad x_i > b_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

$$c_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), \quad x_i > x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Етап 5. $b_5 = 5$.

Таблиця 8.15

x_4	$c_1(x_5 - 6) + c_2(x_5 - x_4)$	Оптимальний розв'язок	
	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	$3(0) + 4 + 2(2) = 8$	8	6
5	$3(0) + 4 + 2(1) = 6$	6	6
6	$3(0) + 0 = 0$	0	6

Етап 4. $b_4 = 4$.

Таблиця 8.16

x_3	$c_1(x_4 - 4) + c_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Оптимальний розв'язок	
	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	$3(0)+0+8=8$	$3(1)+0+6=9$	$3(2)+0+0=6$	6	6

Етап 3. $b_3 = 8$.

Таблиця 8.17

x_2	$c_1(x_3 - 8) + c_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 8$		$f_3(x_2)$	x_3^*
7	$3(0)+4+2(1)+6=12$		12	8
8	$3(0)+0+6=6$		6	8

Етап 2. $b_2 = 7$.

Таблиця 8.18

x_1	$c_1(x_2 - 7) + c_2(x_3 - x_2) + f_3(x_2)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	$3(0)+4+2(2)+12=20$	$3(1)+4+2(3)+6=19$	19	8
6	$3(0)+4+2(1)+12=18$	$3(1)+4+2(2)+6=17$	17	8
7	$3(0)+0+12=12$	$3(1)+4+2(1)+6=15$	12	7
8	$3(0)+0+12=12$	$3(1)+0+6=9$	9	8

Етап 1. $b_1 = 5$.

Таблиця 8.19

x_0	$c_1(x_1 - 5) + c_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Оптимальний розв'язок	
	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	$3(0)+4+$ $2(5)+19=33$	$3(1)+4+$ $2(6)+17=36$	$3(2)+4+$ $2(7)+12=36$	$3(2)+4+$ $2(8)+9=35$	33	5

Оптимальний розв'язок визначається послідовно наступним чином.

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6.$$

Отриманому розв'язку відповідає план поданий у таблиці 8.20

Таблиця 8.20

Номер тиж- ня (i)	Мінімум робочої сили (b_i)	Кількість фактично працюючих (x_i)	Розв'язок
1	5	5	Найняти 5 робітників
2	7	8	Найняти 3 робітника
3	8	8	Нічого не міняти
4	4	6	Звільнити 2 робітників
5	6	6	Нічого не міняти

8.3. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТІ

Метод динамічного програмування є дуже потужним методом оптимізації управління, який здатний розв'язувати задачі не зважаючи на цілочисловий розв'язок, нелінійність цільової функції, вид обмежень. Але на відміну від лінійного програмування динамічне програмування не зводиться до якої-небудь стандартної обчислювальної процедури; воно може бути передано на комп'ютер тільки після того, як записані відповідні формули, а це часто буває не так легко.

Перше питання, на яке треба дати відповідь: якими параметрами характеризується стан системи, яка підлягає керуванню. Від вдалого знаходження набору цих параметрів часто залежить можливість успішно розв'язати задачу оптимізації. Якщо, як це звичайно і буває, стан системи описується багатьма параметрами, то стає важко перед кожним кроком перебрати всі їх варіанти і для кожного знайти оптимальну умову керування. Останнє ще більш ускладнюється у випадку, коли кількість можливих варіантів керування велика. У цих випадках над особою, що приймає рішення, повисає „прокляття багатовимірності Р. Беллмана”. Тому дуже важливо вміти правильно поставити задачу, не переобтяжу-

вати її зайвими деталями. Так що у методі динамічного програмування багато залежить від мистецтва і досвіду дослідника.

Друга задача після опису системи – це поділ на етапи (кроки). Іноді він буває заданий у самій постановці задачі, але часто поділ на кроки приходиться вводити штучно. При постановці задачі динамічного програмування, зокрема при виборі способу поділу на кроки, повинні бути враховані всі розумні обмеження, які накладаються на управління. Кількість кроків необхідно обирати з урахуванням двох обставин:

- 1) крок повинен бути достатньо дрібним для того, щоб процедура оптимізації крокового управління була достатньо простою;
- 2) крок повинен бути не надто дрібним, щоб не виконувати зайвих розрахунків, які тільки ускладнюють процедуру пошуку оптимального розв'язку, а не приводять до суттєвого покращення оптимуму цільової функції.

У будь-якому випадку практики нас цікавить не строго оптимальний, а „припустимий” розв'язок, який не сильно відрізняється від оптимального за значенням цільової функції.

Основу методу динамічного програмування становить так званий принцип оптимальності Беллмана, який можна сформулювати так.

Принцип оптимальності. *На кожному етапі оптимальна стратегія визначається незалежно від стратегій, які застосовані на попередніх етапах.*

Застосування принципу оптимальності демонструється всіма обчисленнями з наведених у попередньому параграфі прикладів. Ми використовували на кожному наступному етапі оптимальні розв'язки, отримані на попередньому етапі і не цікавились, як останні були досягнуті.

Сформулюємо декілька практичних рекомендацій щодо постановки задач динамічного програмування. Цю постановку зручно проводити у наступному порядку.

1. Вибрати параметри, які характеризують стан S системи перед кожним кроком.
2. Поділити операцію на етапи (кроки).
3. З'ясувати набір крокових управлінь x_i для кожного кроку і обмеження, які на них накладаються.
4. Визначити, яке значення цільовій функції приносить на i -му кроці управління x_i , якщо перед цим система була у стані S , тобто записати цільові функції : $z_i = f_i(S, x_i)$.
5. Визначити, як зміниться стан S під впливом управління x_i на i -му кроці: воно переходить у новий стан

$$S' = \varphi_i(S, x_i). \quad (8.1)$$

6. Записати основне рекурентне рівняння динамічного програмування, яке виражає умовне оптимальне значення цільової функції $Z_i(S)$ (починаючи з i -го кроку і до кінця) через вже відоме значення $Z_{i+1}(S)$:

$$Z_i(S) = \max\{f_i(S, x_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\}. \quad (8.2)$$

Цьому значенню цільової функції відповідає умовне оптимальне управління на i -му кроці $x_i(S)$ (підкреслимо, що у вже відому функцію $Z_{i+1}(S)$ треба замість S підставити змінений стан $S' = \varphi_i(S, x_i)$).

7. Виконати умовну оптимізацію останнього (m -го) кроку, вибравши з усієї гамми станів S , з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану; при цьому для кожного з них обчислюється цільова функція за формулою

$$Z_m(S) = \max\{f_m(S, x_m)\}$$

і знаходиться умовне оптимальне управління $x_m(S)$, для якого цей максимум досягається.

8. Виконати умовну оптимізацію $(m-1)$ -го, $(m-2)$ -го і т. д. кроків за формулою (8.2), приймаючи в ній $i = (m-1), (m-2), \dots$, і для кожного-

го з кроків вказати умовне оптимальне управління $x_i(S)$, при якому максимум досягається.

9. Виконати безумовну оптимізацію управління, розглядаючи відповідні рекомендації на кожному кроці. Взяти знайдене оптимальне керування на першому кроці $x_1^* = x_1(S_0)$; змінити стан системи за формулою (9.1); для щойно знайденого стану знайти оптимальне керування на другому кроці x_2^* і т. д. до кінця.

До сих пір ми розглядали тільки адитивні задачі динамічного програмування, в яких цільова функція за всю операцію дорівнювала сумі цільових функцій на окремих етапах. Але метод динамічного програмування застосовується і до задач із так званим „мультиплікативним” критерієм, який має вигляд добутку:

$$Z = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_m = \prod_{i=1}^m z_i$$

(якщо тільки показники ефективності z_i додатні). Ці задачі розв’язуються таким же чином, як і задачі з адитивним критерієм, з тією єдиною різницею, що в основному рівнянні (8.2) замість знаку „плюс” ставиться знак множення:

$$Z_i(S) = \max\{f_i(S, x_i) \cdot Z_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\}.$$

На практиці зустрічаються випадки, коли планувати операцію додиться не на чітко визначений термін, а на невизначений тривалий проміжок часу, і нас може цікавити розв’язок задачі оптимального управління, якщо не відомо на якому кроці операція завершується. В таких випадках буває зручно розглянути в якості моделі явища нескінченно-кроковий процес управління, для якого не існує „особливого”, по відношенню до інших, останнього кроку (всі кроки рівноправні).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які характерні особливості задач динамічного програмування?
2. Які рівняння покладені в основу методу динамічного програмування?
3. Методи прямої і зворотної прогонки.
4. Назвіть основні елементи моделей динамічного програмування.
5. Наведіть приклади задач динамічного програмування, які можуть бути зведені до задачі розподілу ресурсів. Які типи задач динамічного програмування Ви знаєте?
6. Зміст принципу оптимальності Белмана.
7. Алгоритм розв'язування задач динамічного програмування.
8. Мультиплікативні задачі динамічного програмування.

ВПРАВИ

8.1. Знайти найкоротший маршрут між містами 1 і 7 на сітці доріг, яка представлена на рис. 8.11. Визначити етапи і стани системи за допомогою алгоритму зворотної прогонки, а потім розв'язати задачу.

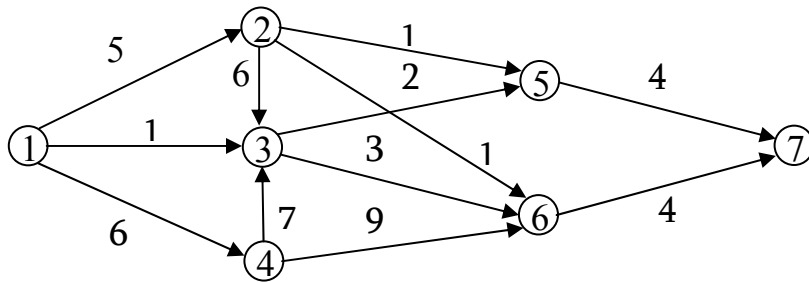


Рис. 8.11

8.2. На початок періоду, що розглядається, на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від періоду його роботи, а також витрати на утримання і ремонт при різному терміні його використання наведені у таблиці 8.21.

Таблиця 8.21

Найменування	Час, протягом якого використовується обладнання, роки					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції, тис. грн.	80	75	65	60	60	55
Щорічні витрати на утримання і ремонт обладнання, тис. грн.	20	25	30	35	45	55

Відомо, що витрати, які пов'язані з придбанням і встановленням нового обладнання, ідентичного встановленому, складає 40

тис. грн., а обладнання, яке замінюється, списується. Скласти такий план заміни обладнання протягом п'яти років, при якому загальний прибуток за даний період часу максимальний.

8.3. Група фермерів володіє трактором, термін експлуатації якого два роки, і планує розробити стратегію його заміни на наступні п'ять років. Трактор повинен експлуатуватись не менше двох і не більше п'яти років. На даний час трактор коштує 40 000 у. г. о., і ця ціна за рік збільшується на 10%. Поточна річна вартість експлуатації трактора складає 1300 у. г. о. і, як очікується, буде збільшуватись на 10% у рік. Сформулюйте задачу у вигляді задачі про найкоротший шлях, побудуйте відповідне рекурентне рівняння і визначте оптимальну стратегію заміни трактора на наступні п'ять років.

8.4. На початок періоду, що аналізується, на підприємстві встановлено нове обладнання. Визначити оптимальний цикл заміни обладнання при наступних вихідних даних:

купована ціна обладнання складає 12 у. г. о.;

залишкова вартість обладнання дорівнює нулю $s(t) = 0$;

$f_n(t) = r(t) - u(t)$ – максимальний прибуток, який отримується від обладнання при умові оптимальної стратегії, де $r(t)$ – вартість продукції, яка випускається за рік на одиниці обладнання віком t років, $u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком t років;

$n = 8$ років.

Залежність $f_n(t)$ від n задана у таблиці 8.22.

Таблиця 8.22

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	12	11	10	8	6	4	2	0	0

- 8.5. Торгівельна фірма має в розпорядженні п'ять автокрамниць, які можуть бути направлені у вихідний день в три населених пункти. Вважається, що товарообіг фірми залежить лише від кількості і асортименту товарів та визначається кількістю надісланих у той чи інший населений пункт машин. Середнє значення товарообігу у тис. грн. в кожному з населених пунктів задано у таблиці 8.23.

Таблиця 8.23

Кількість автокрамниць	Товарообіг в населених пунктах		
	1	2	3
1	15	12	18
2	24	20	23
3	30	31	29
4	37	38	36
5	41	42	39

Знайти оптимальну стратегію фірми у розподілі автокрамниць по населеним пунктам, яка максимізує загальний товарообіг.

- 8.6. Деякий інвестор з початковим капіталом у 10 000 у. г. о. повинен вирішити в кінці кожного року, скільки коштів витратити і скільки інвестувати. Кожна одиниця інвестованого капіталу повертає $\alpha = 1,09$ одиниць в кінці року. Витрачені y одиниць коштів протягом кожного року приносять задоволення, яке визначається кількісно як еквівалент отримання $g(y) = \sqrt{y}$ у. г. о. Розв'яжіть задачу за допомогою методів динамічного програмування для періоду в $n = 5$ років.
- 8.7. Фермер має k овець. На кінець кожного року він приймає рішення, скільки овець продати і скільки залишити. Прибуток від продажу однієї вівці в i -рік складає p_i . Кількість овець на кінець i -року подвоюється до кінця $(i+1)$ -року. Фермер планує в кінці n -го року повністю продати овець. Складіть рекурентне рівняння для

розв'язування задачі і знайдіть розв'язок при наступних даних:

$n = 3$ роки, $k = 2$ вівці, $p_1 = 100$ грн., $p_2 = 130$ грн., $p_3 = 120$ грн.

- 8.8. В таблиці 8.24 вказаний можливий приріст випуску продукції чотирма плодово-консервними заводами області при інвестуванні їх модернізації з дискретністю 10 млн. грн., причому на один завод можна здійснити лише одну інвестицію. Скласти план розподілу інвестицій між заводами області, який максимізує загальний приріст випуску продукції.

Таблиця 8.24

Інвестиції, млн. грн.	Приріст випуску продукції, млн. грн.			
	Заводи			
	1	2	3	4
10	5	6	7,2	5,6
20	12	14	12,8	11,2
30	20	18	19	22
40	28	24,4	26	28,4

- 8.9. У шеститонний літак завантажують предмети трьох найменувань. Наведена таблиця 8.25 містить дані про вагу одного предмету w_i (в тоннах) і прибутки r_i (в тис. грн.), які одержується від одного предмету, що завантажуються. Як необхідно завантажити літак, щоб отримати максимальний прибуток?

Таблиця 8.25

Предмет i	w_i	r_i
1	4	70
2	1	20
3	2	40

- 8.10. Турист збирається у подорож по безлюдній місцевості і повинен упакувати рюкзак предметами трьох найменувань: їжу, засоби першої допомоги і одяг. Об'єм рюкзака складає 84 дм³. Кожна

одиниця їжі займає 28 дм³, упаковка засобів першої допомоги – 7 дм³, окремий предмет одягу – приблизно 14 дм³. Турист визначив свої переваги ваговими коефіцієнтами 3, 4 і 5 – для їжі, засобів першої допомоги і одягу відповідно. Досвід підказує туристу, що він повинен взяти не менше одного предмету кожного найменування і не більше двох комплектів засобів першої допомоги. Скільки одиниць кожного найменування візьме турист у подорож?

8.11. У трьох областях необхідно побудувати п'ять підприємств по переробці сільськогосподарської продукції однакової потужності. Необхідно розмістити підприємства таким чином, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їх будівництво і експлуатацію. Функція витрат $g_i(x)$, яка характеризує величину витрат на будівництво і експлуатацію в залежності від кількості розміщених підприємств в i -ої області, наведена в таблиці 8.26.

Таблиця 8.26

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	8	14	22	29	34
$g_2(x)$	10	17	18	27	31
$g_3(x)$	11	16	15	26	31

8.12. Будівельний підрядник оцінює мінімальні потреби в робочій силі на кожний з наступних п'яти тижнів таким чином: 8, 4, 7, 8 і 2 робітників відповідно. Утримання надлишку робочої сили обходиться підрядчику у 300 грн. за одного робітника в тиждень, а наймання робочої сили протягом одного тижня коштує 400 грн., плюс 200 грн. за кожного робітника в тиждень. Знайти оптимальний план наймання робітників.

8.13. Нехай, у вправі 8.12, кожному звільненому робочому виплачується вихідна допомога у розмірі 100 грн. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі.

- 8.14. Туристичне агентство організовує тижневі поїздки на Кіпр. У відповідності з договором на найближчі чотири тижні агентство повинно забезпечити туристичні групи орендними автомобілями у кількості сім, чотири, сім і вісім штук відповідно. Агентство заключає договір з місцевим дилером по прокату автомобілів. Дилер призначає орендну плату за один автомобіль 220 євро на тиждень плюс 500 євро за будь-яку орендну угоду. Агентство, однак, може не повертати орендовані автомобілі в кінці тижня, і в цьому випадку воно виплачує тільки орендну плату в 220 євро. Яке оптимальне вирішення проблеми, пов'язаної із орендою автомобілів?
- 8.15. Фірма випускає п'ять типів механічних іграшок (M_1, M_2, \dots, M_5) і п'ять типів електронних іграшок (E_1, E_2, \dots, E_5). Більшою перевагою при покупці користуються іграшки з більшим номером. Це означає, що покупець буде брати іграшку з більшим номером, якщо та є у продажі. Тижневий попит на п'ять механічних іграшок дорівнює 300, 190, 240, 280 і 260 одиниць відповідно. Аналогічні показники для електронних іграшок дорівнюють 100, 180, 90, 250 і 190 одиниць відповідно. Виробництво однієї механічної іграшки обходиться у 20, 25, 15, 10 і 15 грн. відповідно. Виготовлення ж однієї електронної іграшки обходиться фірмі у 50, 60, 40, 45 і 30 грн. відповідно. Організація виробництва кожної механічної або електронної іграшки обходиться у 2500 грн. Визначити оптимальний план виробництва іграшок.
- 8.16. Протягом 10 днів спостерігалися наступні зміни запасів:
- початковий запас дорівнює нулю, а наступні дві доби товари надходили на склад неперервно і рівномірно по 500 шт. в день, витрати запасів не відбувалося;

- в послідувачі чотири дні попит на товари, що є в запасі був неперервним і рівномірним та дорівнював 250 шт. в день, поповнення запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит у товарах змінився до 200 шт. в день, з метою задоволення попиту і поповнення запасів кожного дня на склад доставлялось 300 шт. (поставки на склад і з складу проходили рівномірно і неперервно).

Накресліть графік зміни запасів для 10-денного періоду, визначте величину запасів на складі до кінця періоду. Вирахуйте середній рівень запасів для всього періоду.

- 8.17. Фірмі, яка займається будівництвом пароплавів, необхідно 20 000 заклепок у рік, які витрачаються із сталою інтенсивністю. Організаційні витрати складають 0,5 тис. грн. за партію, ціна однієї заклепки – 10 грн. Витрати на зберігання однієї заклепки оцінені у 12,5 % її вартості.
- 8.18. Знайти оптимальний розмір партії постачання, оптимальну тривалість циклу та оптимальну кількість поставок у рік.
- 8.19. Відомо, що витрати на виконання замовлення – 2 гр. од., кількість товару, який реалізується за рік – 1000 шт., закупівельна ціна одиниці товару – 5 гр. од., витрати на зберігання – 20 % від закупівельної ціни. Знайти найбільш оптимальний розмір замовлення.
- 8.20. Система управління запасами деякого товару описується основною моделлю. Кожен рік із сталою інтенсивністю попит складає 15 000 од. товару, витрати на організацію постачання складають 10 грн. на партію, ціна одиниці товару – 30 грн., а витрати на її зберігання 7,5 грн. у рік. Знайти оптимальний розмір партії, кількість поставок, тривалість циклу.
- 8.21. Інтенсивність рівномірного попиту – 2000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії – 20 тис. грн., ціна одиниці

товару – 1 тис. грн., витрати на зберігання запасу – 100 грн. за од. товару у рік. Знайти оптимальний розмір партії, припускаючи, що система описується основною моделлю.

- 8.22. Відділ постачання компанії запропонував дві стратегії управління запасами.
- 8.23. Стратегія 1. Об'єм замовлення 150 одиниць при точці поновлення замовлення в 50 одиниць та терміну виконання замовлення 10 днів.
- 8.24. Стратегія 2. Об'єм замовлення 200 одиниць при точці поновлення замовлення в 75 одиниць та терміну виконання замовлення 15 днів.
- 8.25. Яку з двох стратегій слід затвердити? Якби ви відповідали за розробку стратегії управління запасами, яка була б ваша рекомендація?
- 8.26. Комплектуючі продаються по 25 грн. за одиницю, але передбачається 10% знижка при закупівлі партії від 150 одиниць та вище. Компанія за день використовує 20 одиниць комплектуючих. Вартість розміщення замовлення складає 50 грн., вартість зберігання одиниці товару складає 0,30 грн. за день. Чи варто компанії скористатися знижкою?
- 8.27. Підприємець має стабільний місячний попит на товар у кількості 50 од. Товар він закуповує у постачальника за ціною 6 гр. од. за штуку, до того ж витрати на оформлення постачання та інші підготовчі операції складають у кожному випадку 10 гр. од.
- 8.28. Як часто підприємець повинен поповнювати свій запас товарів, якщо витрати на зберігання дорівнюють 20 % ціни товару?
- 8.29. Фірма замість оптимального значення партії товару Q в основній моделі постачань замовила на 50% більше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?

- 8.30. Фірма замість оптимального значення партії товару q в основній моделі постачань замовила на 50% менше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?
- 8.31. Відомо, що витрати на виконання замовлення рівні 10 гр. од., річний попит на товар – 1470 т, оптимальний розмір партії постачань – 35 т. Визначити річні витрати на виконання замовлення.
- 8.32. Товар, що користується попитом, продається з середньою швидкістю 45 од. на день, а виготовляється з швидкістю 450 од. на день. Витрати на організацію і доставку товару складає 5 тис. грн. за партію, витрати на зберігання запасів дорівнюють 20 % вартості товару. Вартість товару складається наступним чином: заробітна плата обслуговуючого персоналу складає 0,4, витрати на матеріали – 0,5, накладні витрати 0,6 грн. за одиницю товару (для кожної одиниці товару ці значення додаються). Знайти оптимальний розмір партії і мінімальні загальні витрати, пов'язані з утворенням запасу (у розрахунку на одиницю товару протягом року). У році – 300 робочих днів.
- 8.33. Інтенсивність попиту в моделі виробничих постачань складає чверть швидкості виробництва, яка дорівнює 20 000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії дорівнюють 150 грн., а витрати на зберігання одиниці товару протягом року – 5 грн. Визначити оптимальний розмір партії.
- 8.34. Фірма, яка виступає в якості посередника, зобов'язується постачати заводу 5 одиниць необхідного вузла агрегату в день. Керівництво фірми вирішило доставляти вузли на свій склад партіями, кожна з яких містить 150 од. і вони розраховані на 30-денний термін. За один прострочений день у постачанні вузла заводу фірма виплачує штраф 200 грн. Витрати на зберігання одного вуз-

ла були оцінені в 250 грн. за тиждень, організаційними витратами можна знехтувати.

- 8.35. Знайти оптимальний рівень запасів і тривалість періоду дефіциту, що йому відповідає. Обчисліть зменшення витрат при оптимальній політиці управління запасами у порівнянні з політикою, коли на початку кожного періоду на склад поступає 150 вузлів.

РОЗДІЛ 9

СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. ФОРМУЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ЗАДАЧ

У попередніх розділах були розглянуті задачі дослідження операцій, які містили лише детерміновані (невипадкові) величини і оптимум цільової функції однозначно визначався вибором певного плану і деяких параметрів.

Будь-які економічні дані являють собою кількісні характеристики яких-небудь економічних об'єктів. Вони формуються під впливом множини факторів, які не всі доступні зовнішньому контролю. Неконтрольовані фактори можуть приймати випадкові значення з деякої множини значень і тим самим обумовлювати випадковість даних, які вони визначають. Стохастична природа економічних даних обумовлює необхідність застосування спеціальних методів для їх аналізу і обробки.

Стохастичні задачі є найбільш адекватними багатьом важливим процесам економіки. Вони виникають скрізь, де треба приймати оптимальне рішення в умовах невизначеності, причому природа невизначеності може бути різноманітна: недостатність знань про природу розгляданого процесу, неможливість контролю і передбачення, що стосується зміни параметрів процесу, і т. д. Усе це не дає змоги прийняти однозначне оптимальне рішення, яке гарантувало б оптимізацію цільової функції. Коректні постановки і розв'язування стохастичних задач утруднюється тим, що важко встановити єдиний критерій (міру) оптимальності розв'язку в умовах невизначеності.

Виділяють два підходи до формулювання стохастичних задач, а тобто і два типи цих задач.

1. Найширше застосовуваний підхід до стохастичних задач полягає в усереднюванні випадкових величин, тобто в зведенні задачі до детермінованої. Це дає змогу значно спростити задачу і в більшості випадків ді-

стати план, який з достатньою вірогідністю можна вважати оптимальним. Задачу цього типу можна записати так:

$$z = f(\vec{X}, \vec{\Theta}) \rightarrow opt \quad (9.1)$$

при умовах

$$g_i(\vec{X}, \vec{\Theta}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.2)$$

де \vec{X} – вектор невідомих (керованих) змінних;

$\vec{\Theta}$ – вектор випадкових параметрів.

Очевидно, при довільному плані \vec{X}' (в тому числі і оптимальному) величина z буде випадковою, а оскільки випадкові параметри входять і в систему обмежень, то і границі множини планів теж будуть невизначеними. Отже, саме поняття оптимального плану для стохастичної задачі є неоднозначним і потребує певної конкретизації. Однією з поширених конкретизацій поняття оптимального плану є його визначення як оптимального плану задачі, одержаної з (9.1), (9.2) шляхом заміни випадкових величин $f(\vec{X}, \vec{\Theta})$ та $g_i(\vec{X}, \vec{\Theta})$ їх математичними сподіваннями, тобто

$$z = Mf(\vec{X}, \vec{\Theta}) \rightarrow opt, \quad (9.1a)$$

$$Mg_i(\vec{X}, \vec{\Theta}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.2a)$$

Однак, якщо дисперсія $Df(\vec{X}, \vec{\Theta})$ велика, то при оптимальному плані задачі (9.1a), (9.2a) реальне значення z може випадково бути надто далеким від оптимального значення z^* . Тому часто в цільові функції або в обмеження таких задач вводять дисперсії і моменти вищих порядків.

2. Іноді стохастична задача формулюється як задача визначення плану, що максимізує ймовірність досягнення певного рівня виробництва, прибутку чи витрат.

У такому формулюванні задача стохастичного програмування може бути записана так:

$$z = P\{f(\vec{X}, \vec{\Theta}) \geq c\} \rightarrow opt \quad (9.3)$$

при умовах

$$G_i(\bar{X}) = P\{g_i(\bar{X}, \bar{\Theta})\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.4)$$

Одним із способів дослідження задач (9.3), (9.4) є їх зведення до задач типу (9.1a), (9.2a).

Можливі також комбіновані задачі із задач (9.1), (9.2) та (9.3), (9.4).

9.2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методи дослідження стохастичних задач, які використовують в повній мірі імовірнісні характеристики їх функцій, називають *прямими методами*. Так звані *непрямі методи* полягають в усередненні самих випадкових параметрів, тобто замість задачі (9.1), (9.2) розглядають таку задачу:

$$z' = f(\bar{X}, \langle \bar{\Theta} \rangle) \rightarrow opt, \quad (9.5)$$

$$g'_i(\bar{X}) = g_i(\bar{X}, \langle \bar{\Theta} \rangle) \leq 0, \quad (9.6)$$

де $\langle \bar{\Theta} \rangle$ – математичне сподівання (середнє значення) параметрів.

Розглянемо, наприклад, лінійну задачу з випадковими коефіцієнтами в цільовій функції.

Для спрощення візьмемо двовимірну задачу, а коефіцієнти лінійної форми вважатимемо нормально розподіленими і стохастично незалежними. Нехай треба розв'язати задачу:

$$\begin{aligned} z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \\ f(c_1) &= N(\bar{c}_1, \sigma_1^2), \quad f(c_2) = N(\bar{c}_2, \sigma_2^2), \end{aligned} \quad (9.7)$$

де \bar{c}_1, \bar{c}_2 – математичні сподівання випадкових коефіцієнтів.

Величина цільової функції z є, таким чином, випадковою величиною з законом розподілу

$$f(z) = N(z, \sigma_z^2) = N(\bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2, \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2). \quad (9.8)$$

Цілком зрозуміло, що за своєю природою випадкова величина z з нормальним законом розподілу може набувати довільних значень в інтервалі всієї числової осі при довільному плані $\bar{X} = (x_1, x_2)$ із скінченними значеннями величини компонент x_1 і x_2 , а оптимальний, у розумінні максимуму величини z , план може іноді призвести до найгіршого практичного результату. Крім того, зрозуміло, що немає критерію визначення оптимального плану за максимізацією випадкової величини z з нормальним законом розподілу.

Сказане не означає, що задача (9.7) не має смислу. Як видно з (9.8), розподіл випадкової величини z залежить від керованих змінних задачі. Тому задача (9.7) може полягати в знаходженні найкращого в певному розумінні розподілу випадкової величини z . Критеріїв оптимальності розподілу може бути кілька. Природним буде критерій максимуму математичного сподівання z , тобто $\bar{z} = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 \rightarrow \max$ при обмеженнях задачі (9.7). Проте може виявитись, що оптимальний за цим критерієм план дає дуже велику дисперсію $\sigma_z^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2$, від чого практична цінність такого оптимального плану різко знижується. Тоді природно виникає потреба накласти обмеження на дисперсію σ_z^2 , тобто задачу (9.7) подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 \rightarrow \max, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \\ \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 &\leq \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де σ_0^2 не повинно бути меншим за

$$\min \sigma_z^2 = \min(\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2)$$

при x_1, x_2 , що задовольняють лінійні обмеження задачі.

Задача (9.9) вже буде нелінійною.

Іншу модифікацію задачі (9.7) дістанемо, застосовуючи критерій мінімізації дисперсії σ_z^2 при заданій нижній межі значення $\bar{z}_{\min} = z_0$, тобто

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \rightarrow \min, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 &\geq z_0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Задача (9.10) є задачею квадратичного програмування. Визначивши оптимальний план однієї з задач (9.9) чи (9.10), тим самим установлюють функції розподілу величини z , звідки можна знайти надійні границі для оптимального значення z^* при заданому рівні значущості.

Все вищесказане справедливе для довільної кількості змінних.

Розглянемо приклад з однією невідомою.

Приклад 9.1. У буряково-цукровому комплексі мають S коштів, які необхідно розподілити між розширенням сировинної бази і збільшенням потужностей з її переробки. Потрібно так спланувати розподіл коштів, щоб отримати найбільшу кількість цукру. Вихідні дані задачі: q_1 – питомі витрати коштів на вирощування цукрового буряка на одному гектарі, q_2 – питомі приведені витрати на створення одиниці потужності, r – частка виходу цукру з одиниці сировини. При цьому урожайність цукрових буряків c вважається випадковою величиною і статистичні дані по ній за 10 років подані у таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

Рік	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Урожайність, ц/га	205	201	198	195	210	201	202	195	201	192

Розв'язання. Нехай x – планова площа під цукровим буряком, y – планова потужність цукрового заводу.

Потрібно максимізувати приріст обсягу виробництва цукру за обмежених коштів. Економіко-математична модель набуває вигляду:

$$z(x, y) = \min\{rcx, ry\} \rightarrow \max$$

за умов

$$q_1x + q_2y \leq S,$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Урожайність c є випадковою величиною. Перейдемо до детермінованої задачі скориставшись вибіркоvim середнім для урожайності:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i = \frac{1}{10} (1 \cdot 192 + 2 \cdot 195 + 1 \cdot 198 + 3 \cdot 201 + 1 \cdot 202 + 1 \cdot 205 + 1 \cdot 210) = 200.$$

Цільова функція, що є *функцією Леонтьєва*, приймає вигляд $z = \min\{200rx, ry\}$ і має стаціонарну точку, яка визначається рівністю

$$200rx = ry,$$

звідки $y = 200x$.

Розв'язавши систему

$$y = 200x$$

$$q_1x + q_2y = S,$$

отримуємо оптимальний розв'язок

$$x = \frac{S}{q_1 + 200q_2}, \quad y = \frac{200S}{q_1 + 200q_2}.$$

Розглянемо оптимізаційну задачу з *імовірнісними обмеженнями*, яка має наступний вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Термін „імовірнісні обмеження” обумовлений тим, що кожне обмеження задачі повинне виконуватись з імовірністю не меншою, ніж $1 - \alpha_i$, $0 < \alpha_i < 1$. Передбачається, що всі коефіцієнти a_{ij} і b_i є випадковими величинами. Наведені обмеження можна переписати у вигляді

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j > b_i\right\} \leq \alpha_i,$$

в якому значення α_i можна трактувати як *ризик* і розуміти його так: імовірність того, що $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j > b_i$ не перевищує значення ризику α_i . Наприклад, α_i може бути ризиком (імовірністю) перевищення фонду робочого часу, запасів сировини і т. ін.

Розглянемо три випадки. Перші два відповідають припущенням про те, що тільки або a_{ij} , або b_i є випадковими величинами, а третій поєднує ці два випадки. У всіх трьох випадках передбачається, що параметри є нормально розподіленими випадковими величинами з відомими математичними сподіваннями і дисперсіями.

Випадок 1. Передбачається, що всі a_{ij} є нормально розподіленими випадковими величинами з математичними сподіваннями $M(a_{ij})$ і дисперсіями $D(a_{ij})$. Також відомі коваріації $\text{cov}(a_{ij}, a_{kl})$ випадкових величин a_{ij} і a_{kl} .

Розглянемо i -те обмеження задачі

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

і введемо позначення

$$h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Випадкова величина h_i має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(h_i) = \sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j$ і дисперсією $D(h_i) = \vec{X}^T D_i \vec{X}$, де

$$\vec{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$D_i = \begin{pmatrix} D(a_{i1}) & \dots & \text{cov}(a_{i1}, a_{in}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(a_{in}, a_{i1}) & \dots & D(a_{in}) \end{pmatrix} - i\text{-я матриця коваріацій.}$$

Тоді маємо

$$P\{h_i \leq b_i\} = P\left\{\frac{h_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \leq \frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}\right\} \geq 1 - \alpha_i,$$

де $\frac{h_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}$ – нормована нормально розподілена випадкова величина з

нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Це означає, що

$$P\{h_i \leq b_i\} = F\left(\frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}\right),$$

де через F позначена функція розподілу стандартного нормального розподілу:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Нехай K_{α_i} – значення стандартної нормально розподіленої випадкової величини, яка визначається з рівняння

$$F(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i.$$

В цьому випадку нерівність $P\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \geq K_{\alpha_i}.$$

Це приводить до детермінованого нелінійного обмеження, яке еквівалентне вихідному імовірнісному

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + K_{\alpha_i} \sqrt{\vec{X}^T D_i \vec{X}} \leq b_i.$$

Зокрема, якщо a_{ij} – незалежні нормально розподілені випадкові величини, тоді $\text{cov}(a_{ij}, a_{kl}) = 0$ і остання нерівність приймає вигляд

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + K_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2} \leq b_i.$$

Дане обмеження можна записати у вигляді обмежень задачі сепарабельного програмування, для чого використовується заміна змінних

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Отже, вихідне обмеження еквівалентне нерівності

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + K_{\alpha_i} y_i \leq b_i$$

і рівнянню

$$\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2 - y_i^2 = 0.$$

Випадок 2. Тут припускається, що тільки b_i є нормально розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням $M(b_i)$ і дисперсією $D(b_i)$. Аналіз цієї ситуації проводиться аналогічно випадку 1. Розглянемо стохастичне обмеження

$$P\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right\} \geq \alpha_i.$$

Як і у першому випадку, маємо

$$P \left\{ \frac{b_i - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \right\} \geq \alpha_i.$$

Це обмеження виконується лише при виконанні нерівності

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \leq K_{\alpha_i}.$$

Отже, вихідне імовірнісне обмеження еквівалентне детермінованому лінійному

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq M(b_i) + K_{\alpha_i} \sqrt{D(b_i)}.$$

Випадок 3. Тепер припустимо, що всі параметри a_{ij} і b_i є нормально розподілені випадкові величини. Перепишемо обмеження

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

у вигляді

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0.$$

Так як всі a_{ij} і b_i розподілені за нормальним законом, у відповідності з відомими результатами математичної статистики величина $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i$ також має нормальний розподіл. Звідси випливає, що цей варіант подібний до випадку 1 і може бути розглянутий аналогічним чином.

Приклад 9.2. Розглянемо задачу з імовірнісними обмеженнями

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq 0,95, \quad ,$$

$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq 0,90, \quad ,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Нехай a_{1j} – незалежні нормально розподілені випадкові величини з наступними значеннями математичних сподівань і дисперсій

$$M(a_{11}) = 1, \quad M(a_{12}) = 3, \quad M(a_{13}) = 9,$$

$$D(a_{11}) = 25, \quad D(a_{12}) = 16, \quad D(a_{13}) = 4.$$

Нехай параметр b_2 є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $M(b_2) = 7$ і дисперсією $D(b_2) = 9$.

Розв'язання. За таблицею функції розподілу стандартного нормального закону знаходимо

$$K_{\alpha 1} = K_{0,05} = 1,645, \quad K_{\alpha 2} = K_{0,10} = 1,285.$$

Зауваження. Можна скористатися таблицею функції Лапласа $\Phi(z)$ (Додаток Б), так як $F(z) = 0,5 + \Phi(z)$.

Перше обмеження задачі еквівалентне детермінованій нерівності

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1,645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8,$$

а друге обмеження – нерівності

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1,285 \cdot 3 = 10,855.$$

Якщо покласти

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2,$$

вихідна задача приймає наступний вигляд.

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1,645y \leq 8,$$

$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0,$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10,855,$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0,$$

і може бути розв'язана методами сепарабельного програмування.

9.3. ІМОВІРНІСНЕ ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Імовірнісне динамічне програмування відрізняється від детермінованого динамічного програмування, описаного у розділі 9, тим, що стани і показник ефективності (цільова функція) на кожному етапі є випадковими величинами. Моделі імовірнісного динамічного програмування виникають, зокрема, при розгляданні стохастичних моделей управління запасами і в теорії марковських процесів прийняття рішень. Ці дві теми детально розглядаються у курсі дослідження операцій, тому у цьому параграфі вони не розглядаються. В цьому параграфі описуються два приклади достатньо загального змісту, які розкривають стохастичну природу динамічного програмування.

Задача інвестування.

Дехто планує інвестувати S тисяч у. г. од. через фондову біржу протягом наступних n років. Інвестиційний план полягає у покупці акцій на початку року і продажі їх в кінці цього ж року. Накопичені кошти потім можуть бути знову інвестовані (всі або частина їх) на початку наступного року. Степінь ризику інвестиції характеризується тим, що прибуток має імовірнісний характер. Вивчення ринку свідчить про те, що прибуток від інвестиції залежить від m умов ринку (сприятливих або несприятливих). При цьому умова k приводить до прибутку r_k з імовірністю p_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Як треба інвестувати S тисяч у. г. од. для найбільшого накопичення на кінець n -го року?

Позначимо:

x_i – сума грошових коштів, які доступні для інвестування на початку i -го року ($x_1 = S$);

y_i – сума реальної інвестиції на початку i -го року ($y_i \leq x_i$).

Елементи моделі динамічного програмування можна описати так:

1. *Етап i* являє собою i -й рік інвестування.
2. *Альтернативами* на етапі i є величини y_i .

3. Стан системи на етапі i описується величиною x_i .

Нехай $f_i(x_i)$ – максимальна очікувана сума надходження грошових коштів за роки від i до n при умові, що на початку i -го року є сума x_i .

Для k -ї умови ринку маємо наступне:

$$x_{i+1} = (1 + r_k)y_i + (x_i - y_i) = r_k y_i + x_i, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Так як імовірність k -ї умови ринку дорівнює p_k , рекурентне рівняння динамічного програмування має наступний вигляд:

$$f_i(x_i) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^m p_k f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}$, так як після n -го року інвестицій немає. Звідси випливає, що

$$f_n(x_n) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^m p_k (x_n + r_k y_n) \right\} = x_n \sum_{k=1}^m p_k (1 + r_k) = x_n (1 + p_1 r_1 + p_2 r_2 + \dots + p_m r_m),$$

оскільки функція у фігурних дужках є лінійною по y_n і тому досягає свого максимуму при $y_n = x_n$. Крім того врахована очевидна рівність

$$\sum_{k=1}^m p_k = 1.$$

Приклад 9.3. Нехай у попередній моделі об'єм інвестицій складає $S = 10\,000$ у. г. о. на 4-річний період. Існує 40%-ва імовірність того, що ви подвоїте гроші, 20%-ва – залишитесь при своїх грошах і 40%-ва – втратите весь об'єм інвестиції. Треба розробити оптимальну стратегію інвестування.

Розв'язання. Використовуючи прийняті в моделі позначення, маємо наступне:

$$S = 10000; \quad n = 4; \quad m = 3;$$

$$p_1 = 0,4; \quad p_2 = 0,2; \quad p_3 = 0,4;$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = -1.$$

Етап 4.

$$f_4(x_4) = x_4 (1 + 0,4 \cdot 2 + 0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot (-1)) = 1,4x_4.$$

Звідки отримуємо

Таблиця 9.2

Стан	Оптимальний розв'язок	
	$f_4(x_4)$	y_4^*
x_4	$1,4x_4$	x_4

Етап 3.

$$\begin{aligned}
 f_3(x_3) &= \max_y \{p_1 f_4(x_3 + r_1 y_3) + p_2 f_4(x_3 + r_2 y_3) + p_3 f_4(x_3 + r_3 y_3)\} = \\
 &= \max_y \{0,4 \cdot 1,4(x_3 + 2y_3) + 0,2 \cdot 1,4(x_3 + 0y_3) + 0,4 \cdot 1,4(x_3 + (-1)y_3)\} = \\
 &= \max_y \{1,4x_3 + 0,56y_3\} = 1,96x_3.
 \end{aligned}$$

Тому маємо

Таблиця 9.3

Стан	Оптимальний розв'язок	
	$f_3(x_3)$	y_3^*
x_3	$1,96x_3$	x_3

Етап 2.

$$\begin{aligned}
 f_2(x_2) &= \max_y \{p_1 f_3(x_2 + r_1 y_2) + p_2 f_3(x_2 + r_2 y_2) + p_3 f_3(x_2 + r_3 y_2)\} = \\
 &= \max_y \{0,4 \cdot 1,96(x_2 + 2y_2) + 0,2 \cdot 1,96(x_2 + 0y_2) + 0,4 \cdot 1,96(x_2 + (-1)y_2)\} = \\
 &= \max_y \{1,96x_2 + 0,784y_2\} = 2,744x_2.
 \end{aligned}$$

Звідки випливає

Таблиця 9.4

Стан	Оптимальний розв'язок	
	$f_2(x_2)$	y_2^*
x_2	$2,744x_2$	x_2

Етап 1.

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \max_y \{p_1 f_2(x_1 + r_1 y_1) + p_2 f_2(x_1 + r_2 y_1) + p_3 f_2(x_1 + r_3 y_1)\} = \\ &= \max_y \{0,4 \cdot 2,744(x_1 + 2y_1) + 0,2 \cdot 2,744(x_1 + 0y_1) + 0,4 \cdot 2,744(x_1 + (-1)y_1)\} = \\ &= \max_y \{2,744x_1 + 1,0976y_1\} = 3,8416x_1. \end{aligned}$$

Маємо

Таблиця 9.5

Стан	Оптимальний розв'язок	
	$f_1(x_1)$	y_1^*
x_1	$3,8416x_1$	x_1

Оптимальну інвестиційну політику можна сформулювати наступним чином. Так як $y_i^* = x_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то оптимальним розв'язком є інвестування всіх наявних грошових коштів на початку кожного року. Накопичені грошові кошти на кінець чотирьох років складатиме $3,8416x_1 = 3,8416S = 3,8416 \cdot 10000 = 38416$ у. г. о.

Максимізація імовірності досягнення мети.

У попередньому прикладі розглядалась задача, пов'язана з максимізацією очікуваного доходу. Іншим корисним критерієм для розглянутої задачі є максимізація імовірності досягнення певного рівня доходу. Продемонструємо цей підхід на прикладі моделі інвестування, яка описана у попередньому прикладі.

Використовуючи введені вище позначення, залишимо без змін визначення *етапу* i , *альтернативи* y_i і *стану* x_i . Ці моделі відрізняються лише визначенням критерію. Тут нашою метою є максимізація імовірності досягнення деякої накопиченої суми C після закінчення n років. З цієї точки зору визначимо функцію $f_i(x_i)$ як імовірність накопичення суми C , якщо на початку i -го року є грошові кошти у розмірі x_i і для наступних років застосовується оптимальне інвестування.

Рекурентне рівняння динамічного програмування має вигляд

$$f_n(x_n) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^m p_k P\{x_n + r_k y_n \geq C\} \right\},$$

$$f_i(x_i) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^m p_k f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Рекурентна формула основана на формулі умовної імовірності

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^m P\{A | B_j\} \cdot P\{B_j\}.$$

У нашому випадку $f_{i+1}(x_i + r_k y_i)$ відіграє роль імовірності $P\{A | B_j\}$.

Приклад 9.4. Дехто планує інвестувати 2 000 євро. Існуючі варіанти дозволяють подвоїти цю суму з імовірністю 0,3 або втратити її з імовірністю 0,7. Акції продаються в кінці року, а на початку наступного року всі гроші або їх частина знову інвестуються. Цей процес повторюється протягом трьох років. Метою є максимізація імовірності досягнення суми у 4 000 євро на кінець третього року.

Розв'язання. У відповідності з позначеннями даної моделі, маємо $r_1 = 1$ з імовірністю 0,3 і $r_2 = -1$ з імовірністю 0,7.

Етап 3.

На цьому етапі стан x_3 може змінюватись від 0 до 8 000 євро (від 0 до 8 тис.). Мінімальне значення можливе, коли вся інвестиція втрачена, а максимальне – коли інвестиція подвоюється в кінці кожного з двох перших років. Отже, рекурентне рівняння для етапу 3 записується в наступному вигляді:

$$f_3(x_3) = \max_y \{0,3P\{x_3 + y_3 \geq 4\} + 0,7P\{x_3 - y_3 \geq 4\}\},$$

де $x_3 = 0, 1, \dots, 8$.

Таблиця 10.6 містить деталі обчислень для даного етапу. Всі замальовані комірки таблиці є невідповідними, так як не задовольняють умову $y_3 \leq x_3$. Крім того, при виконанні обчислень можна помітити, що

$$P\{x_3 + y_3 \geq 4\} = 0, \quad \text{якщо } x_3 + y_3 < 4,$$

$$P\{x_3 - y_3 \geq 4\} = 0, \text{ якщо } x_3 - y_3 < 4.$$

У протилежному випадку ці імовірності дорівнюють одиниці.

Хоч наведена таблиця 10.6 і свідчить про те, що існують альтернативні оптимуми для $x_3 = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, оптимальний (останній) стовпець містить лише найменше оптимальне значення y_3 . Це пояснюється тим, що інвестор не збирається інвестувати більше того, що необхідно для досягнення поставленої мети.

Таблиця 9.6

x_3	$0,3P\{x_3 + y_3 \geq 4\} + 0,7P\{x_3 - y_3 \geq 4\}$									Оптимум	
	$y_3 = 0$	$y_3 = 1$	$y_3 = 2$	$y_3 = 3$	$y_3 = 4$	$y_3 = 5$	$y_3 = 6$	$y_3 = 7$	$y_3 = 8$	f_3	y_3
0	0,3·0+ 0,7·0=0									0	0
1	0,3·0+ 0,7·0=0	0,3·0+ 0,7·0=0								0	0
2	0,3·0+ 0,7·0=0	0,3·0+ 0,7·0=0	0,3·1+ 0,7·0=0,3							0,3	2
3	0,3·0+ 0,7·0=0	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3						0,3	1
4	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3					1	0
5	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3				1	0
6	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3			1	0
7	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3		1	0
8	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·1=1	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	0,3·1+ 0,7·0=0,3	1	0

Етап 2.

$$f_2(x_2) = \max_y \{0,3f_3(x_2 + y_2) + 0,7f_3(x_2 - y_2)\}.$$

Таблиця 9.7

x_2	$0,3f_3(x_2 + y_2) + 0,7f_3(x_2 - y_2)$					Оптимум		
	$y_2 = 0$	$y_2 = 1$	$y_2 = 2$	$y_2 = 3$	$y_2 = 4$	f_2	y_2	
0	$0,3 \cdot 0 +$					0	0	
	$0,7 \cdot 0 = 0$							
1	$0,3 \cdot 0 +$	$0,3 \cdot 0,3 +$				0,09	1	
	$0,7 \cdot 0 = 0$	$0,7 \cdot 0 = 0,09$						
2	$0,3 \cdot 0,3 +$	$0,3 \cdot 0,3 +$	$0,3 \cdot 1 +$			0,30	0	
	$0,7 \cdot 0,3 = 0,3$	$0,7 \cdot 0 = 0,09$	$0,7 \cdot 0 = 0,3$					
3	$0,3 \cdot 0,3 +$	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$			0,51	1
	$0,7 \cdot 0,3 = 0,3$	$0,7 \cdot 0,3 = 0,51$	$0,7 \cdot 0 = 0,3$	$0,7 \cdot 0 = 0,3$				
4	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$	$0,3 \cdot 1 +$	1	0	
	$0,7 \cdot 1 = 1$	$0,7 \cdot 0,3 = 0,51$	$0,7 \cdot 0,3 = 0,51$	$0,7 \cdot 0 = 0,3$	$0,7 \cdot 0 = 0,3$			

Етап 1.

$$f_1(x_1) = \max_y \{0,3f_2(x_1 + y_1) + 0,7f_2(x_1 - y_1)\}.$$

Таблиця 9.8

x_1	$0,3f_2(x_1 + y_1) + 0,7f_2(x_1 - y_1)$			Оптимум	
	$y_1 = 0$	$y_1 = 1$	$y_1 = 2$	f_1	y_1
2	$0,3 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,3$	$0,3 \cdot 0,51 + 0,7 \cdot 0,09 = 0,216$	$0,3 \cdot 1 + 0,7 \cdot 0 = 0,3$	0,3	0

Оптимальна стратегія визначається наступним чином. При заданій початковій сумі $x_1 = 2000$ євро обчислення для першого етапу дають $y_1 = 0$. Це означає, що у перший рік не слід робити інвестицій. Дане рішення залишає інвестора з 2 000 євро на початок другого року. З таблиці 10.8, яка відповідає другому етапу, при $x_2 = 2$ отримуємо $y_2 = 0$. Це

знову означає, що протягом другого року також не слід робити інвестицій. Далі використання значення $x_3 = 2$ на третьому етапі приводить до $y_3 = 2$, а це означає, що на третій рік слід інвестувати всю суму, яка є в наявності. Відповідна максимальна імовірність досягнення мети $C = 4$ дорівнює $f_1(2) = 0,3$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сутність задач стохастичного програмування.
2. Типи стохастичних задач, їх особливості та формулювання.
3. Методи розв'язування стохастичних задач.
4. Приклади задач стохастичного динамічного програмування.

ВПРАВИ

- 9.1. Відомо, що в комерційних банках нараховується більший процент на вкладені суми порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати меншу, але гарантовану суму, або більшу, проте з ризиком втрати внеску. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок до ощадного банку. Нехай S – загальна сума грошових коштів певного власника, a, b – процент нарахування відповідно в ощадному і комерційному банках, p – імовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку. Запишіть математичну модель задачі.
- 9.2. Для виготовлення виробів двох видів ($j = 1, 2$) можна використати обладнання двох груп ($i = 1, 2$); a_{ij} – витрати часу цими групами обладнання на виготовлення одиниці продукції певного виду. Собівартість одного виробу b_{ij} є випадковою величиною, яка розподілена рівномірно в інтервалі $(\gamma_{ij}, \delta_{ij})$. Нехай $N_1 = 100$ шт., $N_2 = 200$ шт. – плани випуску продукції, що обумовлені контрактом.
- Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск виробів, якщо ризик невиконання контракту не перевищує 0,05.
- Побудувати математичну модель задачі і розв'язати її для даних, наведених у таблиці 9.9.

Таблиця 9.9

Група облад- нання i	Питомі витрати часу, год/шт.		Питома собівартість виробу, грн/шт.				Фонд ро- бочого часу, год.
	$j=1$	$j=2$	$j=1$		$j=2$		
	a_{i1}	a_{i2}	γ_{i1}	δ_{i1}	γ_{i2}	δ_{i2}	
1	0,2	0,3	2	4	1	2	50
2	0,1	0,1	3	6	2	8	65

9.3. Приведіть наступну задачу стохастичного програмування до еквівалентної детермінованої моделі.

$$z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \leq 10\} \geq 0,9;$$

$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_2\} \geq 0,1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Нехай a_1 і a_3 є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з математичними сподіваннями $M(a_1) = 2$ і $M(a_3) = 5$ та дисперсіями $D(a_1) = 9$ і $D(a_3) = 16$. Передбачається також, що b_2 – нормально розподілена величина з математичним сподіванням $M(b_2) = 15$ і дисперсією $D(b_2) = 25$.

9.4. Дана наступна задача стохастичного програмування.

$$z = x_1 + x_2^2 + x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \leq 10\} \geq 0,9;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Нехай параметри a_2 і a_3 – незалежні нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями 5 і 2 та дисперсіями 16 і 25 відповідно. Приведіть дану задачу до детермінованої задачі сепарабельного програмування.

9.5. Деталі А, В, С, ($j = 1, 2, 3$) можна обробляти на трьох верстатах ($i = 1, 2, 3$). Припустимо, що норми витрат часу на обробку j -ї деталі на i -му верстаті випадкові та розподілені згідно з рівномірним законом у інтервалі $(\gamma_{ij}, \delta_{ij})$, ціна j -ї деталі C_j – також випадкова величина, що розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням $M(C_j)$ та дисперсією $D(C_j)$. Значення величин наведено в таблицях 9.10 та 9.11. Нехай будь-яка деталь може бути виготовлена на будь-якому верстаті.

Визначити оптимальну виробничу програму, яка забезпечує виконання таких умов;

- максимум сподіваної вартості товарної продукції за мінімального ризику;
- максимум сподіваного сумарного прибутку за мінімального ризику.

Таблиця 9.10

Верстат i	Норми часу на обробку деталі						Плата за 1 год. роботи верстата	Ліміт часу ро- боти верстата
	А		В		С			
	γ_{i1}	δ_{i1}	γ_{i2}	δ_{i2}	γ_{i3}	δ_{i3}		
1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,05	0,1	30 000	40
2	0,6	1,0	0,1	0,3	0,1	0,4	10 000	50
3	0,2	0,5	0,2	0,4	0,2	0,5	20 000	60

Таблиця 9.11

Характеристика	Ціна деталі		
	А	В	С
$M(C_j)$	10	16	12
$D(C_j)$	5	10	8

9.6. Визначіть оптимальну інвестиційну політику в прикладі 9.3 у припущенні, що імовірності p_k і прибутки r_k для наступних чотирьох років приймають такі значення наведені у таблиці 9.12.

Таблиця 9.12

Рік	r_1	r_2	r_3	p_1	p_2	p_3
1	2	1	0,5	0,1	0,4	0,5
2	1	0	-1	0,4	0,4	0,2
3	4	-1	-1	0,2	0,4	0,4
4	0,8	0,4	0,2	0,6	0,2	0,2

9.7. Камера об'ємом 10 кубічних метрів призначена для зберігання виробів трьох найменувань. Один виріб найменувань A , B , C займає відповідно 2, 1 і 3 кубічних метри. Імовірність попиту на ці вироби приведені в таблиці 9.13

Таблиця 9.13

Кількість одиниць	Імовірність попиту		
	Найменування А	Найменування В	Найменування С
1	0,5	0,3	0,3
2	0,5	0,4	0,2
3	0,0	0,2	0,5
4	0,0	0,1	0,0

Вартість зберігання одиниці виробів найменувань A , B , C складає 48, 60 і 90 грн. відповідно. Скільки одиниць виробів кожного найменування слід зберігати у камері?

РОЗДІЛ 10

ДЕТЕРМІНОВАНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Як у бізнесі, так й у виробництві звичайно прийнято підтримувати розумний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Традиційно запас розглядається як неминучі витрати, коли занадто низький рівень запасу призводить до дорогоцінних зупинок виробництва, а занадто високий до „омертвіння” капіталу. Задача управління запасами визначає рівень запасу, який урівноважує два розглянутих граничних випадки.

Важливим фактором, який визначає формулювання та розв’язання задачі управління запасами, є те, що об’єм попиту на запас, який зберігається (в одиницю часу) може бути або *детермінованим* (достовірно відомим), або *стохастичним* (описаним імовірнісним розподілом). У цьому розділі розглядаються детерміновані моделі управління запасами.

10.1. УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Природа задачі управління запасами визначається неодноразовим розміщенням та отриманням замовлень заданих об’ємів продукції (у подальшому – запаси, які зберігаються) у певні моменти часу. З цієї точки зору ***стратегія управління запасами*** повинна давати відповідь на наступні два питання:

1. Яку кількість запасу, який зберігається, замовляти?
2. Коли замовляти?

Відповідь на перше питання визначає *економічний розмір замовлення* шляхом мінімізації наступної функції витрат:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Сумарні витрати системи} \\ \text{управління запасами} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Витрати на} \\ \text{придбання} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Організаційні} \\ \text{витрати} \end{array} \right) + \\ + \left(\begin{array}{c} \text{Витрати на} \\ \text{зберігання запасу} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Втрати від} \\ \text{дефіциту запасу} \end{array} \right).$$

Всі ці вартості повинні бути виражені як функції шуканого об'єму замовлення та інтервалу часу між замовленнями.

1. *Витрати на придбання* визначаються вартістю одиниці продукції (запасу, який зберігається). Ця вартість може бути сталою або із скидкою, яка залежить від об'єму замовлення.
2. *Організаційні витрати* являють собою сталі витрати, які пов'язані з оформленням та доставкою продукції. Найчастіше ці витрати не залежать від об'єму замовлення.
3. *Витрати на зберігання запасу* являють собою витрати, які пов'язані із зберіганням на складі. Цей вид витрат містить як відсоток на інвестиційний капітал, так і вартість збереження, утримання і догляду.
4. *Втрати від дефіциту запасу* – це втрати, які обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції. Вони містять як потенційні втрати прибутку, так і більш суб'єктивну вартість, яка пов'язана з втратою довіри клієнтів.

Відповідь на друге питання (коли замовляти?) залежить від типу системи управління запасами, яка розглядається. Якщо система передбачає *періодичний контроль* стану запасу (наприклад, щотижневий, або щомісячний), момент надходження нового замовлення співпадає з початком періоду. Якщо ж в системі передбачений *неперервний контроль* стану запасу, нові замовлення розміщуються тоді, коли рівень запасу опускається до заздалегідь визначеного значення, яке називається *точкою поновлення замовлення*.

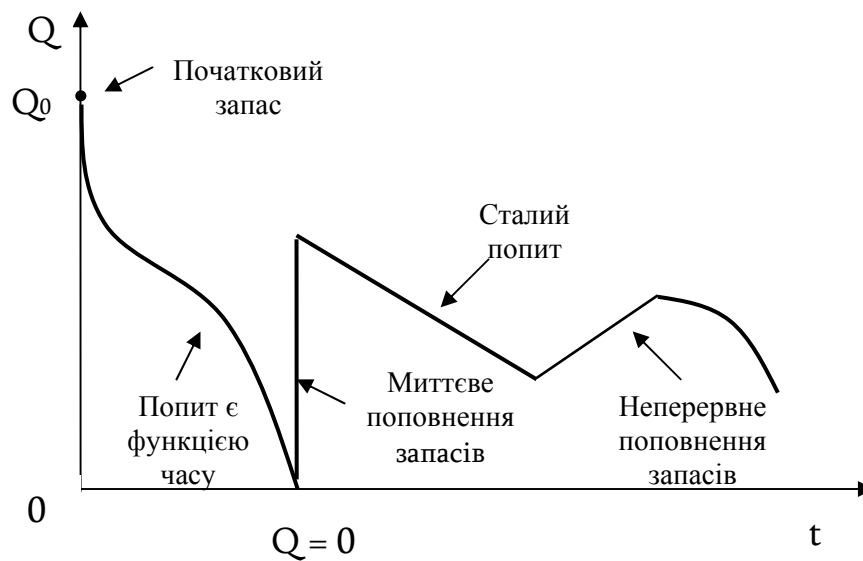


Рис. 10.1

Моделі управління запасами охоплюють два типи детермінованих моделей: *статичні* та *динамічні*. В статичних моделях розглядаються ситуації, коли об'єм попиту на продукцію, яка зберігається (запас), є сталим у часі. В динамічних моделях об'єм попиту є функцією часу. На рис. 10.1. подані можливі графіки зміни запасу Q , який є на складі, у часі t .

10.2. КЛАСИЧНА ЗАДАЧА ЕКОНОМІЧНОГО РОЗМІРУ ЗАМОВЛЕННЯ

Найпростіші моделі управління запасами характеризуються сталим у часі попитом, миттєвими поповненнями запасу та відсутністю дефіциту.

Введемо позначення:

q – об'єм замовлення (кількість одиниць продукції);

v – інтенсивність попиту (вимірюються в одиницях продукції на одиницю часу);

b – організаційні витрати (сталі витрати, які не залежать від розміру замовлення, вимірюються у грошових одиницях);

s – вартість продукції (розглядається один вид продукції, ціна одиниці якої стала);

h – витрати на зберігання (витрати на одиницю продукції, яка зберігається, в одиницю часу);

t_0 – тривалість циклу замовлення (вимірюється у часових одиницях).

Рівень запасу змінюється згідно з функцією, графік якої зображений на рис. 10.2. Замовлення об'єму q розміщується та поповнюється миттєво, коли рівень запасу дорівнює нулю. Потім запас рівномірно витрачається з сталою інтенсивністю попиту v .

Тривалість циклу замовлення для цього прикладу дорівнює

$$t_0 = \frac{q}{v}.$$

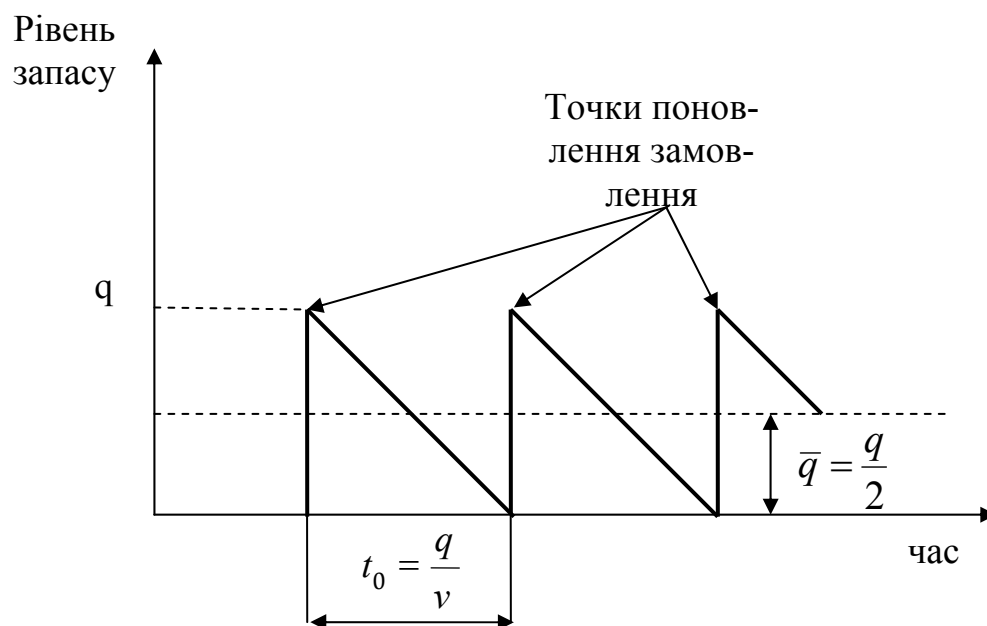


Рис. 10.2

Середній рівень запасу визначається співвідношенням

$$\bar{q} = \frac{q}{2}.$$

Сумарні витрати в одиницю часу можна представити як функцію від q у наступному вигляді

$$c(q) = c_1 + c_2 + c_3 = \frac{b + sv t_0 + h \left(\frac{q}{2} \right) t_0}{t_0} = \frac{b}{t_0} + sv + \frac{hq}{2} = \frac{bv}{q} + sv + \frac{hq}{2},$$

де c_1 – організаційні витрати в одиницю часу;

c_2 – вартість замовленої продукції в одиницю часу;

c_3 – витрати на зберігання запасу в одиницю часу.

Оптимальне значення об'єму замовлення q визначається шляхом мінімізації за q функції $c(q)$.

Припускаючи, що q є неперервною змінною, отримуємо необхідну умову мінімуму

$$\frac{dc(q)}{dq} = -\frac{bv}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Вказана умова є також й достатньою, так як функція $c(q)$ опукла.

Розв'язок даного рівняння визначає економічний об'єм замовлення

$$q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}}.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами розглянутої моделі формулюється наступним чином: замовляти $q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}}$ одиниць

продукції через кожні $t_0^* = \frac{q^*}{v}$ одиниць часу.

В дійсності поповнення запасу не може відбуватися миттєво у момент розміщення замовлення, як передбачалось раніше. Для більшості реальних ситуацій існує *термін виконання* замовлення L (часове запізнення) від моменту його розміщення до реального постачання, як показано на рис. 10.3. У цьому випадку точка поновлення замовлення має місце, коли рівень запасу знижується до $L \cdot v$ одиниць.

На рис. 10.3. показано зміну рівня запасу в часі у припущенні, що термін виконання замовлення L менше тривалості циклу замовлення t_0^* , що у загальному випадку виконується не завжди. У протилежному випадку ($L > t_0^*$) визначається *ефективний* термін L_e виконання замовлення у вигляді

$$L_e = L - nt_0^*,$$

де n - найбільше натуральне число, що не перевищує $\frac{L}{t_0^*}$, тобто

$n = \left[\frac{L}{t_0^*} \right]$ - ціла частина числа. Таке рішення виправдано тим, що після n

циклів (тривалістю t_0^* кожний) ситуація управління запасами стає такою, якщо б інтервал між розміщенням одного замовлення та отриманням іншого дорівнював L_e .

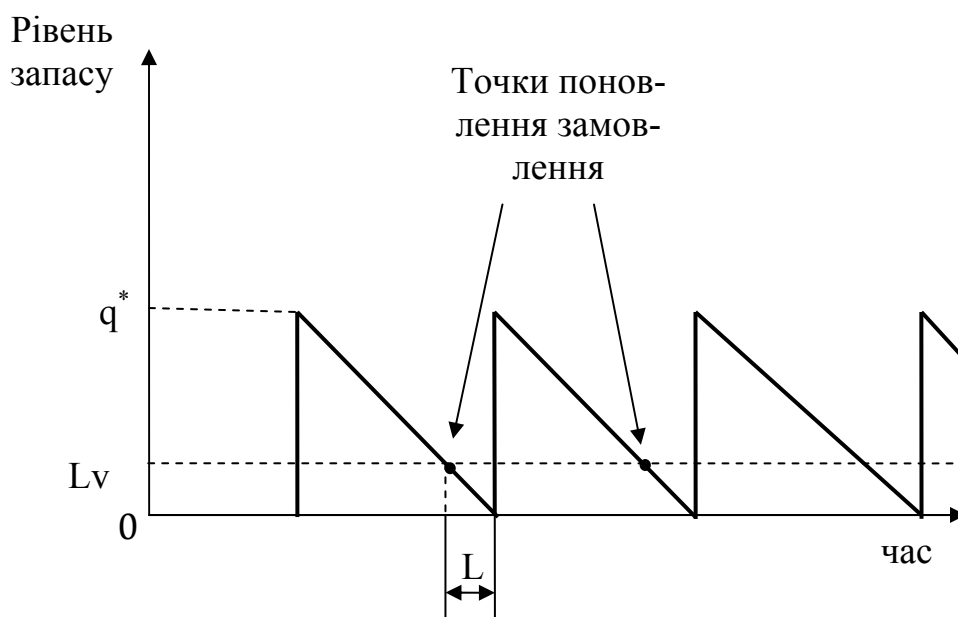


Рис. 10.3

Отже, точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу $L_e v$ одиниць продукції та стратегія управління запасами може бути сформульована наступним чином:

замовляти q^* одиниць продукції, як тільки рівень запасу знизиться до $L_e v$ одиниць.

Приклад 10.1.

Неонові лампи замовляються на оптовому складі з інтенсивністю 100 шт. на добу. Адміністрація складу замовляє ці лампи з певною періодичністю. Вартість розміщення замовлення на закупівлю ламп складає 100 у.г.о. Вартість зберігання однієї лампи на складі оцінюється в 0,02 у.г.о. на добу. Термін виконання замовлення від моменту його розміщення до реального постачання дорівнює 12 діб. Треба визначити оптимальну стратегію замовлення неонових ламп.

Розв'язання. На основі наведених даних маємо наступне:

$v = 100$ одиниць на добу

$b = 100$ у.г.о. за замовлення

$h = 0,02$ у.г.о. за зберігання однієї лампи на добу

$L = 12$ діб.

Отже,

$$q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000 (\text{лампи})$$

Відповідна тривалість циклу складає

$$t_0^* = \frac{q^*}{v} = \frac{1000}{100} = 10 (\text{днів}).$$

Так як термін виконання замовлення $L = 12$ діб перебільшує тривалість циклу $t_0^* = 10$ діб, необхідно обчислити L_e .

$$n = \left[\frac{L}{t_0^*} \right] = \left[\frac{12}{10} \right] = [1,2] = 1.$$

Отже,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \cdot 10 = 2 (\text{добу}).$$

Тому точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу

$$L_e v = 2 \cdot 100 = 200 (\text{лампи}).$$

Оптимальна стратегія замовлення неонових ламп може бути сформульована наступним чином:

замовляти 1000 ламп, як тільки рівень їх запасу зменшується до 200 одиниць.

Добові витрати, які пов'язані із збереженням запасу відповідно до оптимальної стратегії, дорівнюють

$$c(q^*) = \frac{bv}{q} + \frac{hq}{2} = \frac{100 \cdot 100}{1000} + \frac{0,02 \cdot 1000}{2} = 20(\text{y.z.o.})$$

10.3. ЗАДАЧА ЕКОНОМІЧНОГО РОЗМІЩЕННЯ ЗАМОВЛЕННЯ З РОЗРИВАМИ ЦІН

Представлена у цьому підрозділі модель управління запасами відрізняється від розглянутої у попередньому підрозділі 1.2 тим, що продукція може бути придбана зі знижкою, якщо об'єм замовлення q перевищує деякий фіксований рівень y . Таким чином, ціна одиниці продукції S визначається як

$$S = \begin{cases} S_1, & \text{якщо } q \leq y, \\ S_2, & \text{якщо } q > y, \end{cases}$$

де $S_1 > S_2$.

Отже, витрати на придбання продукції в одиницю часу дорівнюють

$$c_2 = \begin{cases} \frac{S_1 q}{t_0} = vS_1, & q \leq y \\ \frac{S_2 q}{t_0} = vS_2, & q > y \end{cases}.$$

Запишемо загальні витрати в одиницю часу наступним чином:

$$c(q) = \begin{cases} c_1(q) = vS_1 + \frac{bv}{q} + \frac{hq}{2} \\ c_2(q) = vS_2 + \frac{bv}{q} + \frac{hq}{2} \end{cases}.$$

Графіки функцій $c_1(q)$ та $c_2(q)$ подані на рис.10.4. Так як значення цих функцій відрізняються тільки на сталу величину $v(S_1 - S_2)$, то точки їх мінімуму співпадають та знаходяться у точці

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}}.$$

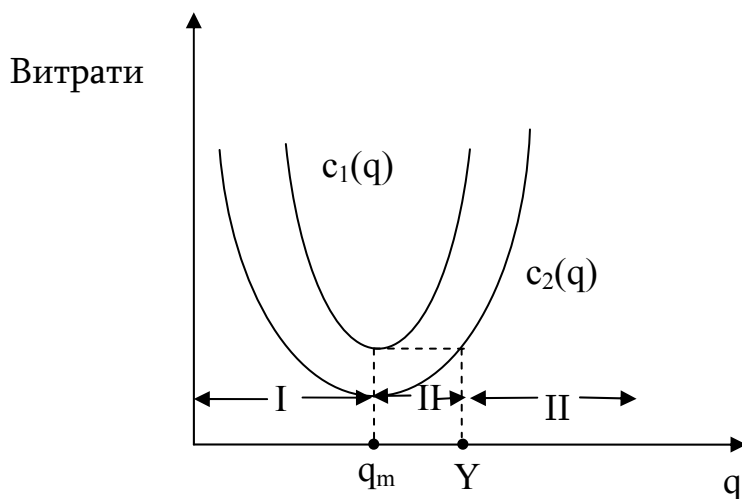
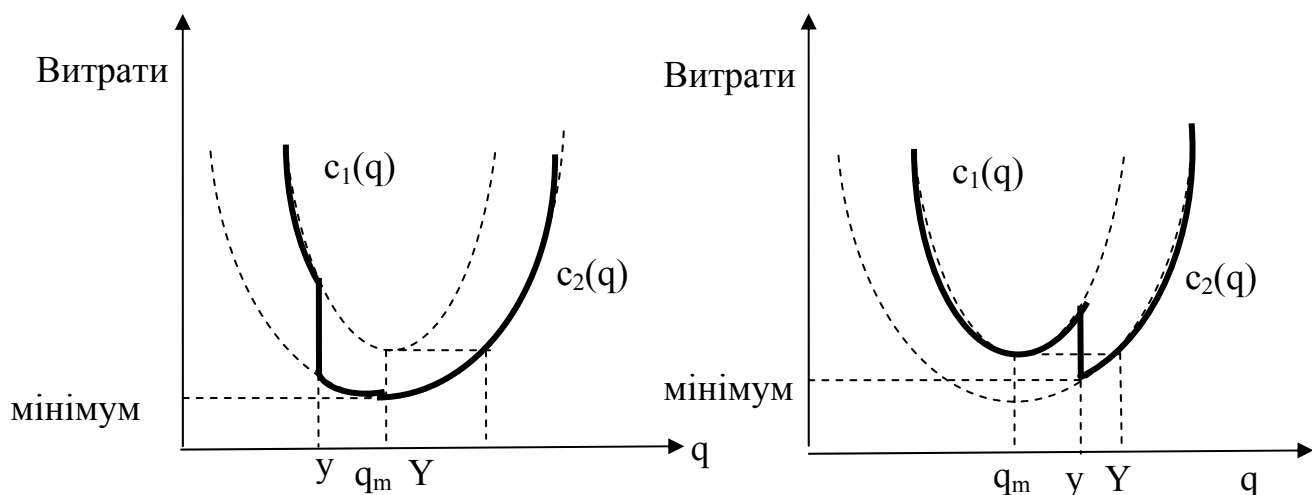


Рис. 10.4

Графік функції витрат $c(q)$, якщо йти від менших значень аргументу q , співпадає з графіком функції $c_1(q)$ до точки $q = y$, в якій змінюється ціна продукції, а потім співпадає з графіком функції $c_2(q)$. Рис.10.4. показує, що визначення оптимального об'єму замовлення q^* залежить від того, де знаходиться точка розриву ціни y по відношенню до q_m (вказаним на рис.10.4. областям I, II, та III, які визначені як інтервали $[0, q_m)$, $[q_m, Y)$ та $[Y, \infty)$ відповідно).

Величина $Y > q_m$ визначається з рівняння $c_2(Y) = c_1(q_m)$.

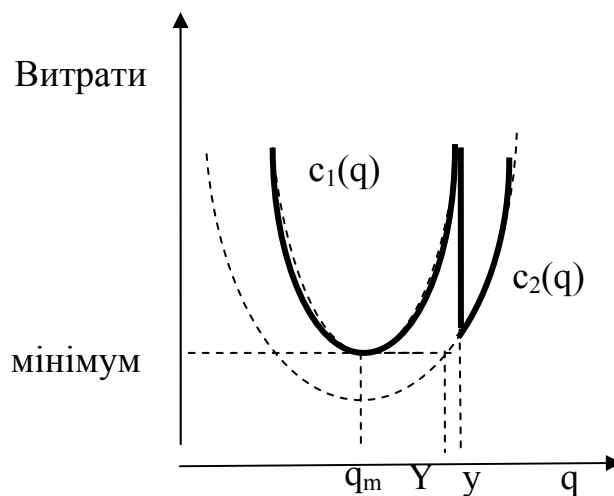


Випадок 1: y в області I,

Випадок 2: y в області II,

$$q^* = q_m$$

$$q^* = y$$



Випадок 3: y в області III,

$$q^* = q_m$$

Рис. 10.5

Рис. 10.5. показує, як визначається оптимальне значення q^* :

$$q^* = \begin{cases} q_m, & \text{якщо } y \text{ знаходиться в області I або III} \\ y, & \text{якщо } y \text{ знаходиться в області II} \end{cases}$$

Приклад 10.2.

Фірма, яка виготовляє деякий виріб, закуповує у великій кількості основну сировину по 3 у.г.о. за 1 кг. Ціна може бути знижена до 2,5 у.г.о. за 1 кг при умові, що фірма закуповує більше 1000 кг. За день виготовляється біля 150 виробів, і на кожен з них треба 1,25 кг сировини. На складі зберігаються великі об'єми сировини, що коштує 0,02 у.г.о. в день за 1 кг. Вартість розміщення замовлення на великий об'єм сировини складає 20 у.г.о. Термін виконання замовлення дорівнює 2 дні. Треба визначити оптимальну стратегію управління запасами.

Розв'язання. Витрати сировини за один день складають

$$v = 150 \cdot 1,25 = 187,5 (\text{кг} / \text{день}).$$

Також маємо

$$h = 0,02 \text{ у.г.о.} / (\text{кг} \cdot \text{день})$$

$$b = 20 \text{ у.г.о}$$

$$L = 2 \text{ дні}$$

$$S_1 = 3 \text{ у.г.о.} / \text{кг}$$

$$S_2 = 2,50 \text{ у.г.о.} / \text{кг}$$

$$y = 1000 \text{ кг}$$

Крок 1. Обчислюємо

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 187,5}{0,02}} = 612,37 (\text{кг})$$

Так, як $y = 1000$ більше $q_m = 612,37$, переходимо до кроку 2.

Крок 2. Знаходимо Y з рівняння

$$c_2(Y) = c_1(q_m)$$

$$S_2v + \frac{bv}{Y} + \frac{hY}{2} = S_1v + \frac{bv}{q_m} + \frac{hq_m}{2}$$

$$2,5 \cdot 187,5 + \frac{20 \cdot 187,5}{Y} + \frac{0,02Y}{2} = 3 \cdot 187,5 + \frac{20 \cdot 187,5}{612,37} + \frac{0,02 \cdot 612,37}{2}$$

Після спрощення маємо

$$0,01Y^2 - 106Y + 3750 = 0$$

Розв'язком цього рівняння при виконанні умови $Y > q_m$ буде

$$Y = 10564,5, \text{ що більше } q_m.$$

Отже, область II: $[612,37; 10564,5]$,

область III: $[10564,5; \infty]$.

Так як $y = 1000$ знаходиться в області II, то оптимальний об'єм замовлення дорівнює

$$q^* = y = 1000 \text{ кг}.$$

При заданому терміні виконання замовлення в 2 дні точкою поновлення замовлення є

$$2v = 2 \cdot 187,5 = 375 \text{ кг}.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами формулюється таким чином: замовляти 1000 кг сировини, коли рівень запасу зменшується до 375 кг.

10.4. МОДЕЛЬ ВИРОБНИЧИХ ПОСТАЧАНИЙ

В класичній моделі передбачалось, що надходження продукції на склад відбувається або миттєво або з деяким терміном запізнення відразу всього об'єму замовлення. Розглянемо випадок, коли продукція надходить на склад безпосередньо з виробничої лінії. Вважається, що надходження продукції відбувається неперервно. Модель задачі у цьому випадку називається моделлю *виробничих поставань*. Позначимо через p швидкість надходження продукції на склад. Ця величина дорівнює кількості товарів за одиницю часу.

Потрібно визначити оптимальний розмір продукції, який мінімізує загальні витрати.

Графік змін моделі виробничих постачань поданий на рис.10.6.

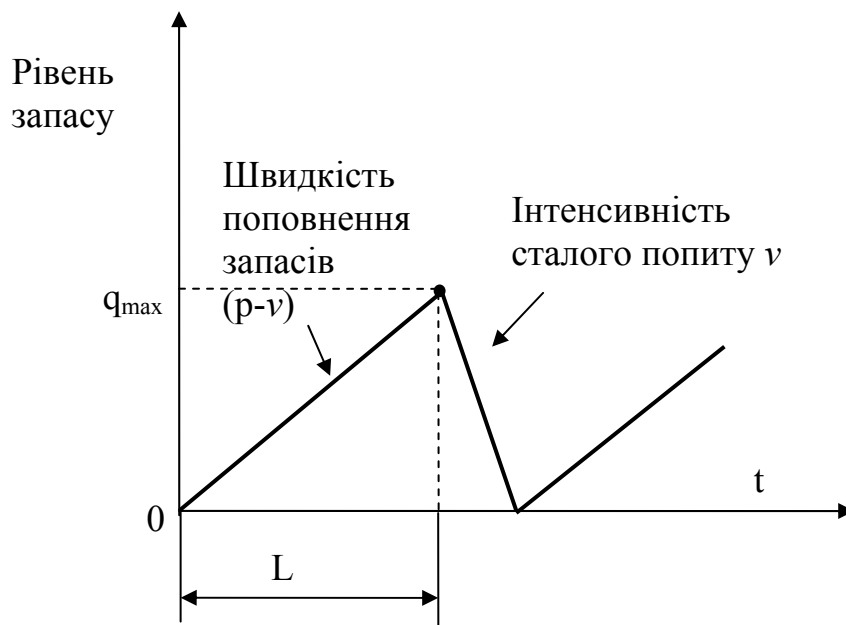


Рис. 10.6.

Загальні витрати за одиницю часу, як і для загальної задачі, складають

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$c_1 = \frac{bv}{q}, c_2 = Sv.$$

Для отримання середнього рівня запасів треба врахувати, що максимальний рівень запасів

$$q_{\max} = (p - v)L,$$

а $q = pL$ - кількість продукції, що постачається за один виробничий цикл.

Тоді середній рівень запасів складає половину максимального та дорівнює

$$\bar{q} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{(p - v)L}{2} = \frac{(p - v)q}{2p}$$

($L = \frac{q}{p}$ - тривалість постачання).

Отже,

$$c = \frac{bv}{q} + Sv + \frac{(p-v)h}{2p}q$$

Знаходячи розв'язок рівняння

$$\frac{dc}{dq} = 0,$$

отримуємо оптимальний розмір партії моделі виробничих поставчань:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-v)h}}.$$

Приклад 1.3.

Інтенсивність рівномірного попиту на телевізори, які випускаються фірмою, складає 2000 шт. у рік. Організаційні витрати дорівнюють 20 тис. грн. Ціна телевізора складає 1 тис. грн., витрати на зберігання дорівнюють 0,1 тис. грн. у розрахунку на один телевізор на рік. Запаси на складі поповнюються з швидкістю 4000 телевізорів у рік. Виробнича лінія починає діяти, як тільки рівень запасів на складі стає рівним нулю та продовжує працювати доти, доки не буде виготовлено q телевізорів.

Знайти розмір партії, яка мінімізує всі витрати. Визначити кількість поставчань протягом року, час тривалості постачання, тривалість циклу, максимальний рівень запасів при умові, що розмір партії оптимальний.

Розв'язання. Дана модель задачі є моделлю виробничих поставчань з наступними параметрами:

$$v = 2000 \text{ шт./рік}; b = 20 \text{ тис. грн.}; h = 0,1 \text{ тис. грн./шт. рік};$$

$$S = 1 \text{ тис. грн./шт.}; p = 4000 \text{ шт./рік}.$$

Графік зміни запасів поданий на рис.10.7.

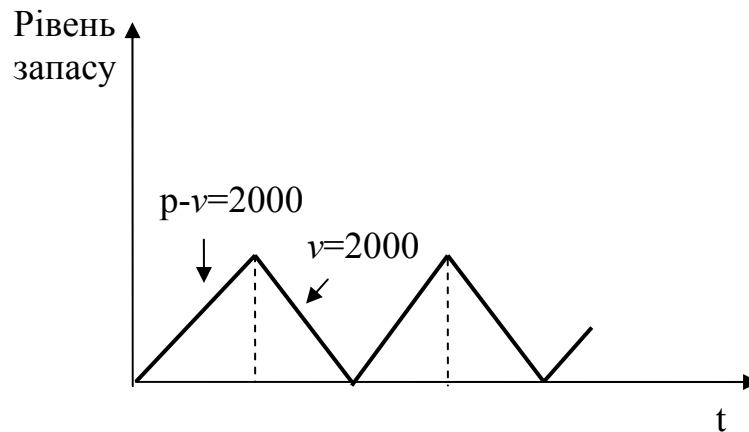


Рис. 10.7

Максимальний рівень запасів:

$$q_{\max} = \frac{(p-v)q}{p} = \frac{2000 \cdot q}{4000} = \frac{q}{2}$$

Середній рівень запасів:

$$\bar{q} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{q}{4}$$

Знайдемо оптимальні об'єми поставчань, тривалість поставчання, тривалість циклу.

$$q_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-v)h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000}{2000 \cdot 0,1}} = 1265 (\text{шт}).$$

Кількість партій за рік:

$$n = \frac{v}{q} = \frac{2000}{1265} \approx 1,58.$$

Тривалість поставчання:

$$L = \frac{q}{p} = \frac{1265}{4000} = 0,31625 (\text{років}) \approx 115 (\text{днів}).$$

Тривалість циклу:

$$t_0 = \frac{1}{n} = \frac{365}{1,6} \approx 231 (\text{день}).$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами полягає в наступному:

отримувати на склад 1265 телевізорів протягом 115 днів. Тривалість циклу – 231 день, а кількість поставчань протягом року – 1,58.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які моделі управління запасами називаються детермінованими? Які стохастичними?
2. У чому полягає стратегія управління запасами?
3. Типи детермінованих моделей управління запасами.
4. Основні характерні ознаки класичної задачі управління запасами.
5. Як залежить розв'язок задачі управління запасами від точки розриву цін?
6. Які задачі відносяться до моделі виробничих постачань?

ВПРАВИ

10.1. Протягом 10 днів спостерігалися наступні зміни запасів:

- початковий запас дорівнює нулю, а наступні дві доби товари надходили на склад неперервно і рівномірно по 500 шт. в день, витрати запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит на товари, що є в запасі був неперервним і рівномірним та дорівнював 250 шт. в день, поповнення запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит у товарах змінився до 200 шт. в день, з метою задоволення попиту і поповнення запасів кожного дня на склад доставлялось 300 шт. (постачання на склад і з складу проходили рівномірно і неперервно).

Накресліть графік зміни запасів для 10-деного періоду, визначте величину запасів на складі до кінця періоду. Вирахуйте середній рівень запасів для всього періоду.

10.2. Фірмі, яка займається будівництвом пароплавів, необхідно 20 000 заклепок у рік, які витрачаються з сталою інтенсивністю. Організаційні витрати складають 0,5 тис. грн. за партію, ціна однієї заклепки – 10 грн. Витрати на зберігання однієї заклепки оцінені у 12,5 % її вартості.

Знайти оптимальний розмір партії постачання, оптимальну тривалість циклу та оптимальну кількість постачань у рік.

10.3. Відомо, що витрати на виконання замовлення – 2 гр. од., кількість товару, який реалізується за рік – 1000 шт., закупівельна ціна одиниці товару – 5 гр. од., витрати на зберігання – 20 % від закупівельної ціни. Знайти найбільш оптимальний розмір замовлення.

10.4. Система управління запасами деякого товару описується основною моделлю. Кожен рік з сталою інтенсивністю попит складає 15 000 од. товару, витрати на організацію постачання складають 10 грн. на

партію, ціна одиниці товару – 30 грн., а витрати на її зберігання 7,5 грн. у рік. Знайти оптимальний розмір партії, кількість поставчань, тривалість циклу.

10.5. Інтенсивність рівномірного попиту – 2000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії – 20 тис. грн., ціна одиниці товару – 1 тис. грн., витрати на зберігання запасу – 100 грн. за од. товару у рік. Знайти оптимальний розмір партії, припускаючи, що система описується основною моделлю.

10.6. Відділ поставчання компанії запропонував дві стратегії управління запасами.

Стратегія 1. Об'єм замовлення 150 одиниць при точці поновлення замовлення в 50 одиниць та терміну виконання замовлення 10 днів.

Стратегія 2. Об'єм замовлення 200 одиниць при точці поновлення замовлення в 75 одиниць та терміну виконання замовлення 15 днів.

Яку з двох стратегій слід затвердити? Якби ви відповідали за розробку стратегії управління запасами, яка була б ваша рекомендація?

10.7. Комплектуючі продаються по 25 грн. за одиницю, але передбачається 10% знижка при закупівлі партії від 150 одиниць та вище. Компанія за день використовує 20 одиниць комплектуючих. Вартість розміщення замовлення складає 50 грн., вартість зберігання одиниці товару складає 0,30 грн. за день. Чи варто компанії скористатися знижкою?

10.8. Підприємець має стабільний місячний попит на товар у кількості 50 од. Товар він закуповує у поставачальника за ціною 6 гр. од. за штуку, до того ж витрати на оформлення поставчання та інші підготовчі операції складають у кожному випадку 10 гр. од.

Як часто підприємець повинен поповнювати свій запас товарів, якщо витрати на зберігання дорівнюють 20 % ціни товару?

- 10.9. Фірма замість оптимального об'єму партії товару q в основній моделі постачань замовила на 50% більше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?
- 10.10. Фірма замість оптимального об'єму партії товару q в основній моделі постачань замовила на 50% менше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?
- 10.11. Відомо, що витрати на виконання замовлення рівні 10 гр. од., річний попит на товар – 1470 т, оптимальний розмір партії постачань – 35 т. Визначити річні витрати на виконання замовлення.
- 10.12. Товар, що користується попитом, продається з середньою швидкістю 45 од. на день, а виготовляється з швидкістю 450 од. на день. Витрати на організацію і доставку товару складає 5 тис. грн. за партію, витрати на зберігання запасів дорівнюють 20 % вартості товару. Вартість товару складається наступним чином: заробітна плата обслуговуючого персоналу складає 0,4, витрати на матеріали – 0,5, накладні витрати 0,6 грн. за одиницю товару (для кожної одиниці товару ці значення додаються). Знайти оптимальний розмір партії і мінімальні загальні витрати, пов'язані з утворенням запасу (в розрахунку на одиницю товару за рік). У році – 300 робочих днів.
- 10.13. Інтенсивність попиту в моделі виробничих постачань складає чверть швидкості виробництва, яка дорівнює 20 000 од. товару за рік. Організаційні витрати для однієї партії дорівнюють 150 грн., а витрати на зберігання одиниці товару протягом року – 5 грн. Визначити оптимальний розмір партії.
- 10.14. Фірма, яка виступає в якості посередника, зобов'язується постачати заводу 5 одиниць необхідного вузла агрегату в день. Керівництво

фірми вирішило доставляти вузли на свій склад партіями, кожна з яких містить 150 од. і вони розраховані на 30-денний термін. За один прострочений день у постачанні вузлів заводу фірма виплачує штраф 200 грн. Витрати на зберігання одного вузла були оцінені в 250 грн. за тиждень, організаційними витратами можна знехтувати.

Знайти оптимальний рівень запасів і тривалість періоду дефіциту, що йому відповідає. Обчисліть зменшення витрат при оптимальній політиці управління запасами у порівнянні з політикою, коли на початок кожного періоду на склад поступає 150 вузлів.

РОЗДІЛ 11

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

11.1. МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ. ПОТІК ПОДІЙ

Марковський процес описує поведінку стохастичної системи, в якій для будь-якого моменту часу t_k , імовірнісні характеристики процесу у майбутньому залежать тільки від її стану у даний момент часу t_k і не залежать від того, коли і як система прийшла у цей стан.

Розглянемо дискретні моменти часу $\{t_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ і нехай S_n - випадкова величина, яка характеризує стан системи у момент t_n . Сукупність випадкових величин $\{S_n\}$ утворює стохастичний процес. Отже, такий випадковий процес буде марковським, якщо настання наступного стану залежить тільки від безпосередньо попереднього стану системи:

$$P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k, S_{k-1} = x_{k-1}, \dots, S_1 = x_1\} = P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k\}$$

для всіх можливих значень випадкових величин S_1, S_2, \dots, S_n .

Імовірність $P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k\}$ (іноді її називають *перехідною*) являє собою умовну ймовірність того, що система буде знаходитись в стані x_{k+1} в момент t_{k+1} , якщо в момент t_k вона знаходилась у стані x_k .

В стохастичних задачах дослідження операцій найчастіше дуже важко побудувати навіть математичну модель, яка б дозволила у явному (аналітичному) вигляді знайти величини, що нас цікавлять, в залежності від умов операції і елементів розв'язку. Однак в деяких особливих випадках таку математичну модель вдається побудувати.

Це відбувається як раз тоді, коли досліджувана операція являє собою (точно або наближено) *марковський процес*.

Приклад марковського процесу: система S – лічильник Гейгера, який реєструє радіоактивні частинки; стан системи у момент часу t характеризується показами лічильника – кількістю частинок, які надійш-

ли до даного моменту. Нехай в момент t_0 лічильник показує S_0 . Ймовірність того, що в момент $t_1 > t_0$ лічильник буде показувати якусь кількість частинок S_1 , зрозуміло залежить від S_0 , але не залежить від того, в які моменти надходили частинки до моменту t_0 .

На практиці часто зустрічаються процеси, які якщо не точно марковські, то можуть у певному наближенні розглядатися як марковські. По суті, будь-який процес можна розглядати як марковський, якщо всі параметри з «минулого», від яких залежить «майбутнє», включити у «теперішнє». Однак таке збагачення теперішнього за рахунок передісторії далеко не завжди буває корисним, так як часто приводить до величезної кількості параметрів, які треба враховувати (так зване «прокляття багатомірності»).

В дослідженні операцій найбільше значення мають так звані *марковські процеси з дискретними станами і неперервним часом*.

Процес називається *процесом з дискретним станом*, якщо його можливі стани S_1, S_2, S_3, \dots утворюють числову послідовність, та перехід системи із стану в стан відбувається «стрибком», практично миттєво.

Процес називається *процесом з неперервним часом*, якщо моменти можливих переходів із стану в стан не фіксовані заздалегідь, а невизначені, випадкові, якщо перехід може відбуватися у будь-який момент.

Введемо дуже важливе поняття теорії ймовірностей – поняття «потіку подій».

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, які настають одна за одною у будь-які випадкові моменти. Наприклад: потік викликів оператора мобільного зв'язку; потік частинок, які реєструє лічильник Гейгера; потік залізничних потягів.

Кажучи про «потік подій» треба мати на увазі, що тут термін «подія» має значення, яке дещо відрізняється від поняття «подія» в теорії ймовірностей. Там випадковою подією називається результат досліду, який має ту або іншу ймовірність. Події, що утворюють потік, самі по со-

бі ймовірностей не мають. Ймовірностями характеризуються інші, похідні від них події, наприклад: «на інтервал часу Δt припадає хоч одна подія» або «проміжок часу між двома сусідніми подіями буде не менший t ».

Важливою характеристикою потоку подій є його *інтенсивність* λ – середня кількість подій, які припадають на одиницю часу. Інтенсивність потоку може бути як сталою ($\lambda = const$), так і змінною, яка залежить від часу t .

Потік подій називається *регулярним*, якщо події відбуваються одна за одною через певні, рівні проміжки часу. На практиці частіше зустрічаються потоки не регулярні, із випадковими інтервалами.

Потік подій називається *стаціонарним*, якщо ймовірність настання певної кількості подій протягом певного проміжку часу залежить тільки від довжини цього проміжку.

Потік подій називається *потоком без післядії*, якщо настання події не залежить від того, коли і скільки подій відбулося до цього моменту. Якщо K – час, який пройшов з моменту настання попередньої події, то властивість відсутності післядії виражається співвідношенням

$$P\{t > T + K \mid t > K\} = P\{t > T\}.$$

Потік подій називається *ординарним*, якщо неможлива одночасна поява двох або більше подій.

Потік подій називається **простішим** або **стаціонарним пуассонівським**, якщо він володіє відразу трьома властивостями: стаціонарний, ординарний та немає післядії.

Для простішого потоку з інтенсивністю λ час між послідовними настаннями подій кількісно описується **експоненціальним розподілом**, густина ймовірності якого має вигляд

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

де математичне сподівання $M\{t\} = 1/\lambda$.

Для того щоб з'ясувати властивості експоненціального розподілу, сформулюємо основні аксіоми, на яких він ґрунтується.

Аксіома 11.1 Якщо $N(t)$ – кількість подій, які відбулися протягом часу $(0, t)$, то імовірнісний процес, що описує $N(t)$, має незалежні стаціонарні прирости; ймовірність настання події в інтервалі $(K, K + T)$ залежить тільки від його довжини T .

Аксіома 11.2 Ймовірність того, що подія настане на достатньо малому часовому інтервалі $h > 0$, додатна, але менше 1.

Аксіома 11.3 На достатньо малому часовому інтервалі $h > 0$ може відбуватися не більше однієї події, тобто $P\{N(h) > 1\} = 0$.

11.2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ, ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СМО

Часто у нашому повсякденному житті ми стикаємося з такими ситуаціями: черга покупців біля кас магазинів, поштових відділень і банків, очікування обслуговування в ресторані. Однак феномен очікування характерний не тільки для людей: група пасажирських літаків, які очікують дозволу на посадку в аеропорту; автомобілі, рух яких призупинено сигналом світлофора на шляху їх слідування; ряд станків, які вийшли з ладу і очікують ремонту; роботи, які поставлені в чергу для виконання на станку і т.п. Очікування є наслідком стохастичного характеру виникнення потреб в обслуговуванні і розкиду показників обслуговуючих систем, які називаються *системами масового обслуговування* (СМО).

Мета вивчення СМО полягає в тому щоб взяти під контроль деякі характеристики системи, встановити залежність між кількістю обслуговуваних одиниць та якістю обслуговування.

Результати дослідження СМО також можна використати для оптимізації моделі з вартісними характеристиками, в яких мінімізуються сумарні витрати, пов'язані з наданням послуг, та втрати, які обумовлені затримками в їх наданні. На рис. 11.1 зображена типова вартісна модель СМО. Витрати на обслуговування зростають із зростанням його рівня. У той же час, втрати які обумовлені затримками в наданні послуг, зменшуються із зростанням рівня обслуговування. Головною проблемою у такій моделі є труднощі оцінки втрат в одиницю часу, які обумовлені затримками в наданні послуг.

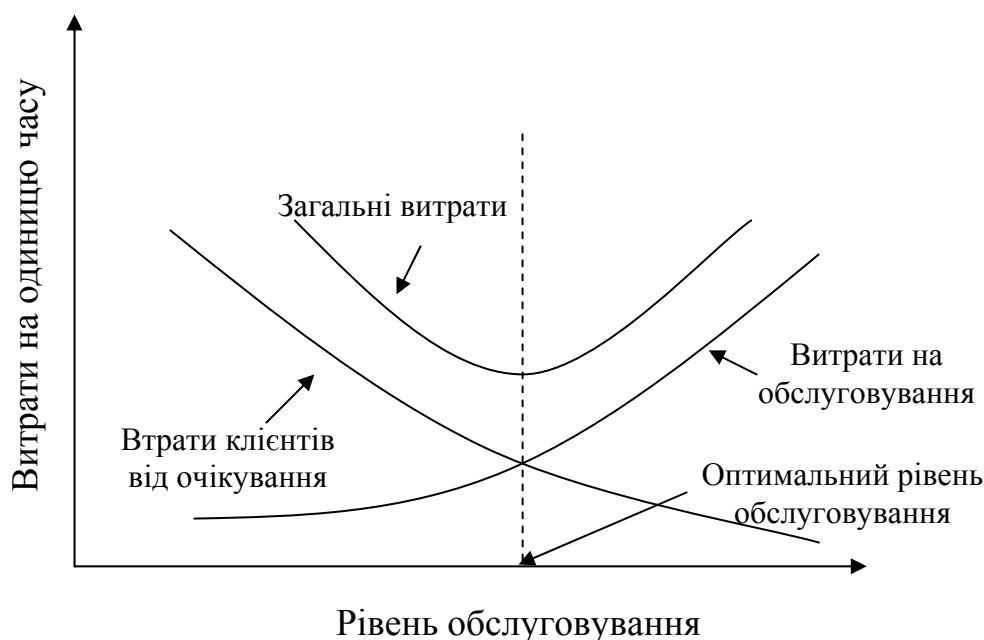


Рис. 11.1

Основними елементами СМО є джерело замовлень, їх вхідний потік, черга, канали обслуговування, вихідний потік. Схематично, це зображено на рис. 11.2.

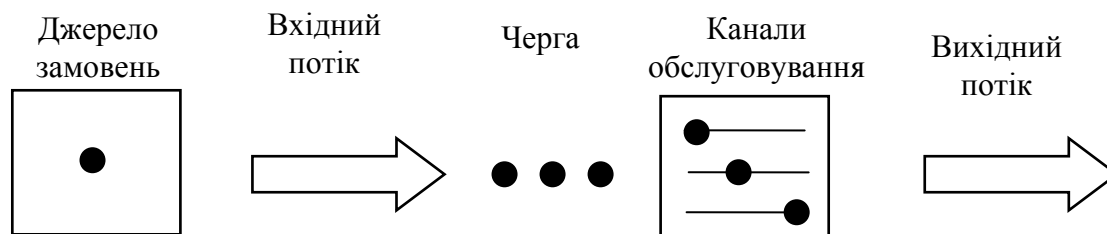


Рис. 11.2

В залежності від характеру формування черги СМО розрізняють:

- 1) системи з відмовами, в яких при зайнятості всіх каналів обслуговування замовлення не встає у чергу та покидає систему обслуговування;
- 2) системи з чергами, в яких замовлення встає у чергу, якщо на момент його надходження всі канали були зайняті.

СМО з чергою поділяються на різні види, в залежності від принципу побудови черги.

Черги можуть бути *обмежені* або *необмежені*. Обмеження можуть торкатися як довжини черги так й часу очікування.

За дисципліною черги розрізняють наступні СМО:

- 1) «перший прийшов – перший обслуговується» (FIFO – від англійського First-In-First-Out);
- 2) «останній прийшов – перший обслуговується» (LIFO – від англійського Last-In-First-Out);
- 3) випадковий відбір замовлень;
- 4) обслуговування з пріоритетом:
 - а) абсолютний пріоритет, коли замовлення з більш високим пріоритетом «виштовхує» з обслуговування замовлення з нижчим пріоритетом;
 - б) відносний пріоритет, коли обслуговування, яке вже розпочато, доводиться до кінця, а замовлення з більш високим пріоритетом має лише право на краще місце в черзі.

Існують СМО з так званим багатофазним обслуговуванням, які складаються з декількох етапів або фаз (наприклад, покупець в оптовому магазині повинен спочатку вибрати товар, потім оплатити його в касі, потім отримати на контролі).

За кількістю каналів обслуговування СМО поділяються на одноканальні і багатоканальні.

В залежності від розміщення джерела замовлень системи можуть бути відкритими (джерело знаходиться поза системою) і закритими

(джерело знаходиться у самій системі). Приклад першої – дзвінки, які надходять на телефонну станцію; приклад другої – один робітник обслуговує групу станків, які час від часу потребують ремонту.

Найбільш застосовуваними характеристиками СМО є наступні:

- 1) Ймовірність простою обслуговування, коли немає замовлень ($n = 0$) – p_0 ;
- 2) Ймовірність відмови в обслуговуванні, тобто того, що замовлення залишить СМО без обслуговування – $P_{відм}$;
- 3) Відносна пропускна здатність (ймовірність обслуговування) – $Q = 1 - P_{відм}$;
- 4) Абсолютна пропускна здатність, тобто середня кількість замовлень, які обслуговуються в одиницю часу – $A = \lambda Q$;
- 5) Середня кількість зайнятих каналів – \bar{c} ;
- 6) Середня кількість замовлень, що знаходяться в системі – L_s ;
- 7) Середня кількість замовлень у черзі – L_q ;
- 8) Середня тривалість перебування замовлення в системі – W_s ;
- 9) Середня тривалість перебування замовлення у черзі – W_q .

11.3. МОДЕЛІ НАРОДЖЕННЯ І ЗАГИБЕЛІ

Якщо СМО представити як марковський процес, то можна отримати аналітичні розв'язки для характеристик системи. При розгляді марковських процесів з дискретними станами та неперервним часом, зручно представляти, що всі переходи СМО із стану в стан відбуваються під дією потоків подій (вхідний потік, вихідний потік). Якщо всі потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший – простіші (стаціонарні пуассонівські), то процес, який відбувається в системі, буде марковським.

Як ми вже вказували, простіші потоки подій описуються експоненціальним розподілом. Надалі буде показано, що експоненціальний розподіл автоматично визначає розподіл Пуассона і навпаки.

1. Модель чистого народження. У систему замовлення тільки надходять (приклад, оформлення свідоцтв про народження дітей). При заданій інтенсивності λ надходження замовлень в СМО та достатньо малому інтервалі часу $h > 0$ з аксіом 11.1. – 11.3. випливає, що ймовірність відсутності в СМО замовлень дорівнює

$$p_0(h) = e^{-\lambda h}.$$

Дійсно, нехай $f(t)$ - густина ймовірності розподілу довжини часового інтервалу між послідовними настаннями випадкових подій ($t > 0$). Очевидно, що

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{інтервал часу між моментами} \\ \text{настання двох послідовних} \\ \text{випадкових подій не менше } h \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{l} \text{протягом } h \\ \text{подія не} \\ \text{настає} \end{array} \right\}$$

У математичній формі це записується наступним чином:

$$\int_h^{\infty} f(t) dt = p_0(h).$$

Отже,

$$p_0(h) = \int_h^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left(-e^{-\lambda t} \right) \Big|_h^{\infty} = e^{-\lambda h}.$$

Розкладемо вираз для $p_0(h)$ в ряд Маклорена:

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \dots = 1 - \lambda h + o(h^2),$$

де $o(h^2)$ – залишковий член другого порядку малості за h .

Згідно з аксіомою 11.3 на достатньо малому інтервалі часу $h > 0$ може настати не більше однієї події (надходження замовлення). Отже, при $h > 0$

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) = \lambda h.$$

Цей результат показує, що ймовірність надходження замовлення протягом інтервалу часу h прямо пропорційна h з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює інтенсивності надходжень λ .

Отримуємо на основі аксіом 11.1 – 11.3 розподіл Пуассона. Позначимо через $p_n(t)$ ймовірність надходження n замовлень протягом часу t . Отже, при достатньо малому $h > 0$ маємо

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \quad n > 0,$$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h), \quad n = 0.$$

З першого рівняння випливає, що надходження n замовлень протягом часу $t+h$ можливо у двох випадках: якщо маємо n надходжень протягом часу t та немає надходжень за час h або маємо $n-1$ надходження за час t та одне надходження за час h . Будь-які інші комбінації неможливі внаслідок аксіоми 11.3. Відповідно до умови незалежності стаціонарних приростів аксіоми 11.1 до правої частини рівняння застосуємо закон множення ймовірностей. У другому рівнянні відсутність надходження замовлень протягом часу $t+h$ може мати місце лише у випадку, коли немає надходження замовлень за час h .

Знайдемо похідні

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t),$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t).$$

Ця система рівнянь називається *рівняннями Колмогорова*.

Розв'язок наведених різницево-диференціальних рівнянь має наступний вигляд:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

У даному випадку ми отримали дискретну густину ймовірності *розподілу Пуассона* з математичним сподіванням

$$M\{n|t\} = \lambda t$$

надходжень замовлень за час t . Дисперсія розподілу Пуассона також дорівнює λt .

Отриманий результат означає, що кожен раз, коли часові інтервали між моментами послідовних надходжень замовлень розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням $1/\lambda$, кількість надходжень замовлень в інтервалі часу t характеризується розподілом Пуассона з математичним сподіванням λt . Вірним є й обернене твердження.

2. Модель чистої загибелі. Замовлення тільки покидають систему (приклад, видача запасів з складу). У даній моделі передбачається, що СМО починає функціонувати, коли в момент часу $t = 0$ в ній знаходяться N замовлень та не допускається жодного нового надходження. Замовлення після завершення їх обслуговування вибувають із системи з інтенсивністю μ замовлень за одиницю часу.

Нехай $p_n(t)$ – імовірність того, що після часу t в системі залишається n замовлень. Для отримання різницево-диференціальних рівнянь Колмогорова відносно $p_n(t)$ звичайно поступають таким же чином, як в моделі чистого народження. Тобто

$$\frac{dp_N(t)}{dt} = -\mu p_N(t),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad 0 < n < N,$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t).$$

Ці рівняння мають розв'язок

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N p_n(t),$$

який називається зрізаним розподілом Пуассона.

3. Узагальнена модель народження та загибелі. Розглядається СМО, в якій є як вхідний так і вихідний потоки замовлення.

Зробимо деякі зауваження. Рівняння Колмогорова дають можливість знайти всі ймовірності станів СМО як функції часу. При розгляді загальних СМО передбачається, що система функціонує протягом достатньо великого інтервалу часу, після якого в її роботі настає *стаціонарний режим*. Отже при $t \rightarrow \infty$ ймовірності $p_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) прямують до граничних (фінальних) ймовірностей станів.

В теорії випадкових процесів доводиться, що якщо кількість n станів системи скінченна та з кожного з них можна за скінченну кількість кроків перейти у будь-який інший, то граничні (фінальні) ймовірності існують.

Отже, якщо граничні ймовірності існують, то $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$. При цьому граничні ймовірності можна тлумачити як середній відносний час перебування системи у даному стані.

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – діаграмою *графу*. Стани системи зображуються крапками, колами або прямокутниками, а можливі переходи із стану в стан – напрямленими відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують стани.

Як обчислити граничні ймовірності? Так як ймовірності p_0, p_1, p_2, \dots сталі, то їх похідні дорівнюють нулю. Це означає, що всі ліві частини рівнянь Колмогорова дорівнюють нулю. Тому вони перетворюються у систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку й потрібно розв'язати. Можна й не записувати рівняння Колмогорова, а прямо за діаграмою графу станів записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

У розглянутій моделі народження та загибелі передбачається, що інтенсивності надходження замовлень та інтенсивності вихідного потоку

залежать від стану системи, що означає їх залежність від кількості замовлень в СМО.

Введемо наступні позначення:

n – кількість замовлень в системі обслуговування (у черзі та на обслуговуванні),

λ_n – інтенсивність надходження в СМО замовлень при умові, що в системі вже знаходиться n замовлень,

μ_n – інтенсивність вихідного потоку замовлень, які вже пройшли обслуговування,

p_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n замовлень.

Ймовірності p_n визначаються з діаграми графу, який поданий на рис. 11.3. СМО знаходиться в стані n , якщо в ній є n замовлень. З аксіом стаціонарного пуассонівського процесу 11.1 – 11.3 випливає, що ймовірність надходження більше одного нового замовлення протягом малого часу h прямує до нуля, коли $h \rightarrow 0$. Це означає, що при $n > 0$ стан n може бути змінено у двох можливих напрямках: $n - 1$, коли з інтенсивністю μ_n замовлення виходить із системи, та $n + 1$, коли має місце надходження замовлення з інтенсивністю λ_n . Стан 0 може змінитися лише до стану 1, коли надходить замовлення з інтенсивністю λ_0 .

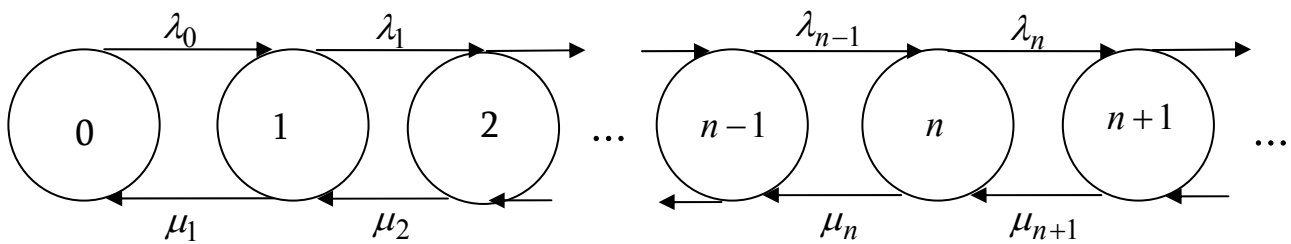


Рис. 11.3

При виконанні умови стаціонарності очікувані інтенсивності вхідного і вихідного потоків стану n ($n > 0$) повинні бути рівними.

Очікувана інтенсивність вхідного потоку:

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}.$$

Аналогічно очікувана інтенсивність вихідного потоку:

$$(\lambda_n + \mu_n) p_n.$$

Звідси отримуємо наступне рівняння балансу:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Рівняння балансу для $n = 0$ має вигляд

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1.$$

Рівняння балансу розв'язуються рекурентно, послідовно виражаючи імовірність p_i через p_0 . Для $n = 0$ маємо

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) p_0,$$

для $n = 1$:

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1.$$

Підставляючи сюди значенням p_1 отримуємо

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \right) p_0.$$

Методом математичної індукції можна показати, що

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right) p_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.1)$$

Значення p_0 визначається з умови нормування

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Отже

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \dots + \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right) = 1.$$

Звідки отримуємо вираз для p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \dots + \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right)^{-1}. \quad (11.2)$$

Розглянемо будь-яку СМО. Позначимо через $X(t)$ – кількість замовлень, які надійшли у СМО до моменту часу t , $Y(t)$ – кількість замов-

лень, які вийшли з СМО до моменту часу t . Обидві функції є випадковими і змінюються стрибком (збільшуються на одиницю) в моменти надходження замовлень ($X(t)$) та вибуття замовлень ($Y(t)$). Очевидно, що для будь-якого моменту часу t їх різниця $Z(t) = X(t) - Y(t)$ є кількістю замовлень, що знаходяться в СМО.

Розглянемо достатньо великий проміжок часу T та обчислимо для нього середню кількість замовлень, що знаходяться в СМО. Вона дорівнює інтегралу від функції $Z(t)$ на цьому проміжку, поділеному на довжину інтервалу T :

$$L_s = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt.$$

Але цей інтеграл являє собою площу фігури, яка обмежена лініями $X(t)$ та $Y(t)$ (рис. 11.4).

Позначимо проміжки часу перебування в СМО відповідного замовлення через t_1, t_2, t_3, \dots

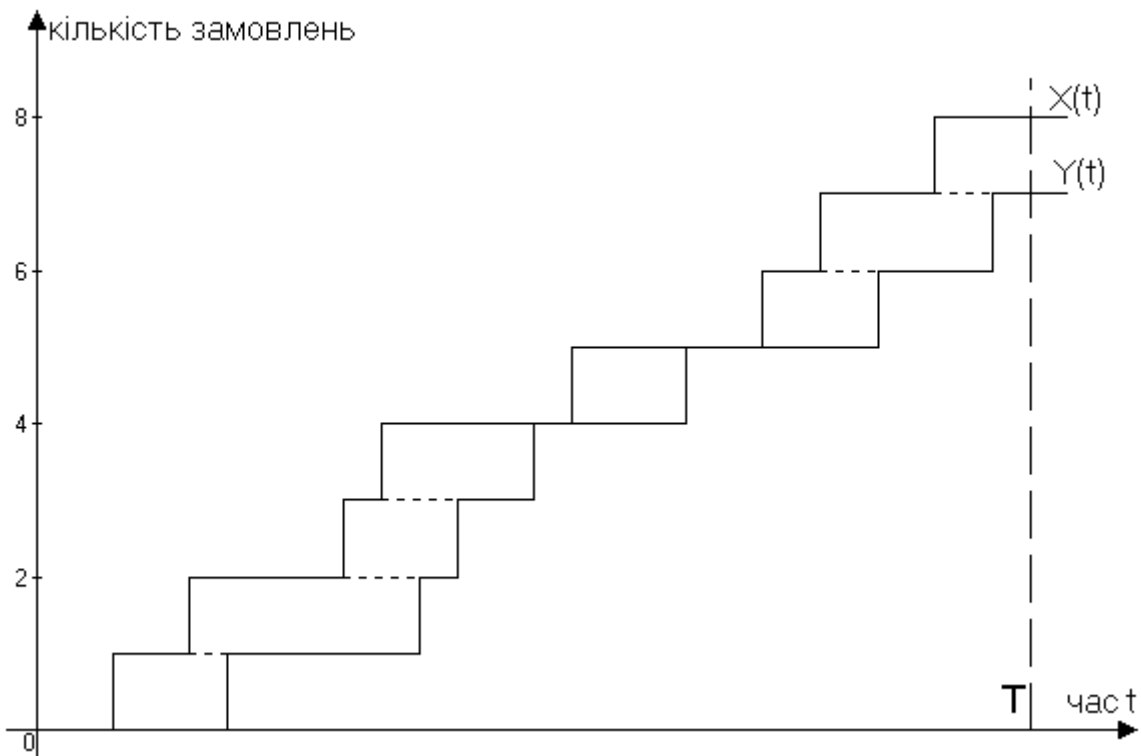


Рис. 11.4

Очевидно, що інтеграл дорівнює сумі всіх цих проміжків часу (висота всіх прямокутників на рис. 11.4 дорівнює одиниці):

$$\int_0^T Z(t)dt = \sum_i t_i,$$

де сума поширюється на всі замовлення, що надійшли за час T .

Таким чином

$$L_s = \frac{1}{T} \sum_i t_i.$$

Розділимо та помножимо праву частину на ефективну інтенсивність λ_{ef} . (Ефективна інтенсивність дорівнює інтенсивності надходження замовлень, коли всі замовлення мають можливість попасти на обслуговування; у протилежному випадку $\lambda_{ef} < \lambda$).

$$L_s = \frac{1}{T\lambda_{ef}} \sum_i t_i \cdot \lambda_{ef}.$$

Але величина $T\lambda_{ef}$ є середньою кількістю замовлень, які надійшли за час T . Якщо ми поділимо суму всіх проміжків часу t_i , на середню кількість замовлень, то отримуємо середню тривалість перебування замовлення в системі W_s . Отже,

$$L_s = \lambda_{ef} W_s. \quad (11.3)$$

Формула (11.3) називається *формулою Літтла*. Аналогічно виводиться формула Літтла, яка зв'язує середню кількість замовлень у черзі з середньою тривалістю перебування замовлення у черзі:

$$L_q = \lambda_{ef} W_q. \quad (11.4)$$

Існує й пряма залежність між величинами W_s та W_q . За визначенням

$$\left(\begin{array}{l} \text{середня тривалість} \\ \text{перебування в СМО} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{середній час} \\ \text{перебування в черзі} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{середній час} \\ \text{обслуговування} \end{array} \right).$$

Математично це записується так

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \quad (11.5)$$

де μ – інтенсивність вихідного потоку.

Помноживши обидві частини (11.5) на λ_{ef} та використавши формулу Літтла отримуємо

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}, \quad (11.6)$$

Величина $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ називається зведеною інтенсивністю потоку замовлень (інтенсивністю навантаження). Її зміст – середня кількість замовлень, що надходить за середній час обслуговування. Отже,

$$L_s = L_q + \rho \frac{\lambda_{ef}}{\lambda}.$$

За визначенням різниця між середньою кількістю замовлень, що знаходяться в системі L_s , та середньою кількістю замовлень у черзі L_q дорівнює середній кількості зайнятих каналів обслуговування \bar{c} :

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = \rho \frac{\lambda_{ef}}{\lambda}.$$

На закінчення наведемо ще формули для L_s , L_q :

$$L_s = \sum_{k=1}^n k p_k, \quad L_q = \sum_{k=c+1}^n (k-c) p_k.$$

11.4. ДЕЯКІ ПРОСТІ СМО

1. n -канальна СМО з відмовами (задача Ерланга).

Маємо n каналів обслуговування, на які надходить потік замовлень з інтенсивністю λ . Кожен канал обслуговування має інтенсивність μ .

Граф станів СМО відповідає моделі народження на загибелі (рис. 11.5).

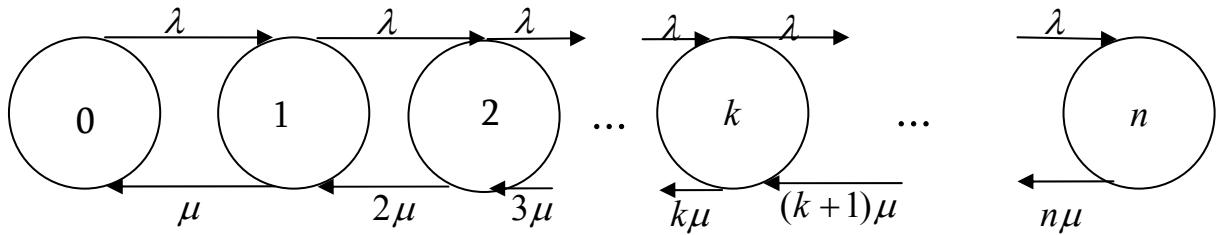


Рис. 11.5

Скористаємося формулами (11.1), (11.2) для граничних ймовірностей.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \right)^{-1}$$

або

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} \quad (11.7)$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (11.8)$$

Формули (11.7), (11.8) називаються формулами Ерланга.

Обчислимо характеристики ефективності СМО.

Ймовірність відмови в обслуговуванні дорівнює ймовірності того, що всі канали зайняті

$$P_{\text{відм}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (11.9)$$

Відносна пропускна здатність – ймовірність того, що замовлення буде обслуговане:

$$Q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (11.10)$$

Абсолютну пропускну здатність отримуємо, якщо помножити інтенсивність потоку замовлень λ на Q :

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right). \quad (11.11)$$

Середню кількість зайнятих каналів \bar{c} можна знайти безпосередньо:

$$\bar{c} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot p_n.$$

Але знайдемо її значно простіше. Нам відома абсолютна пропускна здатність A . Це – інтенсивність потоку замовлень, які вже пройшли обслуговування. Кожен зайнятий канал в одиницю часу обслуговує в середньому μ замовлень. Отже, середня кількість зайнятих каналів дорівнює

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} \quad (11.12)$$

або

$$\bar{c} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right). \quad (11.13)$$

Розглянемо задачу з використанням СМО з відмовами.

Приклад 11.1. У відділу контролю цеху працює три контролери. Якщо деталь надходить у відділ контролю, коли всі контролери зайняті обслуговуванням, то вона проходить неперевіреною. Середня кількість деталей, які надходять у відділ контролю протягом години, дорівнює 24. Середній час, який витрачає один контролер на обслуговування однієї деталі, дорівнює 5 хв. Визначити ймовірність того, що деталь пройде неперевіреною. На скільки завантажені контролери та скільки їх потрібно, щоб імовірність обслуговування $P_{обсл}^* \geq 0,95$?

Розв'язання. За умовою задачі $n = 3$, $\lambda = 24 \text{ дет/год} = 0,4 \text{ дет/хв}$,

$$\bar{t}_{обсл} = 5 \text{ хв}, \text{ тоді } \mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = 0,2 \text{ дет/хв}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2.$$

1) Ймовірність простою каналів обслуговування за формулою (11.7):

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} \approx \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1,3} \approx 0,1587$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні (формула(11.9)):

$$P_{відм} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{2^3}{3!} \cdot 0,1587 \approx 0,21 \text{ (21\%)}.$$

3) Ймовірність обслуговування (формула 11.10):

$$P_{\text{обсл}} = Q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - 0,21 = 0,79.$$

4) Абсолютна пропускна здатність (формула 11.11):

$$A = \lambda Q = 0,4 \cdot 0,79 = 0,316.$$

5) Середня кількість зайнятих каналів (формула 11.12):

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} = \frac{0,316}{0,2} = 1,58.$$

6) Доля каналів зайнятих обслуговуванням

$$k_z = \frac{\bar{c}}{n} = \frac{1,58}{3} = 0,526 (\approx 53\%).$$

$$\text{При } n = 3: P_{\text{обсл}} = 0,79 < P_{\text{обсл}}^* = 0,95.$$

Виконавши розрахунки для $n = 4$ отримуємо $p_0 = 0,14$, $P_{\text{відм}} = 0,093$, $P_{\text{обсл}} = 0,907$. Так як $P_{\text{обсл}} = 0,907 < P_{\text{обсл}}^* = 0,95$, виконаємо розрахунки для $n = 5$: $p_0 = 0,137$, $P_{\text{відм}} = 0,035$, $P_{\text{обсл}} = 0,965 > P_{\text{обсл}}^* = 0,95$.

Відповідь. Ймовірність того, що при $n = 3$ деталь буде неперевіреною складає 21% та контролери будуть завантажені на 53%.

Для того щоб забезпечити ймовірність обслуговування більше 95%, необхідно мати не менше п'яти контролерів.

2. Одноканальна СМО з необмеженою чергою.

Діаграма графу даної СМО подана на рис. 11.6.

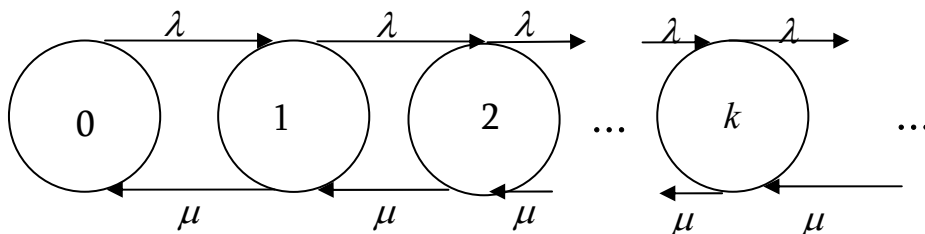


Рис. 11.6

Якщо в системі знаходиться k замовлень, то канал зайнятий, а в черзі стоїть $k - 1$ замовлення.

Граничні (фінальні) ймовірності для такої СМО існують не завжди. Якщо $\rho < 1$, то граничні ймовірності існують, а при $\rho \geq 1$ черга при $t \rightarrow \infty$ зростає необмежено.

Так як черга в СМО необмежена, то обчислювати абсолютну та відносну пропускну здатності не треба. Кожне замовлення обов'язково буде обслуговане, тому $A = \lambda$, $Q = 1$.

Скористаємося формулами (11.1), (11.2) для граничних ймовірностей (строго кажучи ці формули були виведені для скінченої кількості станів, а в нашому випадку вона нескінченна).

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \dots \right)^{-1} = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots \right)^{-1}. \quad (11.14)$$

Ряд у формулі (11.14) являє собою геометричну прогресію. Якщо $\rho < 1$ він збіжний

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Звідки

$$p_0 = 1 - \rho. \quad (11.15)$$

Інші ймовірності знаходяться за формулами

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0, \quad \dots, \quad p_k = \rho^k p_0, \quad \dots,$$

або

$$p_1 = \rho(1 - \rho), \quad p_2 = \rho^2(1 - \rho), \quad \dots, \quad p_k = \rho^k(1 - \rho), \quad \dots \quad (11.16)$$

Цікавим є той факт, що максимальною буде ймовірність p_0 того, що канал вільний.

Знайдемо середню кількість замовлень, що знаходяться в системі

$$L_s = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + k \cdot p_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k,$$

$$L_s = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho) = \rho(1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1}.$$

Оскільки $k\rho^{k-1}$ є похідною за ρ від ρ^k , то

$$L_s = \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k.$$

Поміняємо місцями операції підсумування та диференціювання:

$$L_s = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k.$$

Сума в формулі – нескінченна спадна геометрична прогресія з першим членом ρ та знаменником ρ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

Таким чином

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (11.17)$$

Застосуємо формулу Літтла (11.3) та знайдемо середню тривалість перебування замовлення в системі:

$$W_s = \frac{1}{\lambda} L_s = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad (11.18)$$

Знайдемо середню кількість замовлень у черзі L_q . Кількість замовлень у черзі дорівнює кількості замовлень в системі мінус одне замовлення, яке обслуговується. Це означає (за правилом додавання математичних сподівань), що середня кількість замовлень у черзі дорівнює середньої кількості замовлень в системі мінус середня кількість замовлень на обслуговуванні, яка дорівнює в даному випадку ймовірності того, що канал зайнятий. Очевидно, що ймовірність того, що канал зайнятий, дорівнює різниці одиниці та ймовірності того, що канал вільний

$$1 - p_0 = \rho.$$

Таким чином

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} . \quad (11.19)$$

За формулою Літтла (11.4) середня тривалість перебування замовлення у черзі:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} . \quad (11.20)$$

3. n - канальна СМО з необмеженою чергою.

Дана задача розв'язується аналогічно попередній. Граф станів поданий на рис. 11.7.

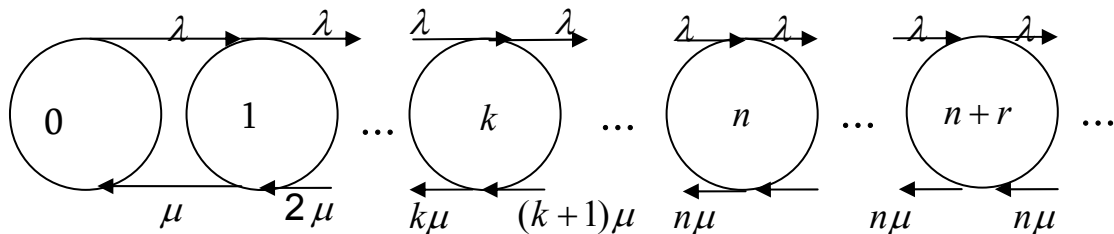


Рис. 11.7

Умова існування граничних (фінальних) ймовірностей

$$\frac{\rho}{n} < 1 .$$

Якщо $\frac{\rho}{n} \geq 1$ черга зростає необмежено.

Застосовуючи ті ж самі формули (11.1), (11.2) знайдемо граничні ймовірності при умові, що $\frac{\rho}{n} < 1$.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1} ,$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 , \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 , \quad \dots , \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 , \quad (11.21)$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 , \quad \dots , \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 , \quad \dots$$

Знайдемо характеристики ефективності СМО.

Найпростіше знаходиться середня кількість зайнятих каналів

$$\bar{c} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Вказаний вираз взагалі справедливий для будь-якої СМО з необмеженою чергою.

Середня кількість замовлень у черзі знаходиться за формулою

$$L_q = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0. \quad (11.22)$$

Середня кількість замовлень в СМО знаходиться додаванням до L_q середньої кількості замовлень на обслуговуванні (середня кількість зайнятих каналів):

$$L_s = L_q + \bar{c} = L_q + \rho. \quad (11.23)$$

Середні тривалості перебування замовлень у черзі та в системі:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q, \quad W_s = \frac{1}{\lambda} L_s. \quad (11.24)$$

Приклад 11.2. Філія банку має трьох контролерів-касирів ($n = 3$) для обслуговування вкладників. Потік вкладників надходить у філію з інтенсивністю $\lambda = 30 \text{ чол./год}$. Середня тривалість обслуговування контролером-касиром одного вкладника $\bar{t}_{\text{обсл}} = 3 \text{ хв}$. Визначити характеристики філії банку як об'єкту СМО.

Розв'язання. $n = 3$, $\lambda = 30 \text{ чол./год} = 0,5 \text{ чол./хв}$.

Інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{3} = 0,333 \text{ чол./хв}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,5 \cdot 3 = 1,5.$$

1) Ймовірність простою контролерів-касирів протягом робочого дня

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-1,5)}} = \frac{1}{1 + \frac{1,5}{1!} + \frac{1,5^2}{2!} + \frac{1,5^3}{3!} + \frac{1,5^4}{3!(3-1,5)}} = 0,210.$$

2) Ймовірність того, що всі контролери зайняті

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{1,5^3}{3!} \cdot 0,21 = 0,118.$$

3) Ймовірність того, що замовлення виявиться у черзі дорівнює

$$p_q = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{1,5^4}{3!(3-1,5)} \cdot 0,21 = 0,118.$$

4) Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 = \frac{1,5^4}{(3-1)!(3-1,5)^2} \cdot 0,21 = 0,236.$$

5) Середній час очікування замовлення у черзі

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,236}{0,5} = 0,472 \text{ хв.}$$

6) Середній час знаходження замовлення в СМО:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = W_q + \bar{t}_{\text{обсл}} = 0,472 + 3 = 3,472 \text{ хв.}$$

7) Середня кількість вільних каналів обслуговування:

$$\bar{n}_{\text{вільн}} = n - \bar{c} = n - \rho = 3 - 1,5 = 1,5.$$

8) Доля зайнятих каналів:

$$k_3 = \frac{\bar{c}}{n} = \frac{\rho}{n} = \frac{1,5}{3} = 0,5.$$

9) Середня кількість вкладників у філії банку:

$$L_s = L_q + \rho = 0,236 + 1,5 = 1,736 \text{ чол.}$$

Відповідь. Ймовірність простою контролерів-касирів дорівнює 21% робочого часу; ймовірність вкладнику виявитись у черзі складає 11,8%; середня кількість вкладників у черзі 0,236 чол.; середній час очікування вкладниками обслуговування 0,472 хв.

4. n - канална СМО з обмеженою чергою.

Задача відрізняється від попередньої задачі тільки тим, що кількість замовлень в черзі обмежена деяким заданим числом (m).

Замовлення, яке надходить в систему і знаходить всі канали та місця в черзі зайнятими, покидає СМО не обслугованою.

Граничні ймовірності станів СМО у цій задачі існують при будь-якому значенні ρ , так як кількість станів обмежена.

При обчисленні характеристик СМО користуються таким же прийомом як в задачах 2 і 3, з тією різницею, що підсумування треба виконувати не для нескінченної прогресії, а скінченної.

Однією з основних характеристик даної СМО є відмова замовленню в обслуговуванні.

Формули для стаціонарного режиму:

Ймовірність простою каналів обслуговування:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right) \right]^{-1}.$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{відм}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0.$$

Ймовірність обслуговування:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{відм}}.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = P_{\text{обсл}} \cdot \lambda.$$

Середня кількість зайнятих каналів:

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu}.$$

Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n} \right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} p_0.$$

Середній час очікування замовлення у черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

Середня кількість замовлень в СМО:

$$L_s = L_q + \bar{c}.$$

Середній час знаходження замовлення в СМО:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}.$$

Приклад 11.3. База отримує ранні овочі з теплиць. Автомобілі з вантажем надходять у різний час з інтенсивністю $\lambda = 6$ машин у день. Підсобні приміщення та обладнання для підготовки овочей до продажу дозволяють обробляти і зберігати товар, що привезений двома автомашинами ($m = 2$). На базі працює три фасувальники ($n = 3$), кожен з яких в середньому може обробляти товар з однієї машини за $\bar{t}_{обсл} = 4$ год. Тривалість робочого дня при змінній роботі 12 год. Визначить, якою повинна бути ємність підсобних приміщень, щоб ймовірність повної обробки товарів була $p_{обсл}^* \geq 0,97$.

Розв'язання. Визначимо завантаження фасувальників

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{12}{4} = 3 \text{ авт / день},$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

1) Знайдемо ймовірність простою фасувальників при відсутності автомашин (замовлень):

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right) \right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)} = 0,128.$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{відм}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0 = \frac{2^{3+2}}{3! \cdot 3^2} \cdot 0,128 = 0,075.$$

3) Ймовірність обслуговування:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - 0,075 = 0,925.$$

Так як $P_{\text{обсл}} = 0,925 < P_{\text{обсл}}^* = 0,97$, виконаємо аналогічні обчислення для $m = 3$: $p_0 = 0,122$; $P_{\text{відм}} = 0,048$; $P_{\text{обсл}} = 0,952$. Так як $P_{\text{обсл}} = 0,952 < 0,97$, приймемо $m = 4$. Для цього випадку отримуємо $p_0 = 0,12$; $P_{\text{відм}} = 0,028$; $P_{\text{обсл}} = 0,972$, $0,972 > 0,97$, ємність підсобних приміщень необхідно збільшити до $m = 4$.

Для досягнення заданої ймовірності обслуговування можна збільшити кількість фасувальників, виконуючи обчислення для $n = 4, 5$ і т.д. Задачу можна розв'язати, збільшуючи ємність підсобних приміщень або зменшуючи час обробки товарів.

Знайдемо інші параметри СМО для розрахованого випадку $p_0 = 0,12$; $P_{\text{відм}} = 0,028$; $P_{\text{обсл}} = 0,972$.

4) Абсолютна пропускна здатність:

$$A = P_{\text{обсл}} \cdot \lambda = 0,972 \cdot 6 = 5,832 \text{ авт./день}.$$

5) Середня кількість зайнятих каналів (фасувальників):

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} = \frac{5,832}{3} = 1,944.$$

6) Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(4 + 1 - \frac{4 \cdot 2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \cdot 0,12 = 0,548.$$

7) Середній час очікування обслуговування:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,548}{6} = 0,09 \text{ день}.$$

8) Середня кількість автомашин на базі:

$$L_s = L_q + \bar{c} = 0,548 + 1,944 = 2,492 \text{ авт.}$$

9) Середня кількість вільних каналів обслуговування:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2,492}{6} = 0,415 \text{ днів.}$$

Відповідь. Ємність підсобних приміщень бази повинна вміщати товар, що привезений 4 автомашинами ($m = 4$). При цьому ймовірність повної обробки товару буде $P_{\text{обсл}} = 0,972$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які процеси називаються марковськими?
2. Якій потік подій називається простішим?
3. За якими ознаками класифікуються системи масового обслуговування?
4. Які основні характеристики СМО?
5. Які основні результати моделей чистого народження та чистої загибелі?
6. Граф та основні характеристики узагальненої моделі народження та загибелі.
7. Які існують прості моделі СМО?

ВПРАВИ

Розв'язати наступні задачі вважаючи, що потік замовлень є простішим та тривалість обслуговування одного замовлення розподілена за експоненціальним законом.

- 11.1. Оператор мобільного зв'язку має п'ять каналів обслуговування. Телефонні дзвінки надходять з інтенсивністю 90 замовлень за годину, середня тривалість розмови триває 2 хв. Визначити показники оператора як об'єкту СМО.
- 11.2. Автоматична мийка для легкових автомобілів має 3 місця. Автомобілі надходять з інтенсивністю 20 автомобілів за годину. Тривалість миття одного автомобіля 15 хв. Стоянка перед мийкою заборонена. Визначити середню кількість зайнятих, незайнятих автомобілями місць та ймовірність того, що автомобіль не буде вимитий.
- 11.3. АТС підприємства забезпечує не більше 5 переговорів одночасно. Середня тривалість розмови складає 1 хв. На станцію надходять в середньому 10 викликів за секунду. Визначити характеристику АТС як об'єкту СМО.
- 11.4. Залізнична станція має три колії для розвантаження потягів. На станцію в середньому приходять 6 потягів на добу. Розвантаження одного потяга триває 8 год. Розвантаження відбувається цілодобово. Визначити характеристики роботи станції як об'єкту СМО та у випадку необхідності надати рекомендації по покращенню її роботи.
- 11.5. В службі «Швидкої допомоги» невеликого міста цілодобово чергують 3 диспетчери, які обслуговують 3 телефонних лінії. Якщо замовлення на виклик лікаря до хворого надходить, коли диспетчери зайняті, то абонент отримує відмову. Потік замовлень складає 4 виклики за хвилину. Оформлення замовлення

триває в середньому 1,5 хв. Визначити основні показники роботи служби як об'єкту СМО. Розрахувати скільки потрібно телефонних ліній, щоб задовольнити не менше 90% викликів.

- 11.6. Перукарня має 4 майстра. Вхідний потік відвідування має інтенсивність 5 чоловік за годину. Середній час обслуговування одного клієнта складає 40 хв. Визначити середню довжину черги на обслуговування, вважаючи її необмеженою.
- 11.7. На газозаправочній станції встановлені 2 колонки для заправки автомобілів газом. Біля станції знаходиться майданчик на 2 автомобілі. На станцію прибуває в середньому одна машина у 3 хв. Середній час обслуговування однієї машини складає 2 хв. Визначити характеристики роботи станції як об'єкта СМО.
- 11.8. На автозаправці працює сервіс по миттю вікон. Одночасно він може обслуговувати три автомобілі (є три робітника), якщо сервіс зайнятий, автомобіль від'їжджає не обслугованим. Середня кількість автомобілів, які заправляються дорівнює 20 за 1 год. Середній час миття вікон одного автомобіля – 6 хв. Визначити, ймовірність того, що автомобіль не скористається додатковою послугою, а також середню кількість автомобілів, які будуть обслуговані за 1 год., та середню кількість зайнятих робітників.
- 11.9. Пункт швидкого харчування, що обслуговує автомобілі має 3 вікна обслуговування. Майданчик при пункті, на якому автомашини очікують обслуговування може вмістити не більше однієї машини та якщо він зайнятий, то чергова машина у чергу не становиться. В середньому автомашини прибувають кожні 2 хв. Процес обслуговування триває в середньому 2,5 хв. Визначити ймовірність відмови, абсолютну пропускну здатність, середню кількість автомашин у черзі, середній час очікування в черзі та середній час знаходження автомобіля біля пункту харчування (разом з обслуговуванням).

11.10. В магазині покупців обслуговує два продавці. Середній час обслуговування одного покупця – 4 хв. Інтенсивність потоку покупців – 3 людини за хвилину. Площа магазину дозволяє одночасно знаходитись в ньому не більше 5 покупців. Відвідувач, який прийшов у перевантажений магазин не очікує зовні та уходить. Визначити ймовірність того, що покупець буде не обслугований.

РОЗДІЛ 12

МЕТОДИ МЕРЕЖЕВОГО (СІТЬОВОГО) ПЛАНУВАННЯ

12.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Мережева модель являє собою графічне зображення плану виконання робіт проекту, що складається з відрізків (процесів проекту) і вузлів (подій), які відображають логічний взаємозв'язок усіх процесів. В основі мережевого моделювання лежить поняття графа.

Нехай V – довільна множина (наприклад, множина натуральних чисел $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), A – деяка сукупність пар виду (V_i, V_j) , де $V_i, V_j \in V$ (наприклад $\{(1, 2); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (4, 5)\}$). Термін сукупність означає можливість наявності однакових пар.

Упорядкована пара $G = (V, A)$, що складається з множини V та сукупності A , називаються *графом* із множиною вершин V і множиною ребер A . Графи зручно зображати графічно, що і спричинило появу їхньої назви. При цьому елементи V зображають крапками (колами, квадратами) на площині, а ребра (V_i, V_j) – відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують крапки V_i та V_j . Лінії, що зображають ребра графа, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами. На рис. 12.1 зображено граф наведеного вище прикладу.

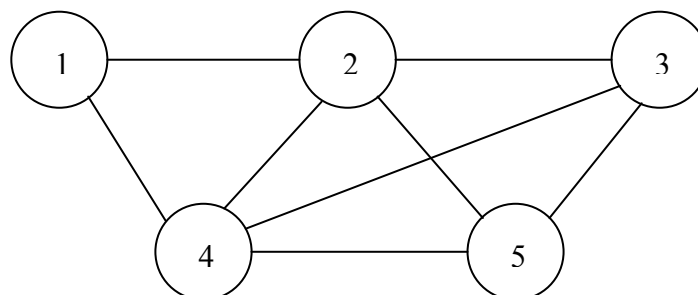


Рис. 12.1

Якщо пари (V_i, V_j) , де $V_i, V_j \in A$ вважаються впорядкованими, то граф є орієнтованим. Ребра орієнтованого графа прийнято називати дугами та зображати напрямленими відрізками як на рис 12.2.

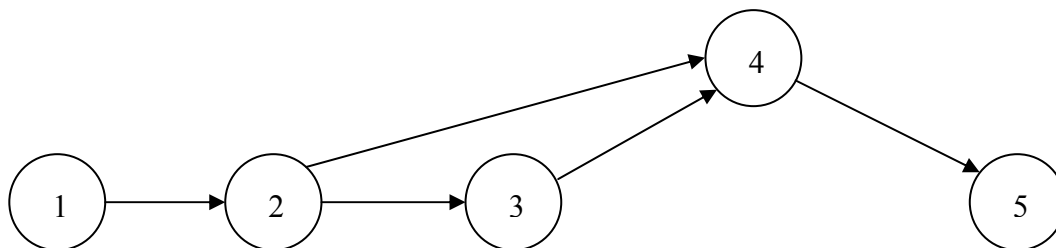


Рис. 12.2

В сучасних методах мережевого планування на першому етапі виконується розбиття проекту на окремі процеси, визначаються їх відношення передування (який процес повинен відбутися перед іншим) та оцінки тривалості операцій (рис 12.3).

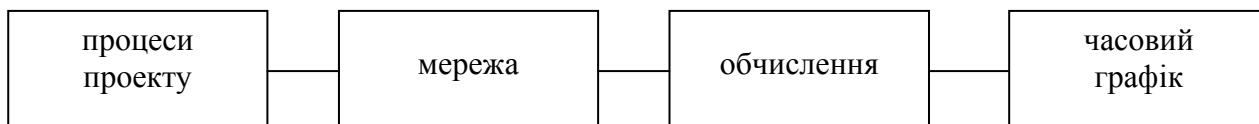


Рис. 12.3

Далі будується мережа проекту, яка показує відношення передування серед процесів, які складають проекти. На третьому етапі на основі побудованої мережі виконуються обчислення, в результаті яких будується часовий графік реалізації процесу (календарний план), виконується аналіз усіх операцій та вносяться покращення в структуру моделі до початку її реалізації. Календарний графік виявляє критичні процеси, яким слід приділяти особливої уваги, для того, щоб закінчити усі процеси в директивний термін. Що стосується некритичних операцій, то календарний план дозволяє визначити резерви часу, які можна вигідно використати при затримці виконання процесів або ефективному використанню як трудових, так й фінансових ресурсів.

Теорія графів оперує поняттям шлях, який поєднує послідовність взаємозв'язаних ребер. *Контур* означає такий шлях, у якого початкова вершина співпадає з кінцевою. *Мережевий графік* – це орієнтований граф без контурів.

У мережевому плануванні є два основних елементи – процес і подія.

Процес – це робота, яка вимагає витрат ресурсів, або очікування, яке призводить до досягнення необхідного результату.

Фіктивний процес – це зв'язок між результатами (подіями), який не вимагає витрат часу та ресурсів.

Подія - це результат (проміжний або кінцевий) виконання одного або декількох попередніх процесів.

Шлях – це будь-яка неперервна послідовність (ланцюг) процесів і подій.

Критичний шлях – це шлях, який немає резервів часу та містить самі напружені процеси проекту. Процеси, які розміщені на критичному шляху називають критичними.

Всі інші процеси є некритичними, та мають резерви часу, які дозволяють пересувати термін їх виконання не впливаючи на загальну тривалість виконання проекту.

Отже, критичний шлях має особливе значення у мережевому плануванні, так як процеси цього шляху визначають загальний цикл завершення проекту. Для скорочення тривалості проекту необхідно в першу чергу скоротити тривалість процесів, які лежать на критичному шляху.

При побудові мережевих моделей необхідно дотримуватися наступних правил:

1. Мережа зображується зліва направо, та кожна подія з більшим порядковим номером зображується правіше попередньої. Загальний напрямок стрілок, що зображають процеси, також, в основному,

повинні бути розміщені зліва направо, при цьому кожний процес повинен виходити з події з меншим номером.

2. Дві сусідні події можуть бути об'єднані лише одним процесом. Для зображення паралельних робіт вводиться проміжна подія та фіктивний процес (рис. 12.4).

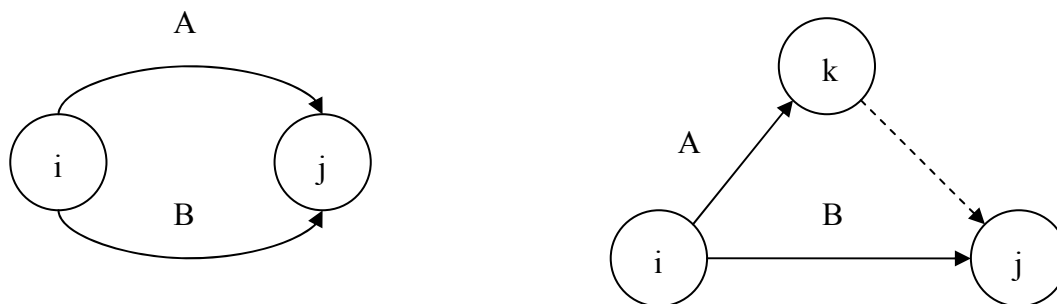


Рис. 12.4

3. В мережі не повинно бути тупиків, тобто проміжних подій, з яких не виходить жодного процесу (рис. 12.5.)

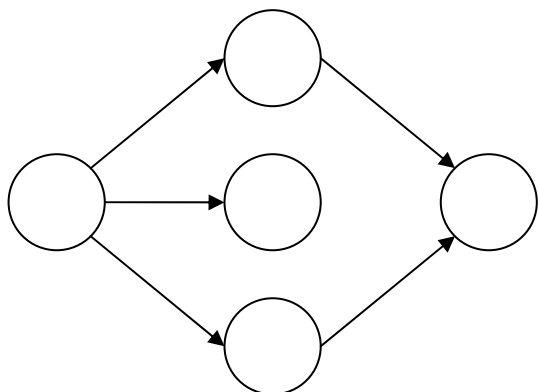


Рис. 12.5

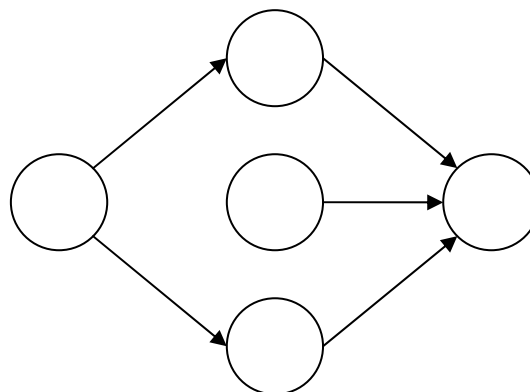


Рис. 12.6

4. В мережі не повинно бути проміжних подій, яким не передують жодний процес (рис. 12.6).
5. В мережі не повинно бути замкнених контурів, які складаються з взаємозв'язаних робіт, що створюють замкнений ланцюг (рис. 12.7).

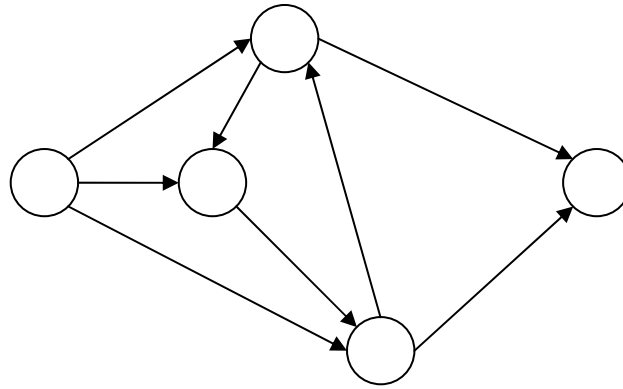


Рис. 12.7

6. Для правильної нумерації подій поступають наступним чином: нумерація подій починається з вихідної події, якій надається номер 1. З вихідної події 1 викреслюють всі процеси які з неї виходять. В мережі, що залишилась знаходять подію, в яку не входить жодний процес. Цій події надається номер 2. Потім викреслюють процеси, які виходять з події 2, та знову знаходять на мережі, що залишилась, подію, в яку не входить жодний процес та йому надається номер 3 і т.д. (рис. 12.8).

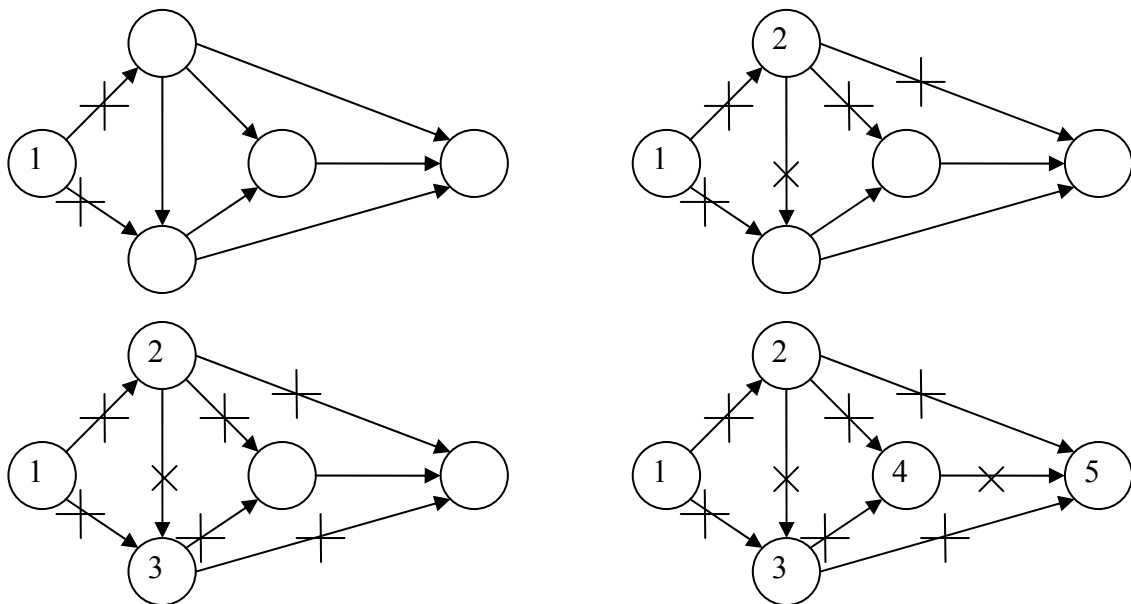


Рис. 12.8

7. Тривалість процесів встановлюється на підставі діючих нормативів або за експертними оцінками фахівців. У першому випадку часові оцінки є

детермінованими (однозначними), у другому – стохастичними (імовірнісними).

12.2. МЕТОД КРИТИЧНОГО ШЛЯХУ

Основним часовим параметром мережевого графіка є тривалість критичного шляху. Кінцевим результатом застосування методу критичного шляху буде побудова часового графіка виконання проекту. Для цього проводяться спеціальні обчислення, в результаті яких отримують наступну інформацію:

- загальну тривалість проекту;
- розподіл множини процесів, що складають проект, на критичні та некритичні.

Розрахунок критичного шляху містить два етапи. Перший називається *прямим проходом*. Обчислення починається з вихідної події та продовжується до тих пір, доки не буде досягнута кінцева подія. Для кожної події визначається найраніший термін її настання.

На другому етапі, який називається *зворотнім проходом*, обчислення починаються з кінцевої події та закінчуються вихідною подією. Для кожної події обчислюється найпізніший термін її настання.

Введемо позначення:

t_j – найраніший термін настання події j ,

T_j – найпізніший термін настання події j ,

d_{ij} – тривалість процесу (i, j) .

Прямий прохід

Початковий крок. Припускаємо, що $t_1 = 0$; це вказує на те, що проект починається в нульовий момент часу.

Основний крок. Для вершини j визначаємо вершини з номерами p, q, v , що безпосередньо зв'язані з вершиною j процесами $(p, j), (q, j), \dots, (v, j)$,

для яких вже обчислені найраніші терміни настання відповідних подій. Найраніший термін настання події j обчислюється за формулою

$$t_j = \max\{t_p + d_{pj}, t_q + d_{qj}, \dots, t_v + d_{vj}\}.$$

Зворотній прохід

Початковий крок. Припускаємо $T_n = t_n$ (n -кінцева подія); це вказує на те, що найраніший та найпізніший терміни завершення проекту співпадають.

Основний крок. Для вершини j визначени p, q, \dots, v , які безпосередньо зв'язані з вершиною j процесами $(j, p), (j, q), \dots, (j, v)$, для яких вже обчислені найпізніші терміни настання відповідних подій. Найпізніший термін настання події j обчислюється за формулою

$$T_j = \min\{T_p - d_{jp}, T_q - d_{jq}, \dots, T_v - d_{jv}\}.$$

Процес (i, j) буде *критичним*, якщо виконуються три умови:

1. $T_i = t_i$,
2. $T_j = t_j$,
3. $t_j - t_i = T_j - T_i = d_{ij}$.

Якщо ці умови не виконуються, то процес *некритичний*.

Критичні процеси повинні утворювати неперервний шлях через всю мережу від початкової події до кінцевої.

Запас часу некритичного процесу – це частина максимального інтервалу часу виконання цього процесу (який більше реальної тривалості процесу). Розрізняють *загальний запас часу* та *вільний запас часу*.

Загальний запас часу процесу (i, j) визначається як перевищення над тривалістю виконання цього процесу інтервалу часу від найранішого моменту здійснення події i до найпізнішого часу здійснення події j

$$\tau_{заг} = (T_j - t_i) - d_{ij}.$$

Вільний запас часу процесу (i, j) визначається як перевищення над тривалістю виконання цього процесу інтервалу часу від найранішого моменту здійснення події i до найранішого здійснення події j

$$\tau_{вил} = (t_j - t_i) - d_{ij}.$$

За визначенням $\tau_{вил} \leq \tau_{заг}$.

Правило “червоного прапорця”. Для некритичного процесу (i, j) :

а) якщо $\tau_{вил} = \tau_{заг}$, то даний процес може виконуватись у будь-який час всередині максимального інтервалу (t_i, T_j) без порушення відношень передування;

б) якщо $\tau_{вил} < \tau_{заг}$, то без порушення відношень передування даний процес може початись із зсувом, який не перевищує $\tau_{вил}$, відносно найранішого моменту початку процесу t_i . Зсув початку процесу на величину, що перевищує $\tau_{вил}$ (але не більше $\tau_{заг}$), повинно супроводжуватись таким же зсувом відносно всіх процесів, які починаються з події j .

Приклад 12.1. Розглянемо програму створення нового побутового приладу, який користується попитом у населення. Побудуємо мережений графік та обчислимо його часові параметри. Необхідні данні показані у таблиці 12.1.

Таблиця 12.1

Процеси	Зміст процесу	Безпосередньо попередні процеси	Тривалість, тижні
A, B	Розробка технічної документації (ТД) на прилад та його електронну частину	–	A – 3, B – 2
C, D	Розробка технологічної документації на електронну частину приладу та прилад	A, B	C – 2, D – 2
E	Передача ТД на прилад	A	3

F	Виготовлення приладів	C	7
G	Виготовлення електронної частини приладів	D, E	3
H, I	Розробка ТД на експлуатацію приладу та електронну частину приладу	C, D	H – 5, I – 2
J	Зборка та випробування приладу	F, G	6

Розв'язання.

1. На основі даних таблиці 12.1 будемо мережевий графік створення приладу з урахуванням рекомендацій 1 – 7 (рис. 12.9).

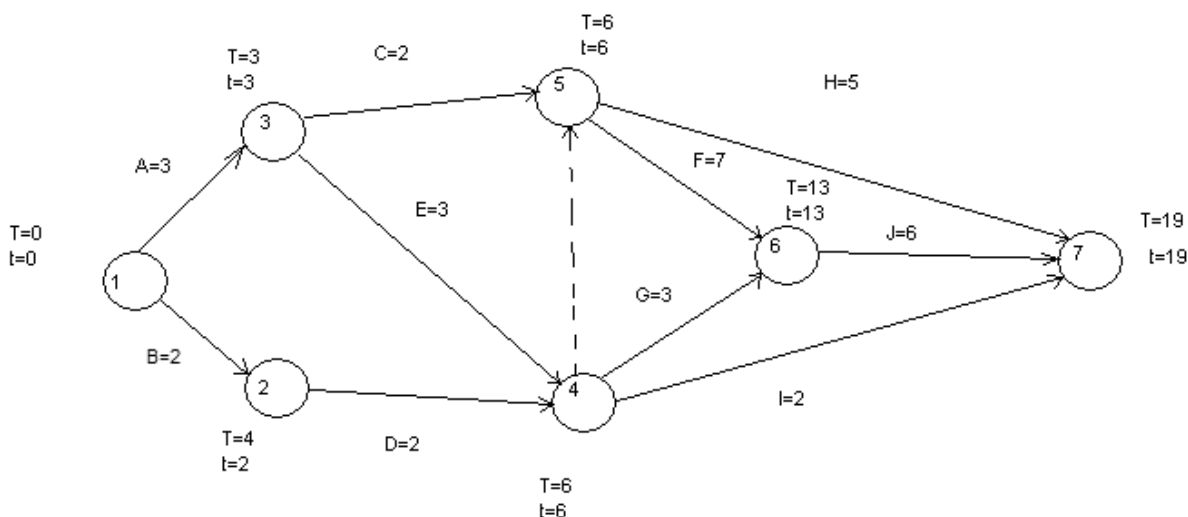


Рис. 12.9

2. Знайдемо критичний шлях до мережі проекту.

Прямий прохід:

Вершина 1. Припускаємо $t_1 = 0$.

Вершина 2. $t_2 = t_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2$.

Вершина 3. $t_3 = t_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3$.

$$\text{Вершина 4. } t_4 = \max\{t_2 + d_{24}, t_3 + d_{34}\} = \max\{2 + 2, 3 + 3\} = 6.$$

$$\text{Вершина 5. } t_5 = \max\{t_3 + d_{35}, t_4 + d_{45}\} = \max\{3 + 2, 6 + 0\} = 6.$$

$$\text{Вершина 6. } t_6 = \max\{t_4 + d_{46}, t_5 + d_{56}\} = \max\{6 + 3, 6 + 7\} = 13.$$

$$\text{Вершина 7. } t_7 = \max\{t_4 + d_{47}, t_5 + d_{57}, t_6 + d_{67}\} = \max\{6 + 2, 6 + 5, 13 + 6\} = 19.$$

Прямий прохід завершений та розрахунки показують, що проект можна виконати за 19 тижнів.

Зворотній прохід:

$$\text{Вершина 7. Припускаємо } T_7 = 19.$$

$$\text{Вершина 6. } T_6 = T_7 - d_{57} = 19 - 6 = 13.$$

$$\text{Вершина 5. } T_5 = \min\{T_7 - d_{57}, T_6 - d_{56}\} = \min\{19 - 5, 13 - 7\} = 6.$$

$$\text{Вершина 4. } T_4 = \min\{T_7 - d_{47}, T_6 - d_{46}, T_5 - d_{45}\} = \min\{19 - 2, 13 - 3, 6 - 0\} = 6.$$

$$\text{Вершина 3. } T_3 = \min\{T_5 - d_{35}, T_4 - d_{34}\} = \min\{6 - 2, 6 - 3\} = 3.$$

$$\text{Вершина 2. } T_2 = T_4 - d_{24} = 6 - 2 = 4.$$

$$\text{Вершина 1. } T_1 = \min\{T_3 - d_{13}, T_2 - d_{12}\} = \min\{3 - 3, 4 - 2\} = 0.$$

Результати обчислень показані на рис. 12.9. Правила визначення критичний процесів показують, що критичний шлях складають процеси $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$.

3. Побудуємо часовий графік проекту (рис. 12.10).

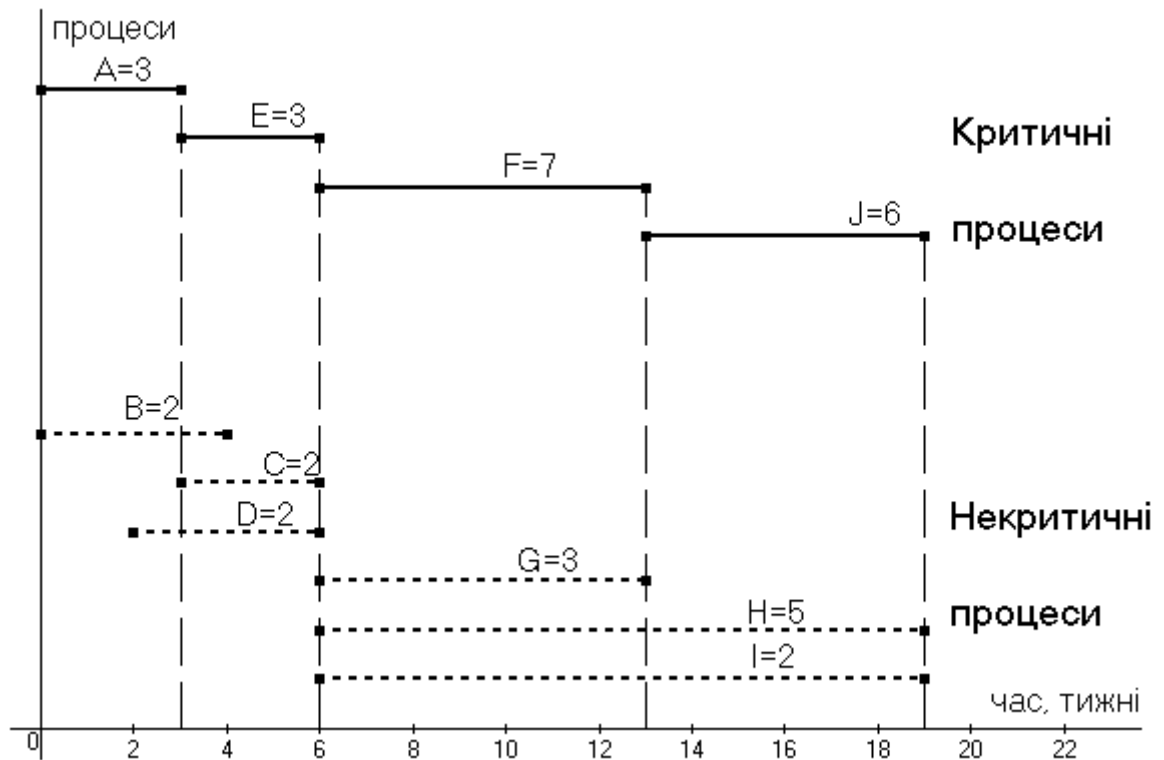


Рис. 12.10

4. Визначимо запаси часу для некритичних процесів.

Загальні та вільні запаси часу некритичних процесів подані у таблиці 12.2.

Таблиця 12.2

Некритичний процес	Тривалість процесу	Загальний запас часу $\tau_{заг}$	Вільний запас часу $\tau_{віль}$	“Червоний прапорець”
B (1, 2)	2	$4-0-2=2$	$2-0-2=0$	+
C (3, 5)	2	$6-3-2=1$	$6-3-2=1$	
D (2, 4)	2	$6-2-2=2$	$6-2-2=2$	
G (4, 6)	3	$13-6-3=4$	$13-6-3=4$	
H (5, 7)	5	$19-6-5=8$	$19-6-5=8$	
I (4, 7)	2	$19-6-2=11$	$19-6-2=11$	

Правило “червоного прапорця” слід застосовувати до процесу В, оскільки для нього $\tau_{вил} < \tau_{заг}$. Всі інші процеси (С, D, G, H, I) мають $\tau_{вил} = \tau_{заг}$, тому вони можуть виконуватись у будь-який час всередині своїх максимальних інтервалів часу виконання.

Розглянемо процес В, який відмічений “червоним прапорцем”. Оскільки $\tau_{заг} = 2$ тижні, то він може починатися у будь-який тиждень з інтервалу 0-2 тижні від початку виконання всього проекту. Але так як $\tau_{вил} = 0$, то початок процесу В в 1-й та 2-й тижні від початку проекту потребує зсуву процесу D на 1, 2 тижні відповідно від свого найранішого початку. А це в свою чергу вплине на початок процесів G та I.

12.3. МІНІМІЗАЦІЯ МЕРЕЖІ

Мінімізація мережі або алгоритм побудови мінімального кістяку дерева передбачає з'єднання усіх вершин мережі за допомогою ребер найменшої довжини. Типовою задачею, для розв'язання якої необхідний такий алгоритм, є проектування мережі доріг з твердим покриттям, які з'єднують населені пункти у сільській місцевості, де дороги, що з'єднують два яких-небудь пункти, можуть проходити через інші населені пункти. Найбільш економний проект дорожньої системи повинен мінімізувати загальну довжину доріг з твердим покриттям.

Алгоритм мінімізації мережі. Починають з будь-якої вершини та з'єднують її з найближчою вершиною мережі. З'єднані дві вершини утворюють зв'язану множину, а інші незв'язану. Далі в незв'язаній множині вибирають вершину, яка розміщена ближче інших до будь-якої вершини зв'язаної множини. До зв'язаної множини додається, а з незв'язаної множини вибуває відповідна вершина. Процес повторюють до тих пір, доки у зв'язану множину не попадуть усі вершини мережі. У випадку однаково віддалених вершин обирають будь-яку з них, що вказує на альтернативність (неоднозначність) мінімального кістяка дерева.

Приклад 12.2. Планується газифікувати п'ять невеликих сіл (рис. 12.11) Числа на ребрах вказують довжину газових труб (в км). Вершина 1 вже газифікована. Відсутність ребра між двома вершинами означає, що з'єднання відповідних сіл або пов'язане з великими витратами, або неможливе. Знайти таке з'єднання трубами сіл, при якому довжина їх була мінімальною.

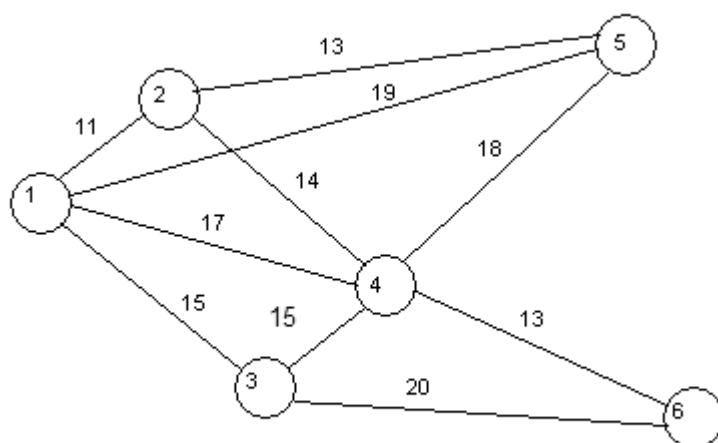


Рис. 12.11

Розв'язання. Шляхи (1, 3) та (3, 4) є альтернативними. Мінімальна довжина газових труб $11+13+14+13+15=66$ км (рис. 12.12).

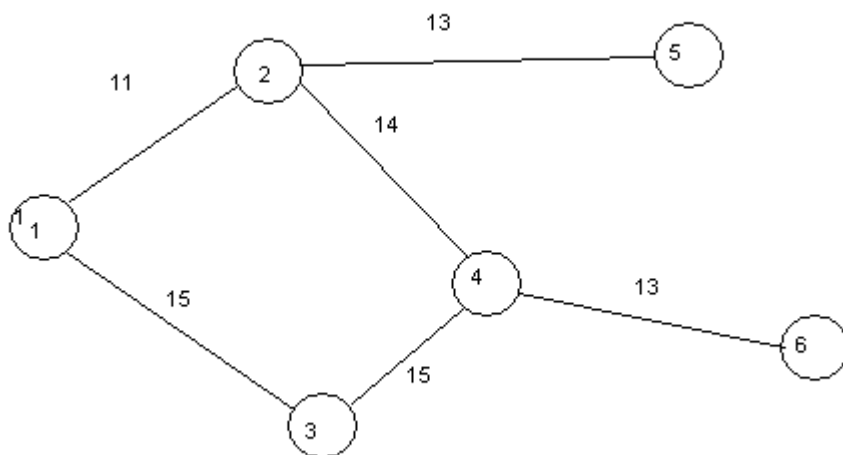


Рис. 12.12

12.4. ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙКОРОТШОГО ШЛЯХУ

Задача полягає у знаходженні зв'язаних між собою доріг на транспортній мережі, які у сукупності мають мінімальну довжину від вихідного пункту до пункту призначення.

Введемо позначення:

d_{ij} – відстань на мережі між сусідніми вершинами i та j , довжина ребра (i, j) ;

M_j – найкоротша відстань від вихідної вершини 1 до вершини j , $M_1 = 0$.

Формула для обчислення M_j :

$$M_j = \min_i \left\{ \begin{array}{l} \text{Сума найкоротшої відстані до попередньої вершини} \\ \text{та відстані між поточною вершиною } j \\ \text{та попередньою } i \end{array} \right\} = \min_i \{M_i + d_{ij}\}$$

З формули видно, що найкоротшу відстань M_j до вершини j можна обчислити лише після того, як визначена найкоротша відстань до кожної попередньої вершини i , яка з'єднана ребром з вершиною j . Процедура завершується, коли отримано M_i останньої ланки.

Приклад 12.3. (Задача заміни автомобільного парку). Фірма, що займається прокатом автомобілів, планує заміну автопарку на наступні п'ять років. Автомобіль повинен пропрацювати не менше одного року, перш ніж фірма поставить питання про його заміну. На рис. 12.13 наведені вартості заміни автомобілів в умовних грошових одиницях, які залежать від часу заміни і кількості років, протягом яких автомобіль знаходиться в експлуатації.

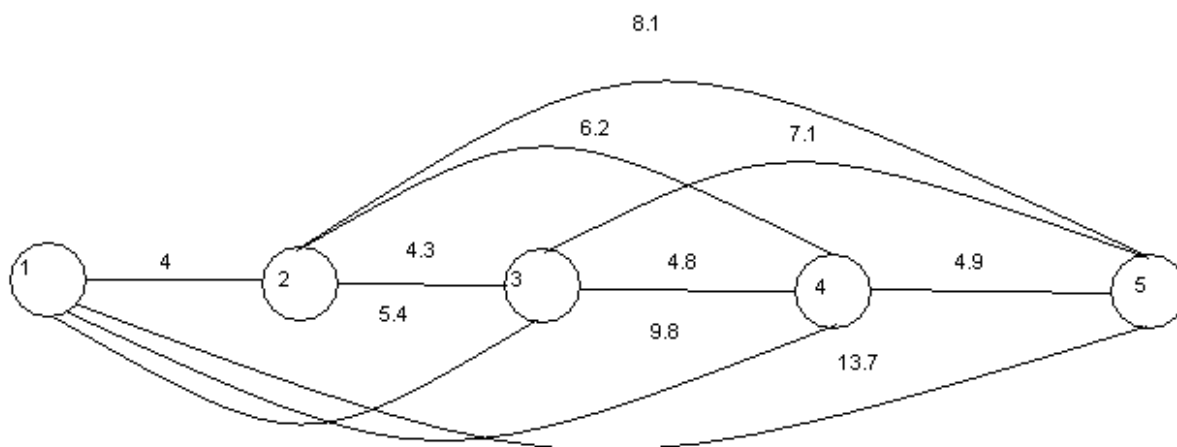


Рис. 12.13

Визначити план заміни автомобілів, який забезпечує при цьому мінімальні витрати.

Розв'язання. Знайдемо мінімальні відстані:

$$M_1 = 0;$$

$$M_2 = M_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4;$$

$$M_3 = \min\{M_1 + d_{13}; M_2 + d_{23}\} = \min\{0 + 5,4; 4 + 4,3\} = 5,4;$$

$$M_4 = \min\{M_1 + d_{14}; M_2 + d_{24}; M_3 + d_{34}\} = \min\{0 + 9,8; 4 + 6,2; 5,4 + 4,8\} = 9,8;$$

$$M_5 = \min\{M_1 + d_{15}; M_2 + d_{25}; M_3 + d_{35}; M_4 + d_{45}\} = \\ = \min\{0 + 13,7; 4 + 8,1; 5,4 + 7,1; 9,8 + 4,9\} = 12,1$$

Найкоротший шлях $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$, вартість якого 12,1 ум. гр. од. Це означає, що кожен автомобіль замінюється через два роки а через п'ять років списується.

12.5. ВРАХУВАННЯ ВАРТІСНИХ ФАКТОРІВ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕРЕЖЕВОГО ГРАФІКА

Вартісні фактори при реалізації мережевого графіка враховуються шляхом визначення залежності “витрати – тривалість” для кожної операції.

На рис. 12.14 показана лінійна залежність вартості операції від її тривалості.

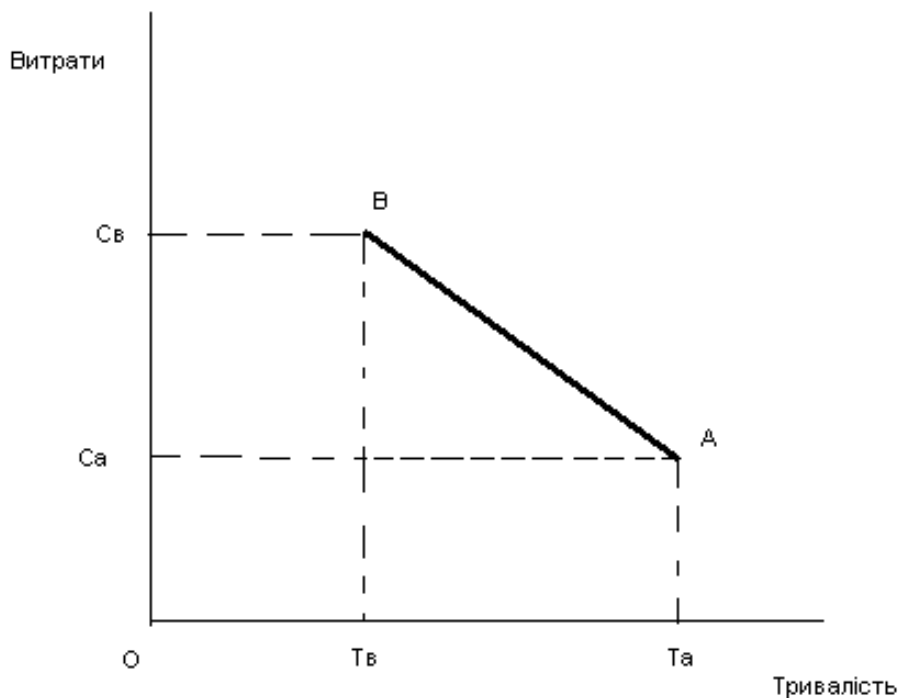


Рис. 12.14

Точка $A(T_A; C_A)$ відповідає нормальному режиму виконання операції (T_A – тривалість операції, C_A – її вартість).

Тривалість операції можна зменшити (стиснути), якщо збільшити інтенсивність використання ресурсів. При цьому збільшується вартість операції. Однак існує границя, яка називається *мінімальною тривалістю* операції. Подальше збільшення інтенсивності використання ресурсів приведе лише до збільшення витрат без скорочення тривалості операції. Ця границя визначається точкою максимальної інтенсивності (точка В на рис. 12.14).

Лінійна залежність “витрати-тривалість” приймається з міркувань зручності, так як її можна визначити для будь-якої операції за двома точками нормального і максимального режимів, тобто за точками А і В.

Скорочення тривалості виконання робіт можна досягти за рахунок зменшення тривалості якої-небудь критичної операції. Тільки критичні операції підлягають аналізу. Для того щоб досягти скорочення тривалості виконання робіт при мінімально можливих витратах, необхідно в ма-

ксамально допустимій степені стиснути ту критичну операцію, у якій нахил залежності “витрати-тривалість” найменший. В наслідок стиснення критичної операції отримують новий календарний графік, можливо, з новим критичним шляхом. Вартість робіт при новому календарному графіку буде вищою за попередній графік. На наступному етапі цей новий графік знов стискають за рахунок іншої критичної операції з мінімальним нахилом залежності “витрати-тривалість”. Подібна процедура повторюється до тих пір, доки всі критичні операції не будуть знаходитись в режимі максимальної інтенсивності.

Обґрунтування привабливості інвестування проекту

Для фінансування проектів по будівництву і налагодженню виготовлення продукції у більшості випадків фірми залучають інвестиції. Включення в проекти матеріалів з оптимізацією мережевих моделей у частині обґрунтування термінів повернення інвестицій роблять проекти більш привабливими та сприяє прийняттю інвестором позитивного рішення.

Приклад 12.4. Підприємство для покращення свого фінансового стану вирішило налагодити випуск морозива. Для переобладнання робочих приміщень (дільниці) під випуск морозива необхідно виконати наступні операції:

- 1) підготовка технічного завдання на переобладнання дільниці (30 дн.);
- 2) замовлення та доставка нового обладнання (60 дн.);
- 3) замовлення та доставка нового електрообладнання (50 дн.);
- 4) демонтування старого та встановлення нового обладнання (90 дн.);
- 5) демонтування старого та встановлення нового електрообладнання (80 дн.);
- 6) перенавчання персоналу (30 дн.);
- 7) випробування та здача в експлуатацію обладнання для виробництва морозива (20 дн.).

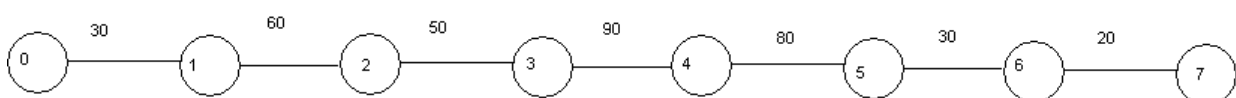
Очікується, що продуктивність після введення нової лінії буде складати 20 т морозива за зміну. Прибуток від реалізації 1 т продукції буде складати 0,5 тис. грн. за зміну. Кошти на закупівлю і переобладнання ділянки у розмірі 2000 тис. грн. були взяті в банку під 20% річних (з розрахунку 1500 тис. грн. на закупівлю обладнання і 500 тис. грн. на роботи по демонтажу старого обладнання та встановлення нового обладнання). Витрати на проведення робіт в нормальному і максимальному режимах вказані в таблиці 12.3.

Визначити через який час може бути повернений кредит у банк.

Таблиця 12.3

Робота	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість, дн.	Витрати, тис. грн	Тривалість, дн.	Витрати, тис. грн.
1	30	20	25	30
2	60	40	45	60
3	50	30	40	40
4	90	70	70	100
5	80	60	65	70
6	30	25	20	25
7	20	20	17	25
Всього	360	265	282	350

Розв'язання. 1. Складемо графік проведення робіт.



На проведення переобладнання необхідно

$$30+60+50+90+80+30+20=360 \text{ дн.}$$

2. Графік можна покращити, якщо виконувати деякі роботи паралельно. Отримуємо графік (рис. 12.15).

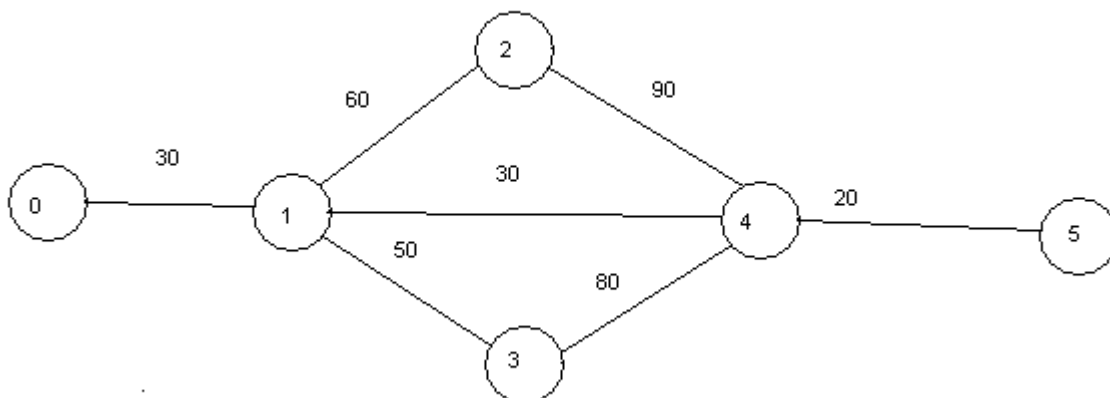


Рис. 12.15

На цьому графіку позначені роботи:

- (0,1) – підготовка технічного завдання;
- (1,2) – замовлення і постачання нового обладнання;
- (1,3) – замовлення і постачання нового електрообладнання;
- (1,4) - перенавчання персоналу;
- (2,4) – встановлення нового обладнання;
- (3,4) – встановлення нового електрообладнання;
- (4,5) – здача в експлуатацію нової лінії.

За графіком шляхи мають такі тривалості:

- $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$: 200 дн.
- $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$: 180 дн.
- $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$: 80 дн.

Критичним шляхом графіка є шлях $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$.

Графік покращився порівняно з початковим на $360-200=160$ дн.

Визначимо через який час після початку робіт може бути повернений кредит у банк.

Через 200 дн. після початку робіт підприємство витратить 1500 тис. грн. на придбання обладнання і 265 тис. грн. на його встановлення та здачу в експлуатацію (табл. 12.3, нормальний режим). В наявності у підприємства залишається

$$2000 - 1500 - 265 = 235 \text{ тис. грн.}$$

Побудуємо графік зміни кредиту та отримання прибутку в залежності від часу.

Зміна кредиту в залежності від часу є лінійною, причому відомі дві точки цієї залежності. Через 360 дн. після отримання кредиту під 20% річних борг підприємства буде складати 2400 тис. грн. Отже відомі дві точки A(0; 2000) і B(360; 2400).

Складемо рівняння прямої що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y - 2000}{2400 - 2000} = \frac{x - 0}{360 - 0},$$

$$10x - 9y + 18000 = 0 \quad (\text{рис. 12.16, пряма AB}).$$

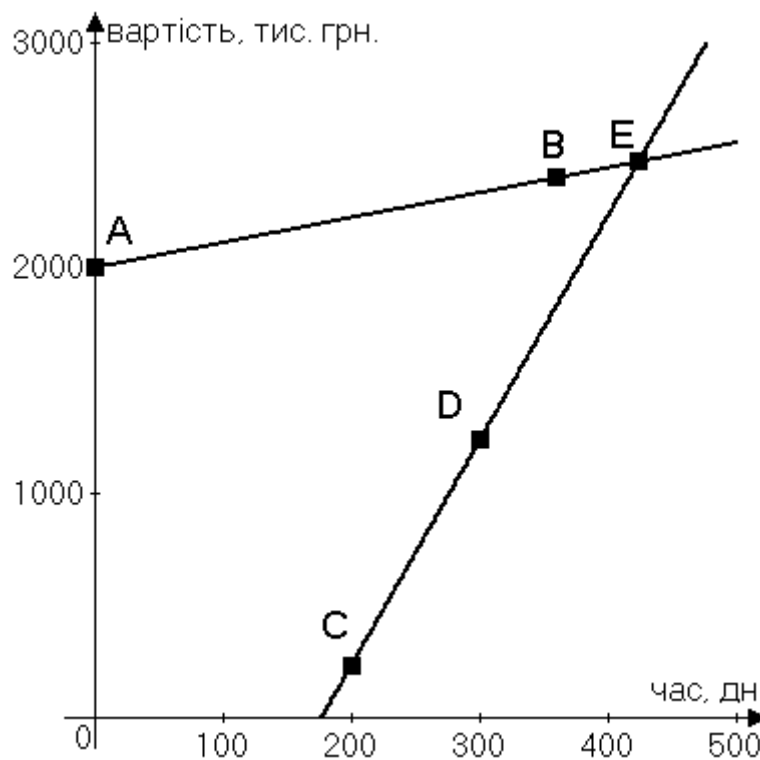


Рис. 12.16

Знайдемо рівняння прибутку підприємства. Відомо, що через 200 дн. після початку робіт, від кредиту залишилось 235 тис. грн. Через 100 дн. після початку випуску продукції (300 дн. після початку робіт) підприємство отримує прибуток

$$0,5 \cdot 20 \cdot 100 = 1000 \text{ тис. грн.}$$

і в нього в наявності буде

$$1000 + 235 = 1235 \text{ тис. грн.}$$

Отже, маємо дві точки $C(200; 235)$, $D(300; 1235)$. Тоді

$$\frac{y - y_C}{y_D - y_C} = \frac{x - x_C}{x_D - x_C}, \quad \frac{y - 235}{1235 - 235} = \frac{x - 200}{300 - 200},$$

$$10x - y - 1765 = 0 \text{ (рис. 12.16, пряма CD).}$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$10x - 9y + 18000 = 0,$$

$$10x - y - 1765 = 0,$$

отримуємо координати точки E:

$$x = 423,6; \quad y = 2471.$$

Таким чином, при нормальному режимі роботи кредит в банк може бути повернений через $423,6 \approx 424$ дні.

3. Графік виконання робіт може бути стиснутий за рахунок виконання деяких операцій у максимально інтенсивному режимі (стисненню повинні підлягати тільки критичні операції).

Перед аналізом критичних операцій визначаються нахили залежності “витрати-тривалість” для кожної операції (наприклад (0,1): $(30-20)/(25-30)=-2$). Результати розрахунків наведені у таблиці 12.4 (нахили подані за абсолютною величиною).

Таблиця 12.4

Операція	(0,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,5)
Нахил	2	1,3	1	1	1,5	0,7	1,7

Враховуючи нахили кривої виконуємо стиснення та обчислюємо вартість стиснення (таблиця 12.5).

Таблиця 12.5

Операція, яка підлягає стисненню	Критичний шлях після операції	Тривалість критичного шляху	Вартість стиснення тис. грн
(1,2)	0-1-2-4-5	185	60 - 40=20
(2,4)	0-1-3-4-5	180	100 - 70=30
(3,4)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	165	70 - 60=10
(4,5)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	162	25 - 20=5
(0,1)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	157	30 - 20=10

Новий графік має два критичних шляхи : 0 → 1 → 2 → 4 → 5 та 0 → 1 → 3 → 4 → 5 (рис. 12.17). Тривалість критичного шляху 157 дн.

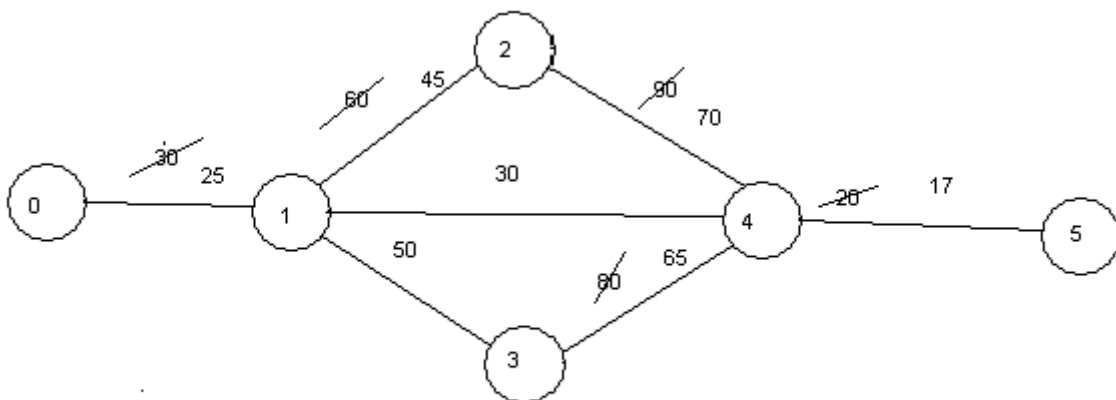


Рис. 12.17

Отже, критичний шлях скорочений з 200 до 157 дн., а це означає, що підприємство почне виробляти морозиво через 157 дн. після початку

робіт. При цьому стиснення операцій (1,2), (2,4), (3,4), (4,5), (0,1) обійдеться підприємству в

$$20+30+10+5+10=75 \text{ тис. грн.}$$

Графік зміни кредиту в залежності від часу залишається попереднім

$$10x - 9y + 18000 = 0.$$

Знайдемо рівняння прибутку. Через 157 дн. після початку робіт у підприємства залишиться коштів

$$2000-1500-265-75 = 160 \text{ тис. грн.}$$

Через 100 дн. після початку випуску продукції підприємство отримує прибуток

$$0,5 \cdot 20 \cdot 100 = 1000 \text{ тис. грн.}$$

та у нього в наявності буде коштів

$$1000 + 160 = 1160 \text{ тис. грн.}$$

Отже маємо дві точки $C'(154;160)$ $D'(257;1160)$.

Рівняння прямої:

$$\frac{y-160}{1160-160} = \frac{x-157}{257-157}, \quad 10x - y - 1410 = 0.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$10x - 9y + 18000 = 0,$$

$$10x - y - 1410 = 0,$$

та визначаємо $x=383,6$, $y=2426,25$.

Таким чином, через $383,6 \approx 384$ дн. підприємство може повернути кредит у банк. Порівняно з попереднім випадком воно повертає кошти раніше на

$$424-384=40 \text{ дн.}$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що собою являє мережева модель планування?
2. Які основні елементи моделі мережевого планування?
3. Яких правил необхідно дотримуватись при побудові мережевих моделей?
4. Які процеси називаються критичними, які не критичними?
5. Чим відрізняються загальний та вільний запаси часу?
6. Зміст правила "червоного прапорця".
7. У чому полягає алгоритм мінімізації мережі?
8. Який зміст задачі знаходження найкоротшого шляху?
9. Як враховуються вартісні фактори при реалізації мережевого графіку?

ВПРАВИ

12.1. Районною адміністрацією прийнято рішення про газифікацію одного з невеликих сіл району, яке має 10 житлових будинків. Розміщення будинків вказані на рис. 12.18. Вершина 11 є газорозподільною станцією.

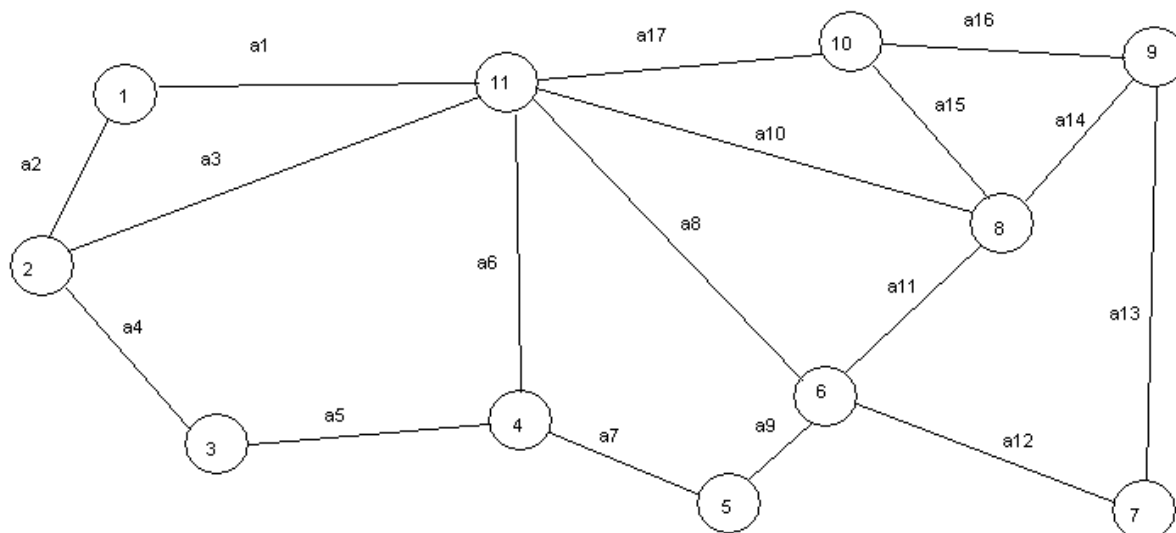


Рис. 12.18

Відсутність ребра між двома вершинами означає що з'єднання відповідних будинків газовою трубою неможливе.

Розробити такий план газифікації села, щоб загальна довжина трубопроводів була найменшою.

Значення коефіцієнтів умови задачі:

№ варіант. \ значення	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1	200	180	220	150	170	190	230	160	210	240
A2	60	70	50	40	80	70	30	100	90	40
A3	250	270	290	220	230	240	280	250	260	300
A4	110	130	120	140	100	150	200	170	190	180
A5	150	140	110	100	120	130	160	150	140	110
A6	300	320	310	350	330	360	340	310	290	370
A7	80	90	70	100	60	50	70	40	50	90

A8	350	370	360	390	340	380	330	390	360	400
A9	120	130	140	190	150	180	170	160	140	160
A10	400	440	420	430	470	450	410	460	440	470
A11	210	190	200	210	220	180	230	170	180	190
A12	40	50	30	60	80	70	90	80	50	40
A13	120	130	150	120	100	170	160	70	90	110
A14	30	40	50	60	30	50	80	70	90	40
A15	70	50	40	60	30	80	70	90	40	50
A16	20	40	30	50	30	70	20	60	40	50
A17	550	580	570	590	530	520	560	630	600	610

12.2. Автотранспортному підприємству треба засвоїти новий маршрут між містами А і В. На рис. 12.19 подані різні маршрути слідування з А до В, які проходять через декілька населених пунктів. Відстані вказані в кілометрах. Визначити найкращий шлях слідування автобусів з міста А до міста В.

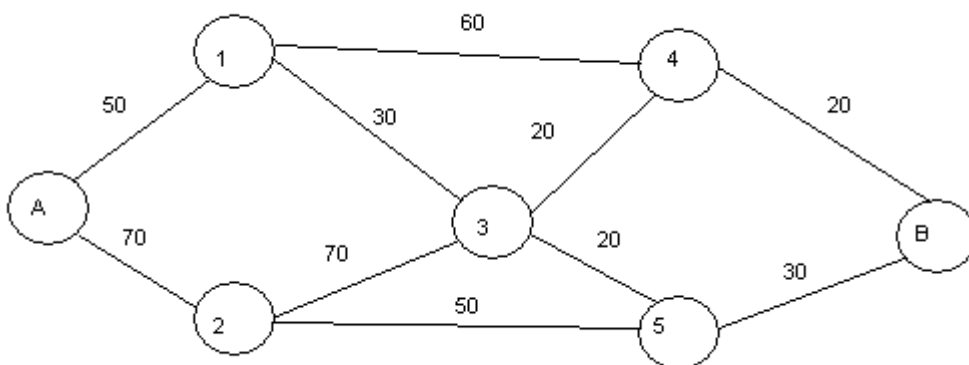


Рис. 12.19

12.3. Пожежній службі необхідно визначити найкоротший шлях від гаража (пункт А) до нафтопереробного заводу (пункт В) за даними в кілометрах, які вказані на рис. 12.20.

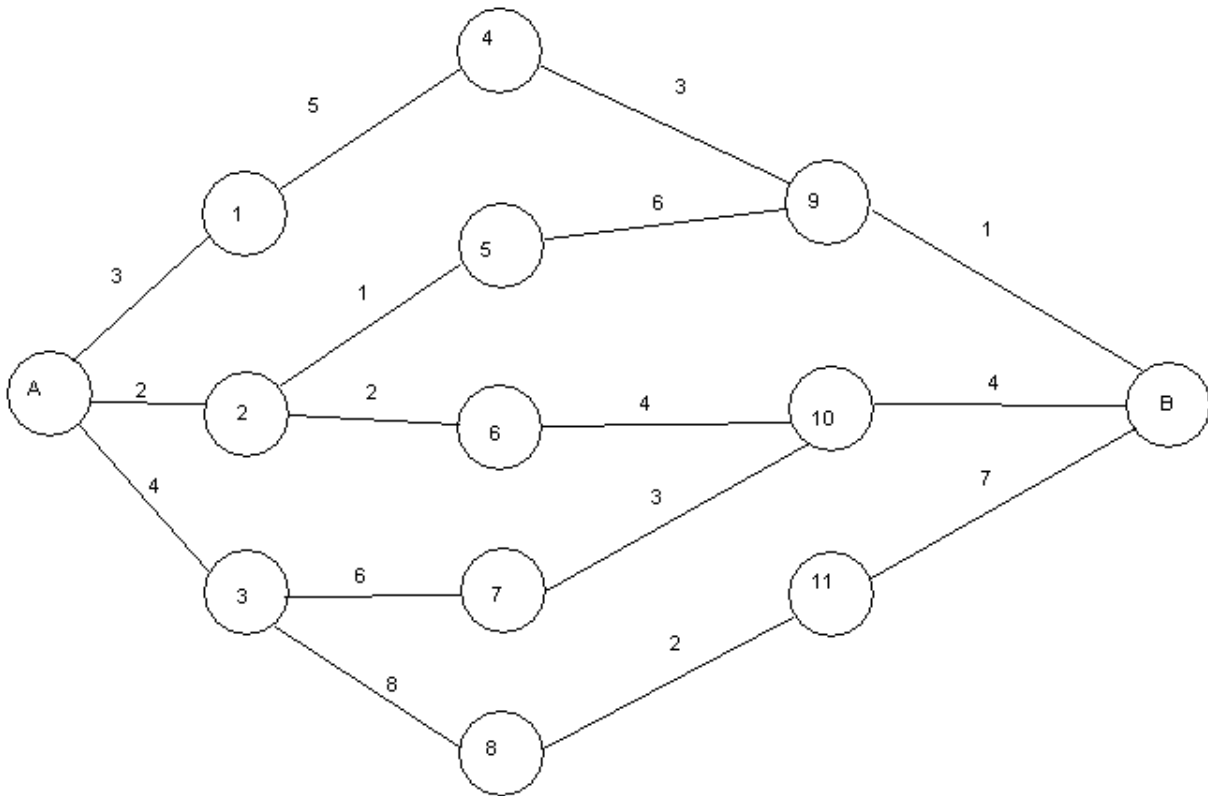


Рис. 12.20

12.4. Фірма по прокату DVD-дисків планує їх заміну на наступні п'ять років. Партія дисків повинна експлуатуватись не менше одного року перш ніж її замінюють. На рис. 12.21 наведені вартості заміни партії дисків (в тис. грн.), які залежать від часу заміни і кількості років, протягом яких диски знаходяться в експлуатації.

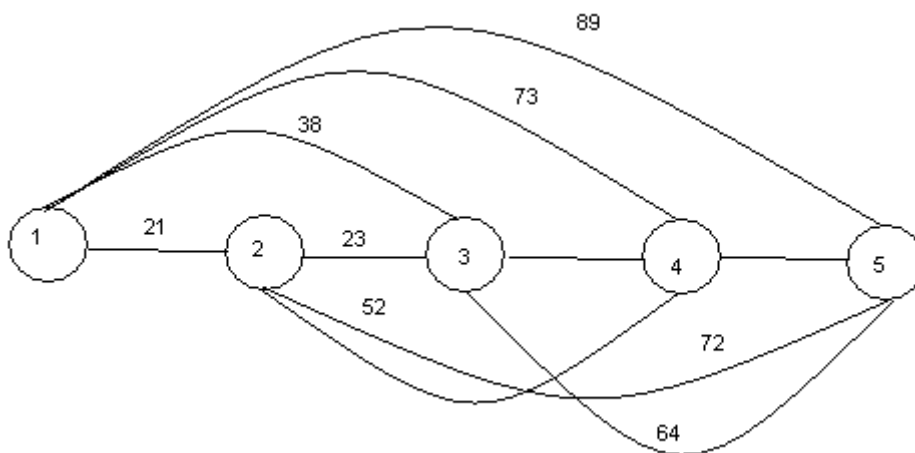


Рис. 12.21

12.5. Побудувати мережевий графік, розрахувати часові параметри графіка та побудувати план виконання робіт для даних які подані у таблиці

Таблиця 12.6

Зміст роботи	Позначення	Попередня робота	Тривалість днів
Складання кошторису	A1		10
Замовлення та доставка обладнання	A2	A1	15
Розподіл кадрів	A3	A1	5
Встановлення обладнання	A4	A2	20
Підготовка кадрів	A5	A3	9
Оформлення торгового залу	A6	A4	8
Доставка товарів	A7	A5	7
Замовлення і отримання цінників	A8	A5	5
Замовлення і отримання форми	A9	A5	6
Викладення товарів	A10	A6, A7	3
Заповнення цінників	A11	A8	4
Генеральна репетиція	A12	A9, A10, A11	2

12.6. Побудувати графік робіт, визначити критичний шлях, вартість робіт при нормальному режимі, критичний шлях і мінімальну вартість робіт при максимальному режимі. Вихідні дані наведені:

а) у таблиці 12.7;

б) у таблиці 12.8.

Таблиця 12.7

Операція	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість днів	Вартість грн.	Тривалість днів	Вартість грн.
(1,2)	4	80	2	150
(1,3)	2	50	1	70
(1,4)	3	60	2	80
(2,4)	2	60	1	70
(2,6)	6	100	3	160
(3,4)	2	40	1	60
(3,5)	3	70	2	90
(4,6)	4	90	2	170
(5,6)	4	80	2	160

Таблиця 12.8

Операція	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість днів	Вартість грн.	Тривалість днів	Вартість грн.
(1,2)	5	110	4	130
(1,3)	3	70	2	90
(1,4)	2	50	1	60
(2,4)	3	60	2	80
(2,6)	4	80	2	110
(3,4)	2	60	1	70
(3,5)	6	110	4	150
(4,6)	3	70	2	80
(5,6)	5	100	2	150

12.7. Для покращення фінансового стану підприємству необхідно збільшити попит на цемент марки М400, що випускається, та розширити споживацький ринок. Підприємство вважає доцільним упаковувати цемент у спеціалізованій тарі. Для переоснащення цеху необхідно встановити обладнання з виробництва спеціалізованої тари. Передбачається виконати наступне:

- 1) підготовка і випуск технічного завдання на переобладнання цеху (20 дн.);
- 2) розробка заходів з техніці безпеки (25 дн.);
- 3) підбір кадрів (10 дн.);
- 4) замовлення і доставка необхідного обладнання (30 дн.);
- 5) замовлення і доставка електрообладнання (40 дн.);
- 6) встановлення обладнання (50 дн.);
- 7) встановлення електрообладнання (45 дн.);
- 8) навчання персоналу (15 дн.);
- 9) випробування і здача в експлуатацію лінії (25 дн.).

Очікується, що продуктивність лінії з виробництва тари буде складати 1000 мішків за одну зміну. Вартість одного мішка – 2,5 грн., виручка від реалізації тари за зміну – 2,5 тис. грн., з яких чистий прибуток підприємства дорівнює 0,5 тис. грн. Кошти на закупівлю обладнання та пе-

реоснащення цеху в розмірі 550 тис. грн. взяті в банку під 30% річних із розрахунку 500 тис. грн. на обладнання і 50 тис. грн. на його встановлення.

Витрати на проведення робіт та їх тривалість у нормальному і максимальному режимах наведені в таблиці 12.9.

Таблиця 12.9

Робота	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість дн.	Витрати тис. грн.	Тривалість дн.	Витрати тис. грн.
1	20	2	18	2,6
2	25	3	20	3,7
3	10	0,5	9	0,7
4	30	6	23	6,4
5	40	6,5	32	7,8
6	50	9	43	10
7	45	8	41	8,5
8	15	0,5	9	1
9	25	5	21	5,7

Скласти графік проведення робіт, визначити критичний шлях і вартість робіт при нормальному режимі робіт.

Провести "стиснення". Визначити, через який час після початку випуску тари фірма може повернути кредит банку, та мінімальну сумарну вартість робіт.

РОЗДІЛ 13

ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

13.1. КЛАСИФІКАЦІЯ УМОВ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

На практиці часто приходиться мати справу із задачами, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, коли параметри, від яких залежить успіх операції, невідомі, і немає ніяких даних, які дозволяють судити про те, які їх значення більше, а які – менше імовірні.

Отже, оптимальність обраного рішення залежить від якості даних, які використовуються при описаній ситуації, в якій приймається рішення. З цієї точки зору процес прийняття рішень може належати до одних з трьох можливих умов:

1. Прийняття рішень в умовах *визначеності*, коли дані відомі точно.
2. Прийняття рішень в умовах *ризик* (*стохастичної невизначеності*), коли дані можна описати за допомогою імовірнісних розподілів.
3. Прийняття рішень в умовах *невизначеності*, коли даним не можна приписати відносні вагові коефіцієнти, які відображали їх ступінь значущості у процесі прийняття рішень.

По суті, в умовах визначеності дані надійно визначені, в умовах невизначеності вони не визначені. Це не означає, що в умовах невизначеності повністю відсутня інформація про задачу. Мова йде про те, що дані задачі важко або неможливо класифікувати за ступенем значущості їх для прийняття рішення і що для цих даних, які розглядаються як реалізації випадкових величин або процесів, невідома або не може бути визначена функція розподілу або інші статистичні характеристики. Отже, прийняття рішення в умовах ризику являє собою проміжний випадок.

13.2. МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Моделі лінійного програмування є прикладом прийняття рішень в умовах визначеності. Ці моделі застосовані лише у тих випадках, коли альтернативні розв'язки можна зв'язати між собою точними лінійними функціями. У цьому параграфі розглянемо інший підхід до прийняття рішень в ситуаціях, коли, наприклад, для ідей, почуттів, емоцій визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу віддання переваг для можливих альтернативних розв'язків. Цей підхід відомий як *метод аналізу ієрархій*.

Перед тим як викласти деталі даного методу, розглянемо приклад, який демонструє спосіб, за допомогою якого оцінюються різні альтернативні розв'язки.

Приклад 13.1. Випускник-відмінник середньої школи робить вибір серед трьох університетів *A*, *B* і *C* з метою отримання вищої освіти. Він сформулював два основних критерії: місцезнаходження університету і його академічна репутація. Будучи відмінним учнем, він оцінює академічну репутацію університету у п'ять разів вище, ніж його місцезнаходження. Це приводить до того, що репутації університету приписують вагу наближено 83%, а його місцезнаходженню – 17%. Далі випускник використовує системний аналіз (сутність його викладається нижче) для оцінки трьох університетів з точки зору їх місцезнаходження і репутації. Проведений аналіз дає оцінки наведені у таблиці 13.1.

Таблиця 13.1

	Університет		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
Місцезнаходження	12,9%	27,7%	59,4%
Репутація	54,5%	27,3%	18,2%

Розв'язання. Структура задачі прийняття рішень приведена на рис. 13.1. Задача має єдиний ієрархічний рівень з двома критеріями (місцезнаходження і репутація) і три альтернативи (університети А, В, С).

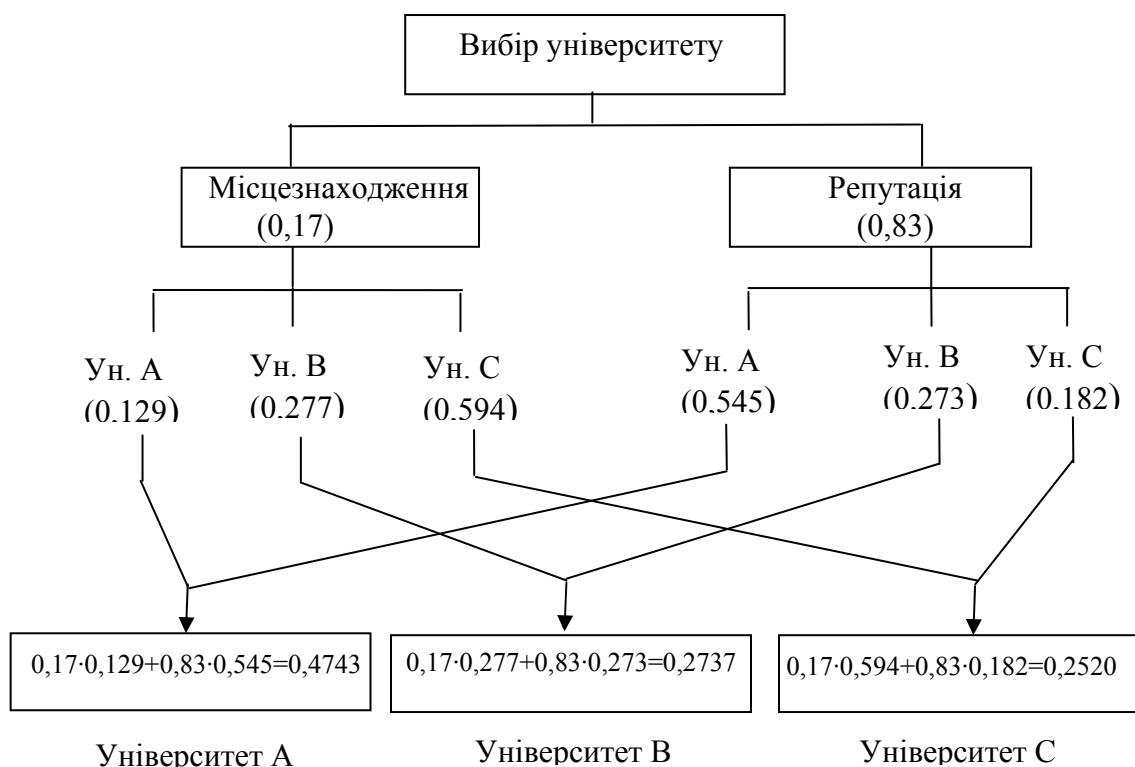


Рис. 13.1

Оцінка трьох університетів ґрунтується на обчисленні комбінованого вагового коефіцієнта для кожного з них.

Університет А: $0,17 \cdot 0,129 + 0,83 \cdot 0,545 = 0,4743$.

Університет В: $0,17 \cdot 0,277 + 0,83 \cdot 0,273 = 0,2737$.

Університет В: $0,17 \cdot 0,594 + 0,83 \cdot 0,182 = 0,2520$.

На основі цих обчислень університет А отримує найвищу комбіновану вагу і є найбільш оптимальним вибором учня.

Загальна структура метода аналізу ієрархій може містити декілька ієрархічних рівнів зі своїми критеріями.

Складність метода аналізу ієрархій полягає у визначенні відносних вагових коефіцієнтів (таких, які були використані у прикладі 11.1) для оцінки альтернативних рішень. Якщо є n критеріїв на заданому рівні ієрархії, то відповідна процедура приводить до утворення матриці A роз-

мірності $n \times n$, яку називають *матрицею парних порівнянь*, що відображає висновки особи, яка приймає рішення, відносно важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у стрічці i ($i = 1, 2, \dots, n$) оцінюється відносно кожного з критеріїв, які представлені n стовпцями. Позначимо через a_{ij} елемент матриці A , який знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпця. Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. При цьому $a_{ij} = 1$ означає, що i -й і j -й критерії однаково важливі, $a_{ij} = 5$ відображає думку, що i -й критерій значно важливіший за j -й, а $a_{ij} = 9$ вказує на те, що i -й критерій надзвичайно важливіше j -го. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно. Узгодженість таких позначень забезпечується наступною умовою: якщо $a_{ij} = d$, то автоматично $a_{ji} = 1/d$. Крім того, усі діагональні елементи a_{ij} матриці A повинні бути рівними 1, так як вони виражають оцінку критерію відносно самих себе.

Приклад 13.2. Покажемо, як визначається матриця порівняння A для задачі прикладу 13.1.

Розв'язання. Почнемо з головного ієрархічного рівня, який має справу з критеріями академічної репутації університету і його місцем знаходження.

З точки зору випускника академічна репутація університету значно важливіша ніж його місцезнаходження. Отже, він надає елементу (1, 2) матриці A значення 5, тобто $a_{12} = 5$. Це автоматично передбачає, що $a_{21} = 1/5$. Позначивши через R і L критерії репутації університету і його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння наступним чином.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} R & L \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ L \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Відносні вагові коефіцієнти критеріїв R і L можуть бути визначені шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця. Отже, для нормалізації матриці A ділимо елементи першого стовпця на величину $1+1/5=6/5$, елементи другого – на величину $5+1=6$. Шукані відносні вагові коефіцієнти w_R і w_L критеріїв обчислюються тепер як середні значення відповідних рядків нормалізованої матриці A . Отже,

$$N = \begin{matrix} & R & L \\ \begin{matrix} R \\ L \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,83 & 0,83 \\ 0,17 & 0,17 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Середнє значення елементів рядків:

$$w_R = (0,83 + 0,83)/2 = 0,83;$$

$$w_L = (0,17 + 0,17)/2 = 0,17.$$

В результаті обчислень отримали $w_R = 0,83$ і $w_L = 0,17$, тобто ті вагові коефіцієнти, які показані на рис. 13.1. Стовпці матриці N однакові, що має місце лише у випадку, коли особа, що приймає рішення, виявляє ідеальну узгодженість у визначенні елементів матриці A . Ця теза детальніше обмірковується нижче.

Відносні вагові коефіцієнти альтернативних рішень, які відповідають університетам A , B і C , обчислюються в межах кожного критерію R і L з використанням наступних двох матриць порівняння.

$$A_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(1,83; 3,67; 5,5)$,

$$A_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(8; 3,5; 1,7)$.

Елементи матриць A_R і A_L визначені на основі міркувань випускника, які стосуються важливості трьох університетів.

При діленні елементів кожного стовпця матриць A_R і A_L на суму елементів цього ж стовпця отримуємо наступні нормалізовані матриці.

$$N_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0,545 \\ 0,273 & 0,273 & 0,273 \\ 0,182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad N_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,250 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Середні значення елементів рядків матриці N_R $w_{RA} = 0,545$, $w_{RB} = 0,273$ і $w_{RC} = 0,182$ дають відповідні вагові коефіцієнти для університетів А, В і С з точки зору академічної репутації. Аналогічно середні значення елементів рядків матриці N_L $w_{LA} = 0,129$, $w_{LB} = 0,277$ і $w_{LC} = 0,594$ є відносними ваговими коефіцієнтами, які стосуються місцезнаходження університетів.

В прикладі 13.2 можна відмітити, що всі стовпці нормалізованих матриць N і N_R ідентичні, а стовпці матриці N_L такими не є. Однакові стовпці вказують на те, що результуючі відносні вагові коефіцієнти зберігають одне й те ж значення незалежно від того, як виконується порівняння. У цьому випадку кажуть, що вихідні матриці порівняння A і A_R є узгодженими. Отже, матриця A_L не є узгодженою.

Узгодженість означає, що рішення буде узгоджене з визначеннями парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору узгодженість матриці A означає, що $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ для всіх i, j, k . Наприклад в матриці A_R з прикладу 13.2 $a_{13} = 3$ і $a_{12}a_{23} = 2 \cdot 3/2 = 3$. Властивість узгодженості вимагає лінійної залежності стовпців (рядків) матриці A . Зокрема, стовпці будь-якої матриці порівнянь розмірністю 2×2 є залежними, і, отже, така матриця завжди є узгодженою. Не всі матриці порівнянь є узгодженими. Дійсно, взявши до уваги, що такі матриці будуються на основі людських міркувань, можна очікувати деяку степінь неузго-

дженості, і до неї слід відноситись терпляче при умові, що вона не виходить за певні „допустимі” межі.

Для того щоб з’ясувати, чи є рівень узгодженості „допустимим”, необхідно визначити відповідну кількісну міру для матриці порівнянь A . У прикладі 13.2 ми бачили, що ідеально узгоджена матриця A приводить до нормалізованої матриці N , в якій всі стовпці однакові.

$$N = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що матриця порівнянь A може бути отримана з матриці N шляхом ділення елементів i -го стовпця на w_i (цей процес обернений до знаходження матриці N з A). Отже, отримуємо наступне:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо використати наведене визначення матриці A , то будемо мати

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

У компактній формі умова узгодженості матриці A формулюється наступним чином. Матриця A буде узгодженою тоді і тільки тоді, коли

$$A\vec{w} = n\vec{w},$$

де \vec{w} – вектор-стовпець відносних вагових коефіцієнтів w_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Коли матриця A не є узгодженою, відносний ваговий коефіцієнт w_i апроксимується середнім значенням n елементів i -го рядка нормалізо-

ваної матриці N . Позначивши через $\langle \vec{w} \rangle$ обчислену оцінку (середнє значення), можна показати, що

$$A\langle \vec{w} \rangle = n_{\max} \vec{w},$$

де $n_{\max} \geq n$. В цьому випадку, чим ближче n_{\max} до n , тим більше узгодженою є матриця порівнянь A . В результаті відповідно до методу аналізу ієрархій обчислюється коефіцієнт узгодженості у вигляді

$$C_R = \frac{C_I}{R_I},$$

де

$$C_I = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} \text{ – коефіцієнт узгодженості матриці } A,$$

$$R_I = \frac{1,98 \cdot (n - 2)}{n} \text{ – стохастичний коефіцієнт узгодженості матриці } A.$$

Стохастичний коефіцієнт узгодженості R_I визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнту C_I для вибірки великого об'єму генерованих випадково матриць порівняння A .

Коефіцієнт узгодженості C_R використовується для перевірки узгодженості матриці порівнянь A наступним чином. Якщо $C_R \leq 0,1$, то рівень неузгодженості є припустимим. У протилежному випадку рівень неузгодженості матриці порівнянь A є високим і особі, яка приймає рішення, рекомендується перевірити елементи парного порівняння a_{ij} матриці A з метою отримання більш узгодженої матриці.

Значення n_{\max} обчислюється за допомогою матричного рівняння $A\langle \vec{w} \rangle = n_{\max} \vec{w}$, при цьому не важко помітити, що i -є рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \langle w_j \rangle = n_{\max} \langle w_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^n \langle w_i \rangle = 1$, легко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \langle w_j \rangle \right) = n_{\max} \sum_{i=1}^n \langle w_i \rangle = n_{\max} \cdot$$

Це означає, що величину n_{\max} можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця $A \langle \vec{w} \rangle$ з подальшим підсумовуванням його елементів.

Приклад 13.3. У прикладі 13.2 матриця A_L є неузгодженою, так як стовпці матриці N_L неоднакові. Треба дослідити узгодженість матриці A_L .

Розв'язання. Обчислимо значення n_{\max} . Використавши дані прикладу 13.2, маємо

$$\langle w_1 \rangle = 0,129; \langle w_2 \rangle = 0,277; \langle w_3 \rangle = 0,594.$$

Отже,

$$A_L \langle \vec{w} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,129 \\ 0,277 \\ 0,594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3863 \\ 0,8320 \\ 1,7930 \end{pmatrix}.$$

Звідки отримуємо

$$n_{\max} = 0,3863 + 0,8320 + 1,7930 = 3,0113.$$

Отже, для $n = 3$ маємо

$$C_I = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3,0113 - 3}{3 - 1} = 0,00565,$$

$$R_I = \frac{1,98 \cdot (n - 2)}{n} = \frac{1,98 \cdot (3 - 2)}{3} = 0,66,$$

$$C_R = \frac{C_I}{R_I} = \frac{0,00565}{0,66} = 0,00856.$$

Так як $C_R < 0,1$, рівень неузгодженості матриці A_L є допустимим.

13.3. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Якщо рішення приймається в умовах ризику (стохастична невизначеність), то вартості альтернативних рішень звичайно описуються імовірнісними розподілами. Задачі такого виду відносяться до задач теорії статистичних рішень, в яких невідомі умови операції залежать від об'єктивної дійсності, яку прийнято називати *природою*. Відповідні ситуації часто називають *іграми з природою*. *Природа* розуміється як деяка незацікавлена інстанція, поведінка якої невідома.

Розглянемо гру з природою: у особи (гравець), що приймає рішення, є m можливих стратегій A_1, A_2, \dots, A_m ; що стосується обставин, то про них можна зробити n припущень: S_1, S_2, \dots, S_n . Будемо розглядати їх як *стратегії природи*. Прибуток (дохід) гравця a_{ij} при кожній парі стратегій (A_i, S_j) задається *матрицею прибутків*:

	S_1	S_2	\dots	S_n
A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
A_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

Треба вибрати таку стратегію гравця A_i , яка буде найбільш вигідною у порівнянні з іншими.

Введемо поняття *домінуючої стратегії*. Стратегія гравця A_i називається *домінуючою* над стратегією A_k , якщо у рядку A_i стоять прибутки не менші, ніж у відповідних клітинах рядку A_k та з них принаймні один дійсно більший, ніж у відповідній клітині рядку A_k . Якщо всі прибутки рядку A_i дорівнюють відповідним прибуткам рядку A_k , то стратегія A_i називається *дублюючою стратегією* A_k .

Самий простий випадок вибору рішення у грі з природою – це випадок коли якась із стратегій гравця домінує над іншими. Наприклад, у матриці прибутків

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

стратегія A_2 при будь-якому стані природи дає прибуток не менший, ніж при інших стратегіях, а при деяких станах – більший. Тут все зрозуміло, і треба обирати саме цю стратегію.

Якщо в матриці гри з природою немає жодної домінуючої над усіма іншими стратегіями, то корисно подивитись, чи немає в ній дублюючих стратегій і таких, які поступаються іншим при всіх умовах. Таким чином можна зменшити число стратегій гравця. Припустимо, що „чистка” матриці виконана, і ні дублюючих, ні явно не вигідних гравцю стратегій в ній немає.

Прийняття рішення в умовах ризику ґрунтується на використанні *критерію очікуваного значення*, згідно з яким альтернативні рішення порівнюються з точки зору максимізації очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат.

Однак картина ситуації, яку дає матриця прибутків, неповна і не відображає належним чином переваги і недоліки кожного рішення. Бажано ввести такі показники, які не просто давали б прибуток при даній стратегії у кожній ситуації, але відображали би „удачливість” або „неудачливість” вибору даної стратегії у даній ситуації.

З цією метою в теорії рішень вводиться поняття *ризик*. Ризиком r_{ij} гравця при використанні стратегії A_i в умовах S_j називається різниця між прибутком, який був би отриманий, якщо були б відомі умови S_j і

Очевидно, якби гравець знав стан природи S_j , то він би обрав ту стратегію, при якій прибуток максимальний. Цей прибуток, максимальний у стовпці S_j , позначимо β_j :

$$\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}.$$

Щоб отримати ризик r_{ij} , треба від β_j відняти фактичний прибуток a_{ij} :

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Приклад 13.4. Для прикладу візьмемо матрицю прибутків і побудуємо для неї матрицю ризиків.

	S_1	S_2	S_3	S_4		S_1	S_2	S_3	S_4	
A_1	1	4	5	9	;	A_1	3	4	1	0
A_2	3	8	4	3		A_2	1	0	2	6
A_3	4	6	6	2		A_3	0	2	0	7
β_j	4	8	6	9						

При погляді на матрицю ризиків стають зрозумілими деякі риси даної гри з природою. Так, в матриці прибутків у другому рядку перший і останній елементи були рівні між собою: $a_{21} = a_{24} = 3$. Однак ці прибутки зовсім не рівноцінні з точки зору вдалого вибору стратегії: при стані природи S_1 можна отримати самий більший прибуток 4, і вибір стратегії A_2 майже оптимальний; а ось при стані S_4 при обранні стратегії A_1 можна отримати на цілих 6 одиниць більше, тобто вибір стратегії A_2 зовсім невдалий. Ризик – це „платня за відсутність інформації”: $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$ (тоді як прибутки a_{ij} в обох випадках однакові). Природно, бажано мінімізувати ризик, який супроводжує вибір рішення.

Отже, перед нами дві постановки задачі про вибір рішення: при одній бажано отримати максимальний прибуток, при другій – мінімальний ризик.

У даному параграфі ми розглядаємо стохастичну невизначеність, коли стани природи характеризуються імовірностями p_1, p_2, \dots, p_n і ці імовірності в задачі відомі. Тоді природно обрати ту стратегію, для якої середнє значення прибутку, яке взяте по рядку, максимальне:

$$a_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in} = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} \rightarrow \max_i.$$

Корисно відмітити, що стратегія, яка обертає у максимум середній прибуток, приводить до мінімуму і середній ризик:

$$r_i = p_1 r_{i1} + p_2 r_{i2} + \dots + p_n r_{in} = \sum_{j=1}^n p_j r_{ij} \rightarrow \min_i,$$

так що у випадку стохастичної невизначеності обидва підходи (від прибутку і від ризику) дають одне і те ж оптимальне рішення.

Часто на практиці результат одного рішення приводить до необхідності прийняття наступного рішення і т. д. Цю послідовність прийняття рішень не можна виразити матрицею прибутків, тому доводиться використовувати інший алгоритм прийняття рішень.

Графічно подібні процеси можуть бути представлені за допомогою *дерева рішень*. Таке подання полегшує опис багатоетапного процесу прийняття управлінського рішення в цілому.

У наведеному прикладі 13.5 розглядається проста ситуація, яка пов'язана з прийняттям рішення при наявності скінченої кількості альтернатив і точних значень матриці прибутку.

Приклад 13.5. Припустимо, що деякий інвестор хоче вкласти на фондовій біржі 10 000 євро в акції однієї з двох компаній: А або В. Акції компанії А є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестицій протягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливими, сума інвестиції може знецінитися на 20%. Компанія В

забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирування⁷ на біржі і тільки 5% – в умовах зниження котирування. Всі аналітичні публікації, з якими можна познайомитись (а вони завжди є у кінці року), з імовірністю 60% прогнозують підвищення котирування і з імовірністю 40% – зниження котирування. В яку кампанію слід вкласти гроші?

Розв’язання. Інформація, яка пов’язана з прийняттям рішення, підсумована у таблиці 13.2.

Таблиця 13.2

Альтернативне рішення	Прибуток від інвестицій за один рік, €	
	При підвищенні котирування	При зниженні котирування
Акції компанії А	5 000	– 2 000
Акції компанії В	1 500	500
Імовірність події	0,6	0,4

Задача може бути також представлена у вигляді дерева рішень, яке показано на рис. 13.2.



Рис. 13.2

На рис. 13.2 використовуються два типи вершин: квадрат представляє вершини, в яких приймається рішення, а коло – випадкову вершину (наслідок). Так як не можна впливати на появу наслідків, то в круглих

⁷ Котирування – встановлення поточних цін на товари, курси валют і цінних паперів на ринках і біржах, а також публікація відомостей про встановлені ціни, курси і об’єми торгівлі.

вершинах обчислюють імовірності їх появи. Таким чином, із вершини 1 виходять дві вітки, які представляють альтернативи, пов'язані з покупкою акцій компанії *A* або *B*. Далі дві вітки, що виходять з випадкових вершин 2 і 3, відповідають випадкам підвищення і зниження котирування на біржі з імовірностями їх появи і відповідними прибутками.

Виходячи із схеми рис. 13.2, отримуємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії *A*: $5000 \cdot 0,6 + (-2000) \cdot 0,4 = 2200$.

Для акцій компанії *B*: $1500 \cdot 0,6 + 500 \cdot 0,4 = 1100$.

Рішенням, яке ґрунтується на цих обчисленнях, є покупка акцій компанії *A*.

Розглянемо три модифікації критерію очікуваного значення. Перша полягає у визначені *апостеріорних імовірностей* на основі експерименту над досліджуваною системою, друга – у *корисності* реальної вартості грошей, а третя модифікує критерій очікуваного значення таким чином, що він може бути використаний для прийняття рішення при короткотерміновому плануванні.

Апостеріорні імовірності Байєса. Розподіли імовірностей, які використовуються при формуванні критерію очікуваного значення, одержуються, як правило, із накопиченої раніше інформації. В деяких випадках виявляється можливим модифікувати ці імовірності за допомогою поточної або отриманої раніше інформації, яка звичайно ґрунтується на дослідженні вибіркового (експериментального) даних. Отримані імовірності будуть *апостеріорними* (Байєсовськими), на відміну від *апріорних*, які отримані з вихідної інформації. Наступний приклад показує, як критерій очікуваного значення можна модифікувати так, щоб скористатись новою інформацією, яка міститься у апостеріорних імовірностях.

Приклад 13.6. У прикладі 13.5 апріорні імовірності 0,6 і 0,4 підвищення і зниження котирування акцій на біржі були визначені із наяв-

них публікацій фінансового характеру. Припустимо, що замість того, щоб повністю покладатись на ці публікації, інвестор вирішив провести власне дослідження шляхом консультації з другом, який добре розуміється у питаннях, що стосуються фондової біржі. Друг висловлює загальну думку „за” або „проти” інвестицій. Ця думка в подальшому визначається кількісно наступним чином. При підвищенні котирування його думка буде „за” на 90%, при зниженні котирування імовірність його думки „за” зменшиться до 50%. Яким чином можна одержати вигоду з цієї додаткової інформації?

Розв’язання. Думка друга фактично являє умовні імовірності „за–проти”, при заданих станах природи у вигляді підвищення і зниження котирування. Введемо наступні події:

v_1 – думка „за”, v_2 – думка „проти”,

m_1 – підвищення котирування, m_2 – зниження котирування.

Думку друга можна записати у вигляді імовірнісних співвідношень:

$$P(v_1 | m_1) = 0,9; P(v_1 | m_2) = 0,1;$$

$$P(v_2 | m_1) = 0,5; P(v_2 | m_2) = 0,5.$$

За допомогою цієї додаткової інформації задачу вибору рішення можна сформулювати наступним чином:

Якщо думка друга „за”, акції якої компанії слід купувати – A або B ?

Якщо думка друга „проти”, то, знов-таки, – акції якої компанії слід купувати – A або B ?

Задачу можна представити у вигляді дерева рішень, яке показане на рис. 13.3. Вузлу 1 тут відповідає випадкова подія, думка друга, з відповідними імовірностями „за” та „проти”. Вузли 2 і 3 являють вибір між компаніями A і B при відомій думці друга „за” або „проти” відповідно. Вузли 4-7 відповідають випадковим подіям, які пов’язані з підвищенням або зниженням котирування.

Для оцінки різних альтернатив, які показані на рис. 13.3, необхідно обчислити апостеріорні імовірності $P(m_i | v_j)$, які вказані на відповідних

вітках, та які виходять з вузлів 4-7. Ці апостеріорні імовірності обчислюються з урахуванням додаткової інформації, яка міститься в рекомендаціях друга, за допомогою наступних дій.

Крок 1. Умовні імовірності $P(v_j | m_i)$ для даної задачі запишемо наступним чином:

		v_1	v_2
$P(v_j m_i) =$	m_1	0,9	0,1
	m_2	0,5	0,5

Крок 2. Обчислюємо імовірності сумісної появи подій:

$$P(m_i v_j) = P(v_j | m_i) \cdot P(m_i) \text{ для всіх } i \text{ та } j.$$

При заданих апіорних імовірностях $P(m_1) = 0,6$ і $P(m_2) = 0,4$ імовірності сумісної появи подій визначаються множенням першого і другого рядків таблиці, яка отримана на кроці 1, на 0,6 і 0,4 відповідно. В результаті маємо наступне:

		v_1	v_2
$P(m_i v_j) =$	m_1	0,54	0,06
	m_2	0,20	0,20

Сума всіх елементів цієї таблиці дорівнює одиниці.

Крок 3. Обчислюємо абсолютні імовірності.

$$P(v_j) = \sum_{i=1}^2 P(m_i v_j), \quad j = 1, 2.$$

Ці імовірності одержуються шляхом сумування елементів відповідних стовпців таблиці, яка отримана на кроці 2. У результаті маємо наступне:

$P(v_1)$	$P(v_2)$
0,74	0,26

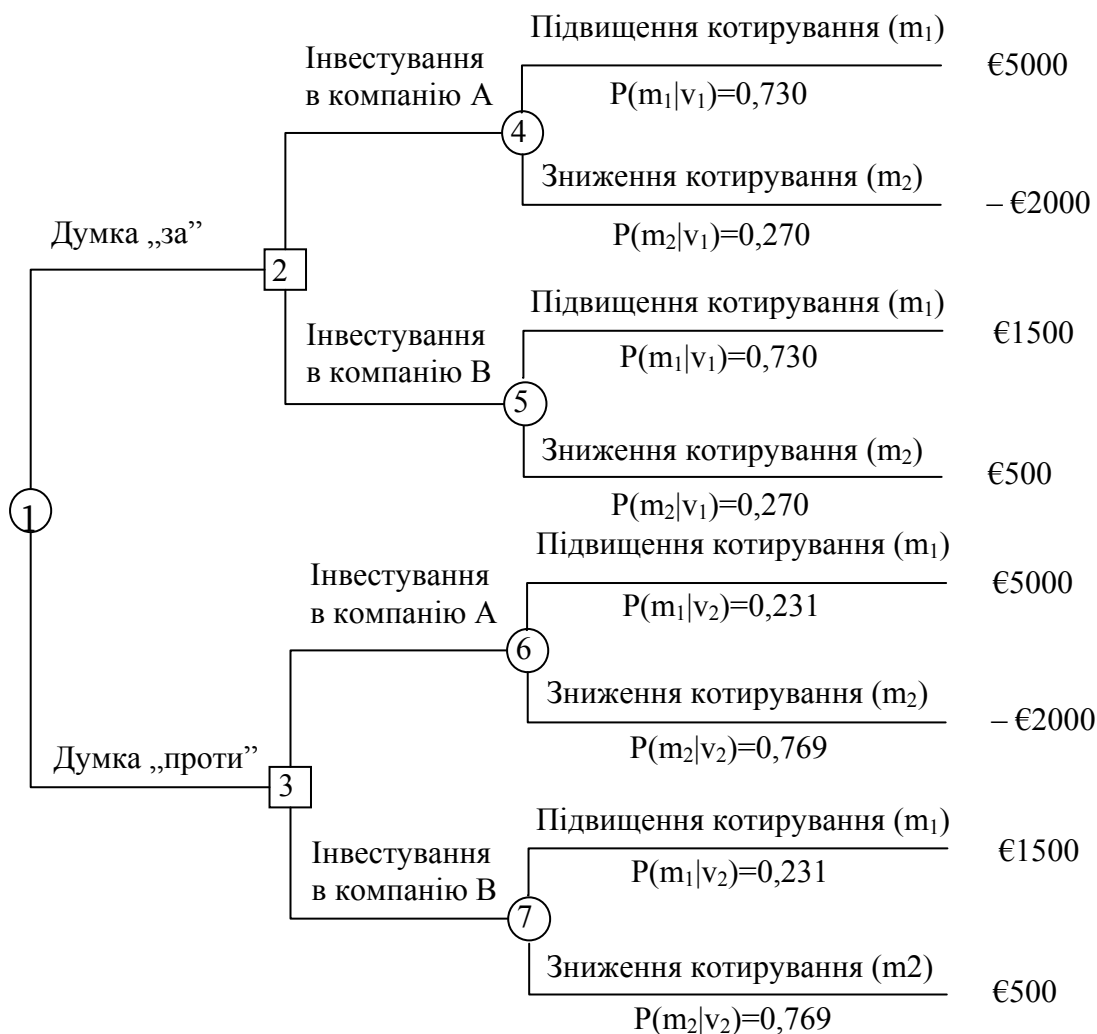


Рис. 13.3

Крок 4. Визначаємо шукані апостеріорні імовірності за формулою

$$P(m_i | v_j) = \frac{P(m_i v_j)}{P(v_j)}$$

Ці імовірності обчислюються діленням кожного стовпця таблиці, яка отримана на кроці 2, на елемент відповідного стовпця таблиці, обчисленої на кроці 3, що приводить до наступних результатів (округлені до трьох десяткових знаків):

		v_1	v_2
$P(m_i v_j) =$	m_1	0,730	0,231
	m_2	0,270	0,769

Це ті імовірності, які показані на рис. 13.3. Вони відрізняються від вихідних апіорних імовірностей $P(m_1) = 0,6$ і $P(m_2) = 0,4$.

Тепер можна оцінити альтернативні рішення, які основані на очікуваних прибутках для вузлів 4-7.

Думка „за”.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 4:

$$5000 \cdot 0,730 + (-2000) \cdot 0,270 = 3110.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 5:

$$1500 \cdot 0,730 + 500 \cdot 0,270 = 1230.$$

Рішення: інвестувати у акції компанії А.

Думка „проти”.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 6:

$$5000 \cdot 0,231 + (-2000) \cdot 0,769 = -383.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 7:

$$1500 \cdot 0,231 + 500 \cdot 0,769 = 731.$$

Рішення: інвестувати у акції компанії В.

Відмітимо, що попередні рішення еквівалентні твердженню, що очікувані прибутки у вузлах 2 і 3 дорівнюють 3110 і 731 євро відповідно. Отже, при відомих імовірностях $P(v_1)=0,74$ і $P(v_2)=0,26$, які обчислені на кроці 3, можна обчислити очікуваний прибуток для всього дерева рішень.

У попередніх прикладах критерій очікуваного значення застосовувався лише у тих ситуаціях, де прибутки виражались у вигляді реальних грошей. Зустрічається багато випадків, коли при аналізі слід використовувати скоріше *корисність*, ніж реальну величину прибутків. Різні індивідууми виявляють різне відношення до ризику, тобто вони проявляють різну корисність по відношенню до ризику. Іншими словами різні люди по різному можуть інтерпретувати отримані при аналізі результати. Наприклад, при рівноімовірних можливостях при інвестуванні отримати прибуток або втратити інвестицію, обережний інвестор може не виразити бажання ризикувати, а інвестор, який іде на ризик, може зробити інвестицію.

Визначення корисності є суб'єктивним. Воно залежатиме від нашого відношення до ризику. Те, що процедура визначення корисності повністю визначається думкою особи, що приймає рішення, породжує сумнів відносно надійності отриманого результату. Процедура, зокрема, неявно передбачає, що особа, яка приймає рішення, є раціонально мислячою – вимога, яка не завжди може бути узгоджена з варіаціями у поведінці і настрої, що є типовим для людської особистості. У цьому відношенні особа, що приймає рішення повинна дотримуватись концепції корисності у широкому розумінні, згідно з якою грошові одиниці не повинні бути єдиним вирішальним фактором у теорії прийняття рішень.

13.4. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, вимагає альтернативних дій, яким відповідають прибутки, що залежать від випадкових станів природи. Однак імовірності станів природи або взагалі не існують, або не піддаються оцінюванню навіть наближено.

Матрицю прибутків в задачі прийняття рішень з m можливими діями і n станами природи можна представити наступним чином:

	S_1	S_2	...	S_n
A_1	$v(A_1, S_1)$	$v(A_1, S_2)$...	$v(A_1, S_n)$
A_2	$v(A_2, S_1)$	$v(A_2, S_2)$...	$v(A_2, S_n)$
...
A_m	$v(A_m, S_1)$	$v(A_m, S_2)$...	$v(A_m, S_n)$

Елемент A_i являє собою i -е можливе рішення, а елемент S_j – j -й стан природи. Прибуток, який пов'язаний з рішенням A_i і станом S_j , дорівнює $v(A_i, S_j)$.

Отже, відміна між прийняттям рішення в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності імовірнісний розподіл, який відповідає станам S_j або невідомий, або не може бути визначено.

ний. Ця нестача інформації обумовила розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, яка пов'язана з прийняттям рішення:

1. Критерій Лапласа.
2. Мінімаксний критерій.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються ступенем консерватизму, який проявляє особа, що приймає рішення, перед лицем невизначеності.

Критерій Лапласа спирається на принцип недостатнього обґрунтування, який полягає в тому, що оскільки розподіл імовірностей станів $P(S_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що імовірності всіх станів природи імовірні між собою, тобто

$$P(S_1) = P(S_2) = \dots = P(S_n) = 1/n.$$

Якщо при цьому $v(A_i, S_j)$ – це отриманий прибуток, то найкращим рішенням буде те, яке забезпечує

$$\max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(A_i, S_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(A_i, S_j)$ – це витрати особи, що приймає рішення, то оператор „max” замінюється на „min”.

Максимінний (мінімаксний) критерій ґрунтується на консервативній обережній поведінці особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших. Якщо величина $v(A_i, S_j)$ – це прибуток, то згідно з максимінним критерієм в якості оптимального обирається рішення, яке забезпечує

$$\max_i \left\{ \min_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(A_i, S_j)$ – втрати, використовується мінімаксний критерій, який визначається наступним співвідношенням

$$\min_i \{ \max_j v(A_i, S_j) \}.$$

Критерій Севіджа намагається зм'якшити консерватизм максимінного (мінімаксного) критерію шляхом заміни матриці прибутків матрицею ризиків

$$r(A_i, S_j) = \begin{cases} \max_k \{ v(A_k, S_j) \} - v(A_i, S_j), & \text{якщо } v - \text{прибуток} \\ v(A_i, S_j) - \min_k \{ v(A_k, S_j) \}, & \text{якщо } v - \text{втрати} \end{cases}.$$

Критерій Гурвіца охоплює ряд різних підходів до прийняття рішення – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Нехай $0 \leq \alpha \leq 1$ і величини $v(A_i, S_j)$ – це прибутки. Тоді рішенню, яке вибрано за критерієм Гурвіца, відповідає

$$\max_i \left\{ \alpha \max_j v(A_i, S_j) + (1 - \alpha) \min_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Параметр α – показник оптимізму. Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним, так як його застосування еквівалентне застосуванню звичайного максимінного критерію. Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає надто оптимістичним, так як розраховує на найкращі з найкращих умов. Можна конкретизувати степінь оптимізму (або песимізму) відповідним вибором величини α з інтервалу $[0;1]$. При відсутності яскраво вираженої прихильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0,5$ здається найбільш розумним.

Якщо величини $v(A_i, S_j)$ – це втрати, то критерій набуває наступного вигляду:

$$\min_i \left\{ \alpha \min_j v(A_i, S_j) + (1 - \alpha) \max_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Вибір рішення в умовах невизначеності завжди суб'єктивний. І все ж таки математичні методи корисні і тут. Перш за все, вони дозволяють привести гру з природою до матричної форми, що далеко не завжди буває просто, особливо коли альтернативних рішень багато. Крім того, вони дозволяють за допомогою послідовного числового аналізу ситуації,

отримати рекомендації щодо застосування того чи іншого рішення, і зробити остаточний вибір.

Якщо рекомендації, які отримані з різних критеріїв, співпадають – тим краще, це означає, що можна обирати рекомендоване рішення. Якщо ж, як це часто буває, рекомендації суперечать одне одному, треба з'ясувати наскільки до різних результатів вони приводять, уточнити свою точку зору і зробити остаточний вибір. Треба пам'ятати, що в будь-яких задачах обґрунтування рішень деяке свавілля неминуче – вже при побудові математичної моделі і виборі показника ефективності. Вся математика, що застосовується у дослідженнях, не відмінняє цього свавілля, а дозволяє тільки „поставити його на своє місце”.

Розглянемо приклад застосування різних критеріїв при виборі рішення.

Приклад 13.7. Розглянемо приклад гри з природою, матриця вартостей якого подана у таблиці 13.3.

Таблиця 13.3

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	12	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

Проаналізуємо ситуацію вибору стратегії, яка мінімізує вартості, з точки зору чотирьох розглянутих вище критеріїв.

Критерій Лапласа. При заданих імовірностях $P(S_j) = 1/4$, $j = 1, 2, 3, 4$, очікувані значення вартостей для різних можливих рішень обчислюються наступним чином.

$$M(A_1) = \frac{1}{4}(5 + 10 + 18 + 25) = 14,5;$$

$$M(A_2) = \frac{1}{4}(8 + 7 + 12 + 23) = 12,5;$$

$$M(A_3) = \frac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = 18;$$

$$M(A_4) = \frac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 15) = 21,5.$$

Оптимальна стратегія – A_2 .

Мінімаксний критерій. Цей критерій використовує вихідну матрицю вартостей (таблиця 13.4).

Таблиця 13.4

	S_1	S_2	S_3	S_4	Максимум рядка
A_1	5	10	18	25	25
A_2	8	7	12	23	23
A_3	21	18	12	21	21 – мінімакс
A_4	30	22	19	15	30

Оптимальна стратегія – A_3 .

Критерій Севіджа. Матриця ризиків визначається відніманням чисел 5, 7, 12 і 15 від елементів стовпців від першого до четвертого відповідно (таблиця 13.5).

Таблиця 13.5

	S_1	S_2	S_3	S_4	Максимум рядка
A_1	0	3	6	10	10
A_2	3	0	0	8	8 – мінімакс
A_3	16	11	0	6	16
A_4	25	15	7	0	25

Оптимальна стратегія – A_2 .

Критерій Гурвіца. Результати обчислень містяться в таблиці 13.6.

Таблиця 13.6

Альтернатива	Мінімум рядка	Максимум рядка	$\alpha \cdot (\text{Мінімум рядка}) +$ $+(1-\alpha) \cdot (\text{максимум рядка})$
A_1	5	25	$25-20\alpha$
A_2	7	23	$23-16\alpha$
A_3	12	21	$21-9\alpha$
A_4	15	30	$30-15\alpha$

Використовуючи відповідне значення для α , можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при $\alpha = 0,5$ оптимальними є або альтернатива A_1 , або A_2 , тоді як при $\alpha = 0,25$ оптимальним буде рішення A_3 .

13.5. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР

Найбільш простими із ситуацій, які містять невизначеність, є так звані *конфліктні ситуації*, суть яких полягає в тому, що кілька сторін прагнуть досягти певних суперечливих, як правило, цілей, причому ступінь цього досягнення залежить від способу дій сторін, кожна з яких прагне максимізувати міру досягнення поставленої мети.

В економіці іноді приходиться мати справу з такими ситуаціями, коли при наявності багатьох учасників ефективність рішення одного з них залежить від того, які рішення прийняли інші учасники. Наприклад, дохід підприємства від продажу виробів залежить не тільки від встановленої на них ціни, але і від кількості куплених покупцями виробів. Або при виборі асортименту товарів, які виготовляються підприємством, треба враховувати, який асортимент товарів випускають інші підприємства.

Побудовою математичних моделей конфліктних ситуацій і розробкою методів розв'язання виникаючих у цих ситуаціях задач займається *теорія ігор*. Кожна безпосередньо взята з практики конфліктна ситуація

дуже складна, та її аналіз ускладнений наявністю несуттєвих факторів. Щоб зробити можливим математичний аналіз конфлікту, будується його математична модель.

Грою називається математична модель конфлікту, тобто сукупність деяких, певним чином впорядкованих правил, що реалізуються в діях двох чи більше осіб, які прагнуть досягти своїх цілей, виступаючи як учасники гри (*гравці*). Учасниками гри можуть бути як окремі індивідууми, так і цілі колективи (організації). *Ходом гри* називається вибір гравцем одного рішення з множини допустимих рішень, визначених правилами гри. Елементи визначеної правилами гри множини допустимих рішень кожного окремого гравця називаються його *стратегіями*. Отже, хід – це вибір гравцем однієї з своїх стратегій. З кожною стратегією зв'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншим.

Ігри можна класифікувати згідно з деякими основними ознаками. Однією з них є кількість гравців. Гра, в якій беруть участь два гравці називається парною, більше двох гравців – множинною. Учасники множинної гри можуть утворювати коаліції (постійні або змінні). Множинна гра з двома постійними коаліціями, зрозуміло, перетворюється на парну.

В залежності від числа стратегій ігри діляться на *скінченні* і *нескінченні*. Гра називається скінченною, якщо у кожного гравця є у розпорядженні тільки скінченна кількість стратегій. У протилежному випадку гра називається нескінченною. Існують ігри (наприклад шахи), в яких у принципі кількість стратегій скінченна, але така велика, що повний їх розгляд практично неможливий.

Якщо сума платежів всіх учасників гри дорівнює нулю, тобто виграші одних дорівнюють програшам інших, то така гра називається *грою з нульовою сумою*. Самий простий випадок – парна гра з нульовою сумою – називається *антагоністичною*. Теорія антагоністичних ігор – найбільш розвинутий розділ теорії ігор, з чіткими рекомендаціями.

Якщо кожен гравець має всю інформацію про попередні ходи, то така гра називається *грою з повною інформацією*. Всяка інша гра є *грою з неповною інформацією*.

Оптимальною називається стратегія, яка при багаторазовому повторенні забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш. Метою теорії ігор є розробка способів відшукування оптимальних стратегій. Сукупність оптимальних стратегій всіх гравців називається *розв'язком гри*.

13.6. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АНТАГОНІСТИЧНИХ МАТРИЧНИХ ІГОР

Самим простим випадком, який детально розроблений у теорії ігор, є скінченна парна гра з нульовою сумою, тобто антагоністична гра двох учасників. Задача першого гравця – максимізувати свій виграш, задача другого гравця – мінімізувати свій програш або мінімізувати виграш першого. У такій грі достатньо задати результати у вигляді платежів для одного з гравців. При позначені гравців через A і B з кількістю стратегій m і n відповідно, гру звичайно представляють у вигляді матриці платежів гравцю A :

	B_1	B_2	\dots	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2m}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
A_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

Якщо така таблиця складена, то говорять, що гра приведена до матричної форми. Приведення гри до такої форми може являти собою важку задачу. Відмітимо, що у випадку, коли гра приведена до матричної форми, то багатоходова гра фактично зведена до одноходової – від гравця вимагається зробити тільки один хід: вибрати стратегію.

Оскільки гра антагоністична, оптимальним розв'язком її є одна або декілька таких стратегій для кожного з гравців. При цьому будь-яке відхилення від даних стратегій не покращує платіж тому чи іншому гравцю. Ці розв'язки можуть бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які є *мішаними* у відповідності із заданими імовірностями. Приклади, розглянуті нижче, демонструють перераховані випадки.

Приклад 13.8. Розглянемо гру у матричній формі

Таблиця 13.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	5	2	3
A_2	1	8	4	3	4
A_3	10	3	1	7	6
A_4	4	5	3	4	8

Розв'язування. Будемо грати за гравця A . У матриці 11.7 є спокусливий для гравця A виграш „10”, тобто привабливо обрати стратегію A_3 . Але супротивник може обрати стратегію B_3 , і тоді гравець A отримає жалюгідний виграш „1”. Таким чином обирати стратегію A_3 не можна. Який же вибір зробити? Очевидно, виходячи із принципу обережності (це основний принцип теорії ігор), треба вибрати ту стратегію, при якій наш мінімальний виграш буде максимальним, тобто застосувати критерій максіміна.

Перепишемо таблицю 13.7 і у правому додатковому стовпці запишемо мінімальне значення виграшу кожного рядка α_i (таблиця 13.8).

Таблиця 13.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	3	4	5	2	3	2
A_2	1	8	4	3	4	1
A_3	10	3	1	7	6	1
A_4	4	5	3	4	8	3
β_j	10	8	5	7	8	

Оберемо ту стратегію, для якої α_i максимальне. Позначимо це максимальне значення через α , тоді

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i,$$

і в нашому випадку $\alpha = 3$. Цьому значенню відповідає стратегія A_4 . Обравши цю стратегію, ми у всякому разі можемо бути впевненими, що (при будь-якій поведінці супротивника) виграємо не менше, ніж 3. Ця величина наш гарантований виграш і називається *нижньою ціною гри*. Тепер станемо на місце супротивника. Очевидно обережний супротивник повинен обрати ту стратегію при якій максимальний виграш гравця A мінімальний (мінімаксний критерій). Позначимо цю величину, яка називається *верхньою ціною гри*, через β . Отже,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j.$$

В нашому прикладі $\beta = 5$ і досягається при стратегії супротивника B_3 . Якщо другий гравець буде дотримуватись своєї мінімаксної стратегії, то він гарантований, що у будь-якому випадку програє не більше β .

Для матричної гри справедлива нерівність

$$\alpha \leq \beta.$$

Якщо $\alpha = \beta$, то така гра називається *грою із сідловою точкою*, а пара оптимальних стратегій $(A_{i_{opt}}, B_{j_{opt}})$ – сідловою точкою матриці. В цьому випадку оптимальні стратегії гравців будуть стійкими по відношенню до інформації про поведінку іншого гравця. Елемент

$$\alpha = \beta = v$$

називається *ціною гри*. Якщо гра має сідлову точку, то кажуть, що вона розв'язується у *чистих стратегіях*.

Якщо платіжна матриця не має сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$ (як в прикладі 13.8), то пошук розв'язку гри приводить до застосування складної стратегії, яка полягає у випадковому застосуванні двох і більше стратегій з певними частотами. Така складна стратегія називається *змішаною*.

Розглянемо приклад гри, яка розв'язується у чистих стратегіях.

Приклад 13.9. Матриця платежів задана в таблиці 13.9.

Таблиця 13.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	4	7	5	2
A_2	7	6	8	7	6
A_3	5	3	4	1	1
β_j	7	6	8	7	

В цьому прикладі ціна гри дорівнює $\alpha = \beta = 6$. Будь яке відхилення гравців від стратегій A_2 і B_2 може тільки погіршити їх положення, тому виграш гравця A складатиме 6.

Наявність сідлової точки в грі – це далеко не правило, скоріше – виключення. Більшість ігор не має сідлової точки. Але є різновид ігор, які завжди мають сідлову точку, тобто розв'язуються у чистих стратегіях. В теорії ігор доводиться, що кожна гра з повною інформацією має сідлову точку. Будь-яка гра з повною інформацією, записана у матричній формі, має сідлову точку. Інша справа, що не завжди гру з повною інформацією можна привести до матричної форми. Скажімо, шахова гра є грою з повною інформацією, бо завжди закінчується виграшем білих, або завжди – виграшем чорних, або завжди – нічиєю. Тільки чим самим ми поки не знаємо та навряд чи будемо знати і в доступному для огляду

майбутньому бо кількість стратегій така велика, що привести її до матричної форми неможливо.

Змішані стратегії у теорії ігор являють модель змінної, гнучкої тактики, коли жоден з гравців не знає, як поведе себе супротивник. Розглянемо гру, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії першого гравця задаються наборами імовірностей $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, з якими гравець застосовує свої чисті стратегії A_1, A_2, \dots, A_m . Ці набори можна розглядати як m -вимірні вектори, для координат яких

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0.$$

Аналогічно для другого гравця набори імовірностей, що відповідають чистим стратегіям B_1, B_2, \dots, B_n , визначають n -вимірні вектори $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, для координат яких

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0.$$

В основній теоремі теорії ігор стверджується, що кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливо, в області змішаних стратегій.

Застосування оптимальної стратегії дозволяє отримати виграш, що дорівнює ціні гри: $\alpha \leq v \leq \beta$.

Застосування першим гравцем оптимальної стратегії \vec{p}_{opt} повинно забезпечити йому при будь-яких діях другого гравця виграш не менше ціни гри. Тому виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_{i_{opt}} \geq v.$$

Аналогічно другому гравцю оптимальна стратегія \vec{q}_{opt} повинна забезпечити при будь-яких стратегіях першого гравця, програш, який не перевищує ціну гри, тобто справедливе співвідношення

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_{j_{opt}} \leq v.$$

Якщо платіжна матриця не містить сідлової точки, то задача визначення мішаної стратегії тим складніша, чим більша розмірність матриці. Тому матриці великої розмірності доцільно спростити, зменшивши їх розмірність шляхом викреслювання дублюючих і явно невігідних стратегій. Розглянемо приклад.

Приклад 13.10. Нехай платіжна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 5}.$$

Треба спростити платіжну матрицю.

Розв'язання. Знайдемо нижню та верхню ціни гри:

$$\alpha = \max\{2, 2, 3, 2\} = 3,$$

$$\beta = \min\{7, 6, 6, 4, 5\} = 4.$$

Так як $\alpha \neq \beta$, то необхідно застосовувати змішану стратегію. Спростимо платіжну матрицю.

Всі елементи стратегії A_2 менше або дорівнюють A_3 , тобто стратегія A_2 явно невігідна для першого гравця та її можна виключити. Всі елементи стратегії A_4 менше A_3 , виключаємо A_4 .

Для другого гравця порівнюючи стратегії B_1 і B_4 , виключаємо B_1 ; порівнюючи B_2 і B_4 , виключаємо B_2 ; порівнюючи B_3 і B_4 , виключаємо B_3 . В результаті отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

У порадиниках з теорії ігор звичайно зупиняються на розв'язуванні ігор розмірностей 2×2 , $2 \times n$ та $m \times 2$, які допускають геометричну інтерпретацію. Графічний метод розв'язування ігор розглянемо трохи пізніше.

ше, а зараз покажемо як задачу розв'язання гри $m \times n$ можна звести до задачі лінійного програмування з n обмеженнями-нерівностями і m змінними.

Так як виграш першого гравця буде не меншим, ніж v , то математичну модель задачі для нього можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} z(\vec{p}) = v &\rightarrow \max, \\ a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m &\geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m &\geq v, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m &\geq v, \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m &= 1, \\ p_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Розділимо нерівності основної системи обмежень на додатню величину v та введемо позначення:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{p_m}{v}.$$

Так як $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{v}$ і $\frac{1}{v} \rightarrow \min$, то для першого гравця отримую-

ємо задачу лінійного програмування:

$$z(\vec{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\geq 1, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &\geq 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Для другого гравця математична модель записується у вигляді

$$w(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

куваний виграш гравця A , що відповідає j -й чистій стратегії гравця B , обчислюється за формулою

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 = a_{1j}p_1 + a_{2j}(1 - p_1) = (a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

З формули видно, що очікуваний виграш першого гравця лінійно залежить від p_1 . На осі абсцис відкладаємо імовірність p_1 , а на осі ординат будуюмо вирази очікуваних виграшів першого гравця.

Гравець A повинен обрати такі стратегії, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто знайти величину p_1 , яка максимізує вираз

$$\max_i \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}\}.$$

Тому оптимальна змішана стратегія гравця A визначається точкою перетину прямих, що максимізують його мінімальний очікуваний виграш.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію гравця B . Вона визначається точкою перетину прямих, що мінімізують його максимальний очікуваний програш.

Приклад 13.11. Розглянемо гру 2×4 , в якій платежі виплачуються гравцю A .

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Розв'язання. Гра не має розв'язку у чистих стратегіях. Отже, стратегії повинні бути змішаними. Очікувані виграші гравця A , що відповідають чистим стратегіям гравця B , наведені в таблиці 13.10.

Чисті стратегії гравця B	Очікувані виграші гравця A
1	$-2p_1 + 4$
2	$-p_1 + 3$
3	$p_1 + 2$
4	$-7p_1 + 6$

На рис. 13.4 зображені чотири прямі лінії, що відповідають чистим стратегіям гравця B .

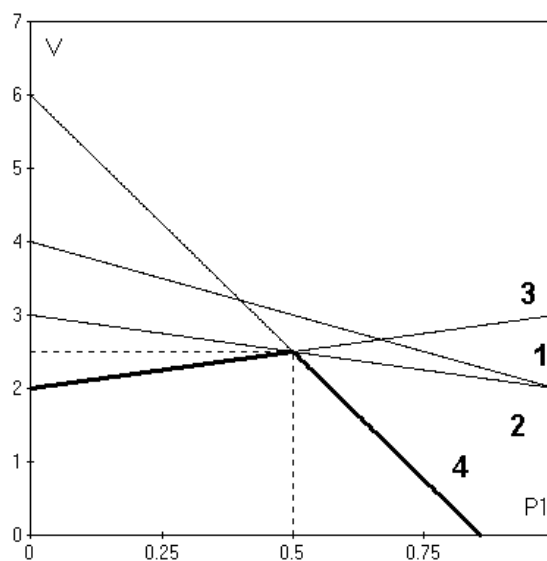


Рис. 13.4

Для того, щоб визначити найкращий результат із найгірших, побудована нижня обвідна (зображена на рис. 13.4 товстими лінійними відріzkами), яка являє мінімальний виграш для гравця A незалежно від того, що робить гравець B . Максимум нижньої обвідної відповідає максимуму розв'язку у точці $p^* = 0,5$. Ця точка визначається перетином прямих 3 і 4. Отже, оптимальним розв'язком для гравця A є змішана стратегія, при якій застосовуються чисті стратегії A_1 і A_2 з імовірностями 0,5 і 0,5 відповідно. Відповідна ціна гри v визначається підстановкою $p_1 = 0,5$ в рівняння або прямої 3, або 4, що приводить до наступного:

$$v = 0,5 + 2 = 2,5 \text{ (з рівняння прямої 3),}$$

$$v = -7 \cdot 0,5 + 6 = 2,5 \text{ (з рівняння прямої 4).}$$

Оптимальна змішана стратегія гравця B визначається двома стратегіями, які визначають нижню обвідну графіка. Це означає, що гравець B може змішувати стратегії B_3 і B_4 . В цьому випадку $q_1 = q_2 = 0$ і $q_4 = 1 - q_3$. Отже, очікувані платежі гравця B , що відповідають чистим стратегіям гравця A , мають наступний вигляд $(a_{i3} - a_{i4})q_3 + a_{i4}$, $i = 1, 2$ (таблиця 5.11).

Чисті стратегії гравця A	Очікувані платежі гравця B
1	$4q_3 - 1$
2	$-4q_3 + 6$

Найкращий розв'язок з найгірших для гравця B являє собою точку мінімуму верхньої обвідної заданих двох прямих. Ця процедура еквівалентна розв'язанню рівняння

$$4q_3 - 1 = -4q_3 + 6.$$

Його розв'язком буде $q_3 = 7/8$, що визначає ціну гри $v = 4 \cdot (7/8) - 1 = 2,5$.

Отже, розв'язком гри для гравця A є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними імовірностями 0,5 і 0,5, а для гравця B – змішування стратегій B_3 і B_4 з імовірностями $7/8$ і $1/8$. (Насправді гра має альтернативний розв'язок для гравця B , так як максимінна точка на рис. 11.4 визначається більш ніж двома прямими. Будь-яка опукла лінійна комбінація цих альтернативних розв'язків також є розв'язком задачі).

Для гри, в якій гравець A має m стратегій, а гравець B – тільки дві, розв'язок знаходиться аналогічно. Головна відмінність полягає в тому, що в цьому випадку будуються графіки функцій, які являють очікувані платежі другого гравця, що відповідають чистим стратегіям гравця A . В результаті ведеться пошук мінімаксної точки верхньої обвідної побудованих прямих.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть три можливих умови прийняття рішень.
2. У чому полягає суть методу ієрархій?
3. Що таке вагові коефіцієнти і як вони визначаються?
4. Як визначається узгодженість матриці порівнянь?
5. У чому полягає зміст критерію очікуваного значення?
6. Які задачі теорії прийняття рішень називаються грою з природою?
7. Як можна представити задачу теорії прийняття рішень у вигляді дерева рішень?
8. Як визначаються апостеріорні імовірності Байєса?
9. За якими критеріями класифікуються задачі теорії ігор?
10. Методи розв'язування ігор з нульовою сумою.
11. Розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
12. Як можна звести задачу теорії ігор до задачі лінійного програмування?
13. Графічний метод розв'язування задач теорії ігор.
14. Які ще методи розв'язування задач теорії ігор Ви знаєте?

ВПРАВИ

13.1. Відділ кадрів фірми після попереднього відбору зузизв пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: K , L і V . Остаточний відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (S), досвід роботи (D) і рекомендації (R). Відділом кадрів використовується матриця A для порівняння трьох критеріїв. Після проведеної співбесіди з трьома претендентами, збору даних, що відносяться до досвіду їх роботи і рекомендаціям, побудовані матриці A_S , A_D і A_R . Якого з трьох кандидатів слід прийняти на роботу? Оцініть узгодженість даних.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & D & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ D \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} K & L & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ L \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} K & L & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ L \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} K & L & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ L \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

13.2. Вирішивши купити автомобіль, людина зупинила свій вибір на трьох моделях: A_1 , A_2 і A_3 . Факторами, які впливають на його рішення, є вартість автомобіля (C), вартість обслуговування (O), вартість поїздки по місту (M) і сільській місцевості (S). Таблиця 13.11 містить необхідні дані, які відповідають трьохрічному терміну експлуатації автомобіля.

Таблиця 13.11

Модель	C (€)	O (€)	M (€)	S (€)
A_1	6 000	1800	4500	1500
A_2	8 000	1200	2250	750
A_3	10 000	600	1125	600

Використайте вказані вартості для побудови матриць порівняння. Оцініть узгодженість матриць і визначите модель автомобіля, яку слід купити.

13.3. У грі „Колесо фортуни” колесо управляється електронним пристроєм за допомогою двох кнопок, які надають колесу сильне (В) або слабе (М) обертання. Само колесо поділено на рівні області білу (Б) і червону (Ч). У білій області колесо зупиняється з імовірністю 0,3, а у червоній – 0,7. Плата, яку отримує гравець, дорівнює (у гривнях):

	Б	Ч
В	800	200
М	- 2500	1000

Представте задачу у вигляді дерева рішень.

13.4. Припустимо, що у інвестора є можливість вкласти гроші у три інвестиційних фонди відкритого типу: простий, спеціальний (що забезпечує максимальний довгостроковий прибуток від акцій малих компаній) і глобальний. Прибуток від інвестицій може змінюватись в залежності від умов ринку. Існує 10% імовірність, що ситуація на ринку цінних паперів погіршиться, 50% – що ринок залишиться поміркованим і 40% – ринок буде зростати. Таблиця 13.12 містить значення відсотків прибутку від суми інвестицій при трьох можливостях розвитку ринку.

Таблиця 13.12

Альтернатива (фонди)	Відсоток прибутку від інвестицій (%)		
	Спадаючий ринок	Поміркований ринок	Зростаючий ринок
Простий	+5	+7	+8
Спеціальний	-10	+5	+30
Глобальний	+2	+7	+20

Представте задачу у вигляді дерева рішень. Який фонд слід обрати?

13.5. Фірма може прийняти рішення про будівництво середнього або малого підприємства. Мале підприємство згодом можна розширити. Рішення визначається майбутнім попитом на продукцію, яку буде випускати підприємство. Будівництво середнього підприємства економічно

виправдано при високому попиті. З іншого боку, можна побудувати мале підприємство і через два роки його розширити.

Фірма розглядає дану задачу з перспективою на десять років. Аналіз ринкової ситуації показує, що імовірності високого і низького попиту рівні 0,75 і 0,25 відповідно. Будівництво середнього підприємства обійдеться у 5 млн. грн., малого – у 1 млн. грн. Витрати на розширення через два роки малого підприємства оцінюються у 4,2 млн. грн.

Очікувані щорічні доходи для кожної з можливих альтернатив:

- середнє підприємство при високому (низькому) попиті дає 1 (0,3) млн. грн.;
- мале підприємство при низькому попиті – 0,2 млн. грн.;
- мале підприємство при високому попиті протягом десяти років – 0,25 млн. грн.;
- розширене підприємство при високому (низькому) попиті – 0,9 (0,2) млн. грн.;
- мале підприємство без розширення при високому попиті протягом перших двох років і наступному низькому попиті за останні вісім років – 0,2 млн. грн.

Визначить оптимальну стратегію фірми у будівництві підприємств за допомогою дерева рішень.

13.6. Фірма виготовляє дитячі костюми і сукні, що користуються попитом і реалізація яких залежить від стану погоди. Витрати фірми протягом серпня-вересня на одиницю продукції складає: костюми – 28 грн., сукня – 7 грн. Ціна реалізації складає 50 і 15 грн. відповідно.

За даними спостережень за декілька попередніх років, фірма може реалізувати в умовах теплої погоди 1950 суконь і 610 костюмів, а при прохолодній погоді – 630 суконь і 1050 костюмів.

У зв'язку з можливими змінами погоди визначить стратегію фірми у випуску продукції, яка забезпечить їй максимальний прибуток від ре-

лізації продукції. Задачу розв'язати графічним методом та з використанням критерію Гурвіца, прийнявши показник оптимізму $\alpha = 0,5$.

13.7. У наближені посівного сезону фермер має чотири альтернативи:

a_1 – вирощувати кукурудзу,

a_2 – вирощувати пшеницю,

a_3 – вирощувати сою,

a_4 – використовувати землю під пасовисько.

Платежі, пов'язані з вказаними можливостями, залежатимуть від кількості опадів, які умовно можна поділити на чотири категорії:

s_1 – сильні опади,

s_2 – помірні опади,

s_3 – незначні опади,

s_4 – засушливий сезон.

Матриця платежів (у тис. грн.) оцінюється наступним чином:

Таблиця 13.13

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Що повинен посіяти фермер?

13.8. Один із N верстатів повинен бути обраний для виготовлення Q одиниць певної продукції. Мінімальна і максимальна потреба в продукції рівна Q_{\min} і Q_{\max} . Виробничі витрати V_i на виготовлення Q одиниць продукції на верстаті i містять фіксовані витрати K_i і питомі витрати c_i на виробництво одиниці продукції і виражаються формулою $V_i = K_i + c_i Q$. Розв'яжіть задачу за допомогою кожного з чотирьох крите-

рїїв прийняття рїшення в умовах невизначеностї при наступних даних, припускаючи, що $1000 \leq Q \leq 4000$.

Таблиця 13.14

Верстат i	K_i (грн.)	c_i (грн./од.)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

13.9. Знайти оптимальну стратегїю і цїну гри, якщо матриця платежїв задана для гравця А

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -9 \\ 7 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}.$$

13.10. Вкажїть область значень для параметрїв p і q , при яких пара (2,2) буде сїдловою точкою у грі. Матриця платежїв задана для гравця А

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & q & 6 \\ p & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & q \\ 4 & p & 6 \end{pmatrix}.$$

13.11. Вкажїть область, якїй належить цїна гри, платежї заданї для гравця А

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \\ -2 & 10 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$в) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$г) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -6 \\ 6 & -9 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13.12. Дві фірми виготовляють два конкуруючих товари. Кожен товар на даний час контролює 50% ринку. Покращивши якість товарів, обидві фірми збираються розгорнути рекламні компанії. Якщо вони не будуть цього робити, існуючий стан ринку не зміниться. Однак, якщо яка-небудь фірма буде більш активно рекламувати свої товари, то інша фірма втратить відповідний відсоток своїх споживачів. Дослідження ринку вказує, що 50% потенційних споживачів отримують інформацію через телебачення, 30% – через газети і 20% – через радіо. Сформулюйте задачу у вигляді гри двох гравців з нульовою сумою і оберіть відповідні засоби реклами для кожної фірми. Вкажіть інтервал значень, якому належить ціна гри. Чи може кожна фірма діяти з єдиною чистою стратегією?

13.13. Роздрібне торгове підприємство розробило декілька варіантів плану реалізації товарів на майбутньому ярмарку з урахуванням кон'юнктури ринку і попиту покупців. Показники прибутку, які отримуються від можливих їх комбінацій подані у таблиці 13.15.

Таблиця 13.15

План продаж	Величина прибутку в залежності від попиту, млн. грн.		
	C_1	C_2	C_3
P_1	2	1	3
P_2	1	2	3
P_3	2	3	1

Визначить: а) оптимальний план продаж товарів і ціну гри; б) якої стратегії слід дотримуватись торговому підприємству, якщо найбільш імовірною є ситуація: C_1 – 30%, C_2 – 30%, C_3 – 40%?

13.14. Розв'яжіть графічно наступні матричні ігри, платежі виплачуються гравцю А:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13.15. Розв'яжіть матричну гру методами лінійного програмування:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

РОЗДІЛ 14

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

14.1. Типи імітаційних моделей

У попередніх розділах розглядалися аналітичні моделі систем із стохастичною невизначеністю. Ці моделі дозволяють встановити аналітичну (формульну) залежність між елементами системи. Але аналітичні моделі вдається побудувати тільки для простих систем. Крім того, аналітичні моделі вимагають припущення про марківський характер процесу, що далеко не завжди відповідає дійсності. У випадках, коли аналітичні методи не можна застосувати або необхідно перевірити їх точність, уживають методи імітаційного (статистичного) моделювання.

Імітаційне моделювання є потужним інструментом дослідження поведінки реальних систем. Методи імітаційного моделювання дозволяють збирати необхідну інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп'ютеризованої моделі. Імітаційне моделювання не розв'язує оптимізаційні задачі, а являє собою техніку оцінки значень функціональних характеристик системи, що моделюється.

Імітаційне моделювання застосовується у різних галузях науки, техніки, економіки.

Використання сучасних імітаційних моделей засновано, в основному, на ідеї методу Монте-Карло. Відмінність полягає в тому, що імітаційна модель звичайно пов'язана з вивченням реально існуючої системи, поведінка якої є функцією часу. Існує два типи імітаційних моделей.

1. **Неперервні моделі** використовуються для систем, поведінка яких змінюється неперервно у часі. Типовим прикладом неперервної імітаційної моделі є вивчення динаміки народонаселення світу. Неперервні імітаційні моделі звичайно подаються у вигляді різницево-

диференціальних рівнянь, які описують взаємодію між різними елементами системами.

2. Дискретні моделі мають справу з системами, поведінка яких змінюється лише в задані моменти часу. Типовим прикладом такої моделі є черга, коли задача моделювання полягає в оцінюванні операційних характеристик системи обслуговування (наприклад, середній час очікування, середня довжина черги). Такі характеристики системи масового обслуговування змінюють свої значення або в момент появи клієнта, або при завершенні обслуговування. В інші моменти часу в системі нічого суттєвого з точки зору імітаційного моделювання не відбувається. Ті моменти часу, в які у системі відбуваються зміни, визначають події моделі (прибуття або вибуття клієнта). Те, що ці події відбуваються в дискретні моменти, вказує, що процес протікає у дискретному часі.

В дослідженні операцій, в основному, використовується дискретний тип імітаційних моделей.

Для складних систем, в яких взаємодіють велика кількість елементів та випадкові фактори заплутано переплетені, де процеси – явно немарковські, метод імітаційного моделювання, як правило, виявляється простіше аналітичного, а досить часто й єдиним можливим.

Взагалі, методом імітаційного моделювання може бути розв'язана будь-яка імовірнісна задача, але виправданим він стає тільки тоді, коли процедура отримання статистичної вибірки простіша, а не складніша за аналітичні розрахунки. Задачі, які мають аналітичний розв'язок, моделювати не варто. Наприклад, задачу про можливість виграшу в лотереї простіше розв'язується методами теорії ймовірностей ніж імітаційного моделювання.

Розглянемо іншу задачу. Нехай працює багатоканальна система масового обслуговування з чергою, але процес, який протікає в ній, очевидно немарковський: проміжки між замовленнями та час обслуговування мають непоказниковий розподіл. Більш того, канали час від часу вихо-

дять з ладу та починають ремонтуватись. Час безвідмовної роботи і час ремонтування каналу – непоказникові. Необхідно знайти характеристики СМО: ймовірності станів як функції часу, середню довжину черги, середній час перебування замовлення в системі і т.д. Задача на перший погляд не виявляється складною. Однак будь-яка особа, яка у певній мірі знайома з теорією масового обслуговування, не вагаючись, обере для її розв'язання метод імітаційного моделювання (перспективи створення аналітичної моделі для такої задачі дуже малі). Зрозуміло, що особі прийдеться моделювати на комп'ютері множину реалізацій випадкового процесу та за допомогою такої штучної «статистики» знайти наближено шукані ймовірності (як частоти відповідних подій) і математичні сподівання (як середні арифметичні значення випадкових подій).

В задачах дослідження операцій метод імітаційного моделювання застосовується у трьох основних випадках:

- 1) при моделюванні складних, комплексних систем, де присутні багато взаємодіючих факторів;
- 2) при перевірці можливості застосування більш простих, аналітичних методів та з'ясування умов їх застосування;
- 3) з метою знаходження поправок до емпіричних формул.

Аналітичні та імітаційні моделі мають свої переваги та недоліки при порівнянні між собою. Основним недоліком аналітичних моделей є те, що вони неминуче вимагають деяких припущень, зокрема, про те, що процес марківський. Допустимість цих припущень далеко не завжди може бути оцінена без контрольних розрахунків, а виконуються вони методом імітаційного моделювання. Статистичні моделі не вимагають серйозних припущень та спрощень. В імітаційній моделі легко розміщується що завгодно – будь-які закони розподілу, будь-яка складність систем, множинність їх станів. Головний же недолік статистичних моделей – їх громіздкість і трудомісткість (величезна кількість реалізацій, що необхідна для знаходження шуканих параметрів з припустимою точністю).

Крім того, результати імітаційного моделювання набагато складніше осмислювати, ніж розрахунки за аналітичними моделями. Вдале поєднання аналітичних та імітаційних методів в дослідженні операцій – справа мистецтва, чуття і досвіду дослідника. Часто аналітичними методами вдається описати деякі підсистеми, які виділяються у великій системі, а потім з таких моделей, як з «цеглинок», будують велику, складну модель.

14.2. ІДЕЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

Ідея методу Монте-Карло проста та полягає у використанні вибірки випадкових чисел для отримання шуканих оцінок. Замість того, щоб описувати систему за допомогою аналітичного апарату (диференціальних або алгебраїчних рівнянь), виконується «розіграш» випадкового явища за допомогою спеціально організованої процедури. Реалізація випадкового процесу кожен раз дає нову, відмінну від інших, реалізацію досліджуваного процесу. Сама по собі ця реалізація нічого нам не дає, але якщо таких реалізацій отримано багато, то їх множина може бути використана, як деякий штучний статистичний матеріал. Цей матеріал може бути оброблений звичайними методами математичної статистики. Після такої обробки можуть бути отримані наближені значення характеристик, які нас цікавлять (наприклад, математичне сподівання та дисперсія випадкових величин). При моделюванні випадкових явищ методом Монте-Карло користуються самою випадковістю як апаратом дослідження.

Для демонстрації методу Монте-Карло розглянемо приклад обчислення площі еліпса. Зрозуміло що площу еліпса ($S_{el} = \pi ab$, де a - мала піввісь, b - велика піввісь еліпса) ніхто так не знаходить, але приклад обраний для того щоб особливо підкреслити статистичну природу імітаційного експерименту.

Приклад 14.1. Скористаємось методом Монте-Карло для оцінки

площі еліпса, рівняння якого має вигляд $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Еліпс має велику піввісь $a = 10$, малу піввісь $b = 5$, центр якого знаходиться в точці $O(0;0)$.

Процедура оцінки площі вимагає замкнення еліпса в описаний навколо нього прямокутник, сторони якого дорівнюють вісям еліпса (рис. 14.1).

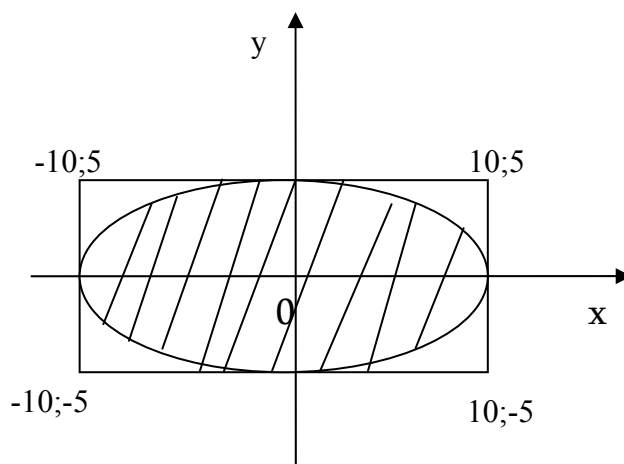


Рис. 14.1

Вершини прямокутника визначаються безпосередньо з геометричних властивостей фігури. Його площа дорівнює $S_{np} = 20 \times 10 = 200$ (кв.од.).

Оцінка площі еліпса заснована на припущенні, що всі точки прямокутника рівноможливі. Припустимо, що вибірка складається із спостережень n точок прямокутника, причому з них m точок попали в середину еліпса. Тоді площа еліпса $S_{ел} \approx \frac{m}{n} \cdot S_{np} = \frac{m}{n} \cdot 200$ (геометричне означення ймовірності).

Тут координати x і y точок прямокутника представлені як рівномірно розподілені випадкові величини з густинами ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{20}, \quad -10 \leq x \leq 10,$$

$$f(y) = \frac{1}{10}, \quad -5 \leq y \leq 5.$$

Обидві функції рівні нулю за межами вказаних інтервалів.

Нехай R_1 і R_2 - різні випадкові числа з інтервалу $[0;1]$. Тоді координати точок прямокутника можна виразити через ці випадкові числа:

$$x = -10 + [10 - (-10)]R_1 = -10 + 20R_1,$$

$$y = -5 + [5 - (-5)]R_2 = -5 + 10R_2.$$

В таблиці 14.1 наведений невеликий список випадкових чисел з інтервалу $[0;1]$. Ці числа були генеровані із використанням *мультиплікативного методу порівнянь*, який описаний в розділі 14.3.

Таблиця 14.1

0,0589	0,3529	0,5869	0,3455	0,7900	0,6307
0,6733	0,3646	0,1281	0,4871	0,7698	0,2346
0,4799	0,7676	0,2867	0,8111	0,2871	0,4220
0,9486	0,8931	0,8216	0,8912	0,9534	0,6991
0,6139	0,3919	0,8261	0,4291	0,1394	0,9745
0,5933	0,7876	0,3866	0,2302	0,9025	0,3428
0,9341	0,5199	0,7125	0,5954	0,1605	0,6037
0,1782	0,6358	0,2108	0,5423	0,3567	0,2569
0,3473	0,7472	0,3575	0,4208	0,3070	0,0546
0,5644	0,8954	0,2926	0,6975	0,5513	0,0305

Використовуючи наведені формули, можна згенерувати рівномірно розподілену випадкову точку прямокутника для кожної пари випадкових чисел $(R_1; R_2)$. Генерована точка $(x'; y')$ попадає всередину еліпса,

якщо $\frac{x'^2}{100} + \frac{y'^2}{25} \leq 1$.

Наприклад, якщо $R_1 = 0,0589$ і $R_2 = 0,6733$, то

$$x' = -10 + 20R_1 = -10 + 20 \cdot 0,0589 = -8,822,$$

$$y' = -5 + 10R_2 = -5 + 10 \cdot 0,6733 = 1,733.$$

Так як величина $\frac{(-8,822)^2}{100} + \frac{1,733^2}{25} = 0,8984$ менша одиниці, то точка

$(x'; y')$ попадає в середину еліпса.

Дослідимо вплив випадкової вибірки на точність оцінки площі еліпса. На рис. 14.2 показані оцінки площі еліпса для різних об'ємів вибірки

(n змінюється від 500 до 10000). При кожному n експеримент повторювався десять раз, при цьому використовувались різні послідовності випадкових чисел з інтервалу $[0;1]$. На рисунку показані оцінки площі лише для першого експерименту (крива $S(n)$), середнє значення десяти експериментів (крива $SN(n)$) та точне значення площі (пряма St).

На рис. 14.3 показані оцінки стандартного відхилення для десяти експериментів.

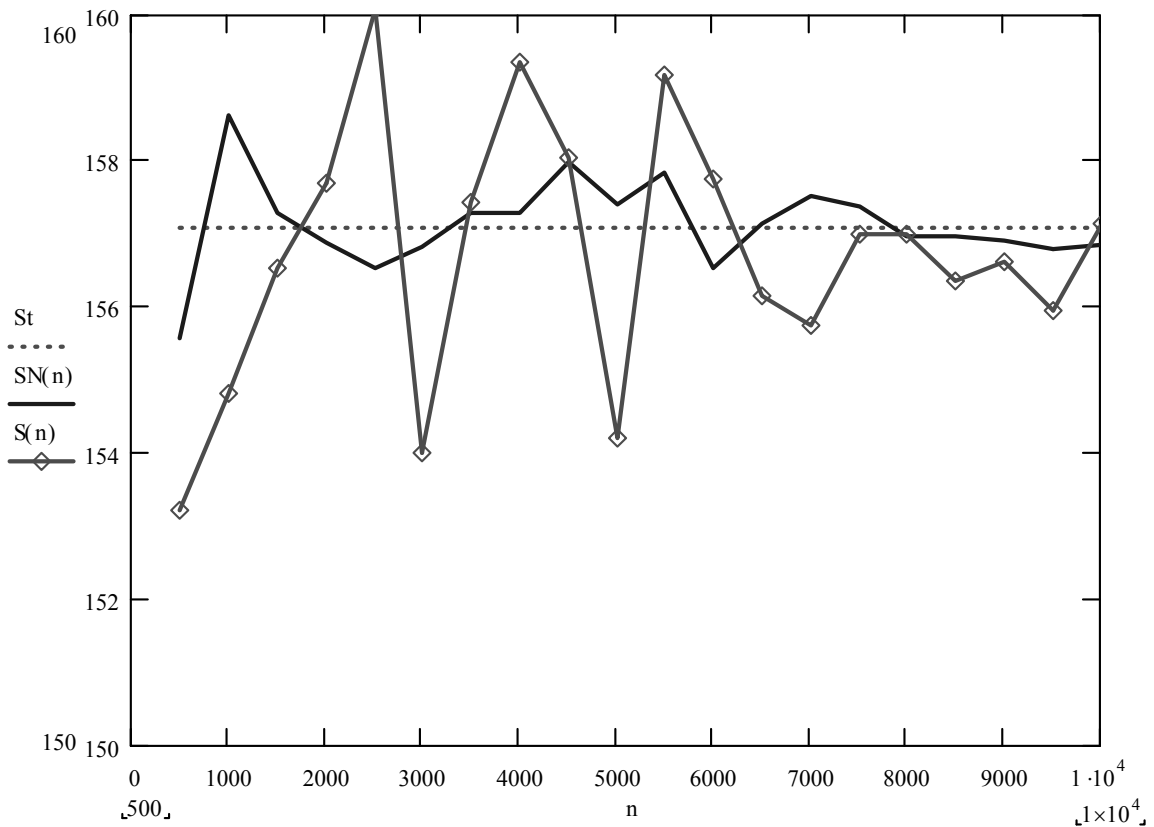


Рис. 14.2

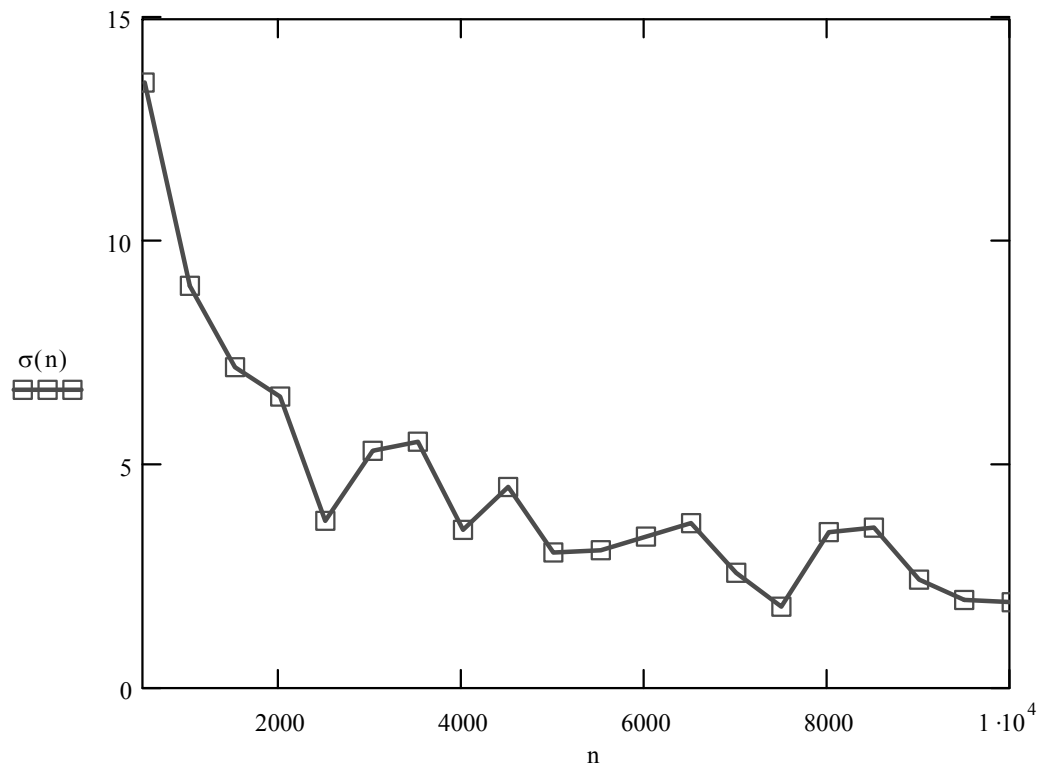


Рис. 14.3

Виходячи з результатів експерименту, можна зробити наступні висновки.

Оцінка площі еліпса покращується при збільшенні кількості точок, що генеруються при збільшенні кількості точок, генеруються (із збільшенням об'єму вибірки n).

Усереднення результатів десяти експериментів для кожної вибірки об'єму n дає більш точну оцінку площі, ніж будь-який експеримент.

Внаслідок того, що оцінки площі мають розкид, важливо, щоб результати експерименту, пов'язаного з моделюванням, були виражені у вигляді довірчих інтервалів. В нашому прикладі, якщо S являє собою точне значення площі, а \bar{S} та σ^2 - середнє та дисперсію N спостережень, то $100(1-\alpha)\%$ -й довірчий інтервал для S задається у вигляді

$$\bar{S} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2, N-1} \leq S \leq \bar{S} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2, N-1}, \text{ де } t_{\alpha/2, N-1} - (100\alpha/2)\% \text{-а точка } t \text{-розподілу}$$

(розподілу Стюдента) з $N-1$ ступенями вільності. Відмітимо, що N означає кількість експериментів і його слід відрізняти від об'єму вибірки n .

В нашому прикладі для найбільшого об'єму вибірки $n = 10000$ при $N = 10$, $\bar{S} = 156,99$, $\sigma = 0,81$ результуючим довірчим 95%-м інтервалом є $156,85 \leq S \leq 157,13$.

Розглянутий приклад ставить два питання, які характерні для будь-якого експерименту, пов'язаного з моделюванням:

1. Яким повинен бути об'єм вибірки n для досягнення необхідного значення довірчих інтервалів?

2. Скільки для цього потрібно експериментів N ?

Відповіді залежать від природи експерименту, пов'язаного з моделюванням. Як й у будь-якому статистичному експерименті, більші значення n і N забезпечують більш надійні результати.

14.3. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Основним елементом, з сукупності якого складається статистична модель, є одна випадкова реалізація явища, яке моделюється. Окрема реалізація розігрується за допомогою спеціально розробленої процедури (алгоритму), в якій важливу роль грає кидання жеребу. Кожен раз, коли в хід явища втручається випадок, його вплив враховується не розрахунком, а жеребом.

Домовимось називати одиничним жеребом будь-який дослід із випадковим результатом, який відповідає на одне з наступних питань:

1. Відбулась або ні подія A ?

2. Яка з подій A_1, A_2, \dots, A_k відбулась?

3. Яке значення прийняла випадкова величина X ?

4. Яку сукупність значень прийняла система випадкових величин

X_1, X_2, \dots, X_k ?

Будь-яка реалізація випадкового явища методом Монте-Карло буде-тьсся на ланцюжку одиничних жеребів, які передуються із звичайними розрахунками. Ними враховується вплив результату жеребу на подаль-

ший хід подій (зокрема на умови, в яких буде розіграний наступний жереб).

Одиничний жереб може бути розіграний різними способами, але є один стандартний механізм за допомогою якого можна здійснити будь-який різновид жеребу. А саме, для кожного з них достатньо мати випадкове число R , всі значення якого однаково розподілені та мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0;1]$.

Покажемо як за допомогою такого числа можна розіграти будь-який з чотирьох видів одиничного жеребу.

1. *Відбулась або ні подія A ?* Для того щоб дати відповідь на це питання, треба знати ймовірність p події A . Розіграємо випадкове число R від 0 до 1. Якщо це число виявилось меншим p , як показано на рис. 14.4, то будемо вважати, що подія відбулась, а якщо більше p – не відбулась.

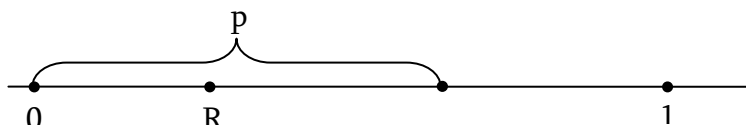


Рис. 14.4

Якщо число R точно дорівнює p (що малоімовірно), то можна прийняти, що подія A відбулась.

2. *Яка з декількох подій відбулась?* Нехай події A_1, A_2, \dots, A_k несумісні та утворюють повну групу. Тоді сума їх ймовірностей p_1, p_2, \dots, p_k дорівнює одиниці. Розділимо інтервал $(0;1)$ на k ділянок довжиною p_1, p_2, \dots, p_k . На яку з ділянок попало число R – та подія й відбулась (рис. 14.5).

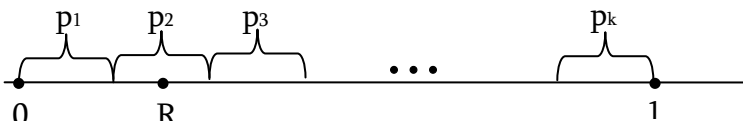


Рис. 14.5

3. *Яке значення прийняла випадкова величина X ?* Якщо випадкова величина X дискретна, тобто має значення X_1, X_2, \dots, X_k з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_k , то випадок зводиться до попереднього. Якщо випадкова величина неперервна і має задану густину ймовірностей $f(x)$, то існує

декілька методів генерації вибірових значень. Деякі з них розглянуті в наступному розділі 14.4.

4. Яку сукупність значень прийняли випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_k ? Якщо випадкові величини незалежні, то достатньо k раз повторити процедуру попереднього пункту. Якщо ж вони залежні, то розігрувати кожну наступну треба на основі її умовного розподілу при умові, що всі попередні прийняли ті значення, які дав розіграш.

Всі варіанти одиничного жеребкування зводяться до розіграшу (одно- або багатократного) випадкового числа R від 0 до 1. Розглянемо методи генерування таких чисел. Існує цілий ряд різновидів так званих датчиків випадкових чисел, які розв'язують цю задачу.

Самий простий з датчиків випадкових чисел – це барабан, в якому перемішуються нумеровані кульки. Нехай, наприклад, нам треба розіграти випадкове число від 0 до 1 з точністю 0,001. покладемо у барабан 1000 нумерованих кульок, примусимо його обертатися та після зупинки виберемо будь-яку кульку. Її номер розділимо на 1000.

Можна зробити й по-іншому: замість 1000 кульок покласти в барабан десять, з цифрами 0,1,2,...,9. Вийнявши першу кульку, будемо мати перший десятковий розряд дробу. Повернемо кульку назад та знов примусимо барабан обертатися та дістанемо другу кульку – це буде другий десятковий розряд і т.д. Отриманий таким чином десятковий дріб буде мати рівномірний розподіл від 0 до 1.

Справжні випадкові числа з інтервалу $[0;1]$ можна генерувати лише за допомогою електронних приладів. Так як імітаційні моделі реалізуються на комп'ютері, використання електронних приладів для генерації випадкових чисел дуже сповільнило б процедуру імітаційного моделювання. Крім того, електронні прилади активізуються випадково. Отже, неможливо за бажанням відтворити одну й ту ж послідовність випадкових чисел. Цей факт є важливим для налагодження та перевірки імітаційної моделі.

В імітаційному моделюванні всі методи генерації випадкових чисел повинні бути засновані на арифметичних операціях. Такі числа не є дійсно випадковими, так як вони можуть бути визначені заздалегідь. Тому їх називають *псевдовипадковими*.

Існує ряд алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел, які розрізняються між собою за складністю, рівномірністю та іншими ознаками.

Одним з найпростіших алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел полягає в наступному. Беруть два довільних n -значних двійкових числа a_1 і a_2 , перемножують їх та в отриманому добутку беруть n середніх знаків. Це буде число a_3 . Потім перемножують a_2 і a_3 , та знов у добутку беруть n середніх знаків і т.д. Отримані таким чином числа розглядають як послідовність двійкових дробів з n знаками після коми.

Найчастіше використовується *мультиплікативний метод порівнянь*. У відповідності із цим методом псевдовипадкове число R_n при заданих значеннях параметрів u_0 , b , c і m можна обчислити за наступною формулою:

$$u_n = (bu_{n-1} + c) \bmod(m), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m}.$$

Тут операція \bmod визначає залишковий член при діленні. Початкове значення параметра u_0 , звичайно, називають початковим числом генератора випадкових чисел.

Згенеруємо, наприклад, три випадкових числа при наступних початкових даних: $b=9$, $c=5$, $u_0=11$ і $m=12$.

$$u_1 = (9 \cdot 11 + 5) \bmod(12) = 8, \quad R_1 = \frac{8}{12} = 0,6667,$$

$$u_2 = (9 \cdot 8 + 5) \bmod(12) = 5, \quad R_1 = \frac{5}{12} = 0,4167,$$

$$u_3 = (9 \cdot 5 + 5) \bmod(12) = 2, \quad R_1 = \frac{2}{12} = 0,1667.$$

Конкретний вибір параметрів u_0 , b , c і m є вирішальним фактором, який визначає статистичні якості генератора випадкових чисел, а також довжину його циклу (по закінченню циклу послідовність чисел, що генерується, починає повторювати себе). Використання параметрів, обраних навмання, не дає гарного генератора випадкових чисел. Надійні генератори, поряд з достатньо великою довжиною циклу, повинні пройти відповідні статистичні перевірки, для того, щоб гарантувати рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$ отриманої послідовності. На цю умову треба звертати увагу при використанні неперевіреного програмного забезпечення в якості генератора випадкових чисел.

Можливі також варіації мультиплікативного методу порівнянь, які покращують якість генератора.

Всі імітаційні моделі з дискретними подіями описують безпосередньо або опосередковано ситуації з чергою. В загальному випадку будь-яка модель з дискретними подіями складається із композиції взаємопов'язаних черг. З метою збору статистичних даних (показників функціонування системи) відмітимо, що зміни в системі можуть мати місце лише у випадку, коли клієнт надходить у чергу або коли виходить із системи після обслуговування. Це означає, що двома головними подіями у будь-якій дискретній імітаційній моделі є прибуття та вибуття клієнтів. Це єдині показники за якими необхідно досліджувати систему. В інші моменти часу ніяких змін, які впливають на статистичні дані системи, не відбувається.

Опишемо логіку роботи імітаційної моделі у термінах прибуття та вибуття клієнтів.

Подія, пов'язана з прибуттям клієнта

1. Згенерувати та зберегти час події, пов'язаної з прибуттям наступного клієнта. Він дорівнює поточному часу моделювання плюс проміжок часу між прибуттям клієнтів (генерується).

2. Якщо сервіси обслуговування вільні:

а) почати обслуговування клієнта, якій надійшов, змінити стан системи на робочий та скорегувати дані використання системи;

б) згенерувати та зберегти хронологічно час події, яка пов'язана з вибуттям клієнта. Цей час дорівнює поточному часу плюс час обслуговування.

3. Якщо сервіси обслуговування зайняті, поставити клієнта, який надійшов, у чергу та збільшити її довжини на одиницю.

Подія, пов'язана з вибуттям клієнта (закінчення обслуговування)

1. Якщо черга пуста, оголосити систему вільною. Скорегувати дані використання системи.

2. Якщо черга не є пустою:

а) почати обслуговувати першого у черзі клієнта. Зменшити довжину черги на одиницю та скорегувати дані використання системи;

б) згенерувати та зберегти хронологічно час події, яка пов'язана з вибуттям клієнта, який зайшов на обслуговування. Цей час дорівнює поточному часу моделювання плюс час обслуговування.

14.4. МЕТОДИ ГЕНЕРУВАННЯ ВИБІРКОВИХ ЗНАЧЕНЬ

Випадковість в імітаційних моделях виникає тоді, коли інтервал часу t між послідовними подіями є випадковим. Розглянемо методи отримання послідовних випадкових значень $t = t_1, t_2, t_3, \dots$, які мають заданий розподіл ймовірностей $f(x)$. Всі методи засновані на використанні незалежних однаково розподілених випадкових чисел, які мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0, 1]$.

Метод обернених функцій

Нехай необхідно отримати значення x випадкової величини y , яка має густину ймовірностей $f(x)$. Згідно з методом обернених функцій, спочатку знаходиться функція розподілу

$$F(x) = P\{y \leq x\}, \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Нехай R - випадкове число, яке отримано з рівномірного розподілу на інтервалі $[0,1]$, і нехай F^{-1} - обернена функція до функції F .

Згенеруємо випадкове число R та обчислимо шукане випадкове число $x = F^{-1}(R)$. Процедура ілюстрована на рис. 14.6.

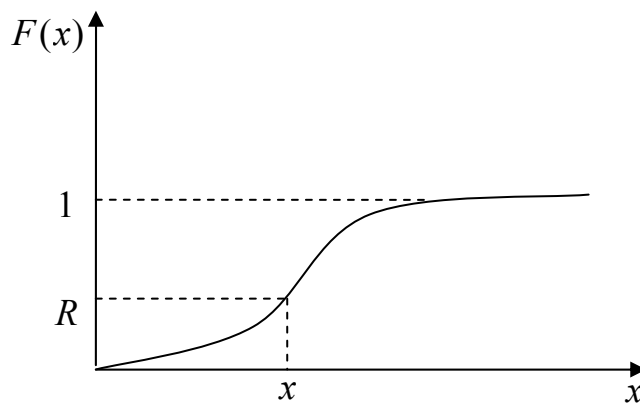


Рис. 14.6

Коректність запропонованої процедури ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. Для заданої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини x , $-\infty < x < +\infty$, випадкова величина $z = F(x)$, $0 \leq z \leq 1$, має густину ймовірностей $f(z) = 1$, $0 \leq z \leq 1$, тобто є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на інтервалі $[0,1]$.

Доведення. Випадкова величина z є рівномірно розподіленою на інтервалі $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли $P\{z \leq Z\} = Z$, $0 \leq Z \leq 1$.

Доведемо це співвідношення:

$$P\{z \leq Z\} = P\{F(x) \leq Z\} = P\{x \leq F^{-1}(Z)\} = F(F^{-1}(Z)) = Z.$$
 При цьому $0 \leq Z \leq 1$, так як $0 \leq P\{z \leq Z\} \leq 1$.

Експоненціальний розподіл. Нехай час t між прибуттям клієнтів розподілений за експоненціальним розподілом з математичним сподіванням $M(t) = \frac{1}{\lambda}$ одиниць часу, тобто густина ймовірностей задається

формулою $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Знайдемо випадкове значення часу t .

Функція розподілу обчислюється стандартно:

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Якщо R - випадкове число з інтервалу $[0,1]$, то припускаючи $R = F(t)$, отримуємо $t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R)$. Так як R випадкове число з інтервалу $[0,1]$, то й $(1 - R)$ являє собою випадкове число з того ж інтервалу. Тому можна замінити $(1 - R)$ на R .

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln R.$$

Метод обернених функцій дає гарні результати для неперервних розподілів, функція розподілу яких має аналітичне представлення. Такі розподіли як нормальний, гама-розподіл та розподіл Пуассона, до цього класу не відносяться. Для отримання випадкових значень, які мають ці розподіли, використовуються інші методи.

Метод згорток

Основна ідея даного методу полягає в тому, щоб виразити шукану випадкову величину у вигляді суми інших випадкових величин, для яких легко отримати реалізацію випадкових значень. Типовими серед таких розподілів є розподіли Ерланга і Пуассона, які можна отримати з експоненціального розподілу.

Розподіл Ерланга. Випадкова величина, яка має розподіл Ерланга розмірності m , визначається як сума (згортка) m незалежних випадкових величин, кожна з яких має експоненціальний розподіл з параметром λ . Нехай y - випадкова величина, яка має розподіл Ерланга розмірності m . Тоді $y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$, де y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) - незалежні експоненціально розподілені випадкові величини, густина ймовірностей яких задається формулою $f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}$, $y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Таким чином, зна-

чення випадкової величини Ерланга розмірності m можна обчислити як

$$y = -\frac{1}{\lambda} (\ln R_1 + \ln R_2 + \dots + \ln R_m) = -\frac{1}{\lambda} \ln(R_1 R_2 \dots R_m).$$

Розподіл Пуассона. Якщо розподіл кількості подій, які відбуваються в одиницю часу буде пуассонівським, то час між подіями являє собою випадкову величину, яка розподілена за експоненціальним законом і навпаки. Цей факт використовується для отримання випадкових значень, які підлягають розподілу Пуассона.

Нехай для заданого розподілу Пуассона середня кількість подій в одиницю часу дорівнює λ . Тоді час між подіями є випадковою величиною, яка має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням $1/\lambda$ одиниць часу. Це означає, що протягом t одиниць часу буде мати місце n подій (число n характеризується розподілом Пуассона), тоді і тільки тоді, коли час до реалізації події n менше t , яке менше часу до реалізації події $n+1$. Ця умова може бути записана так

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \leq t < t_1 + t_2 + \dots + t_n + t_{n+1}, \quad n > 0.$$

$$0 \leq t \leq t_1, \quad n = 0,$$

де t_i - випадкова величина, яка має експоненціальний розподіл із середнім $1/\lambda$. Тоді

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(R_1 R_2 \dots R_n) \leq t < -\frac{1}{\lambda} \ln(R_1 R_2 \dots R_{n+1}), \quad n > 0$$

$$0 \leq t < -\frac{1}{\lambda} \ln R_1, \quad n = 0.$$

Звідки отримуємо

$$R_1 R_2 \dots R_n \geq e^{-\lambda t} > R_1 R_2 \dots R_{n+1}, \quad n > 0,$$

$$1 \geq e^{-\lambda t} > R_1, \quad n = 0.$$

Наведемо приклад. Нехай необхідно отримати випадкове значення, яке відповідає розподілу Пуассона з середньою частотою $\lambda = 4$ події за годину, при $t = 0,5$ год. Це дає нам $e^{-\lambda t} = e^{-4 \cdot 0,5} \approx 0,1353$. Скориставшись

випадковим числом першого стовпця таблиці 14.1, відмічаємо що $R_1 = 0,0589$ менше $e^{-\lambda t} = 0,1353$. Отже, $n = 0$.

Нормальний розподіл. Центральна гранична теорема стверджує, що сума n однаково розподілених випадкових величин прямує до величини, розподіленої за нормальним законом, при нескінченному збільшенні n . Skorистаємось цим для отримання значень, які відповідають нормальному розподілу з математичним сподіванням μ та стандартним відхиленням σ .

Позначимо $x = R_1 + R_2 + \dots + R_n$,

де R_i - випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0,1]$. Відповідно до центральної граничної теореми випадкова величина x є асимптотично нормальною величиною з середнім $n/2$ та дисперсією $n/12$. Отже, випадкова величина y , яка розподілена за нормальним законом $N(\mu, \sigma)$ з математичним сподіванням μ і стандартним відхиленням σ , може бути отримана із випадкової величини x за формулою

$$y = \mu + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right).$$

Для зручності в практичних задачах n звичайно вибирають рівним 6 або 12, що приводить до наступних формул

$$y = \mu + \sigma \sqrt{2}(x - 3),$$

$$y = \mu + \sigma(x - 6).$$

Припустимо, що необхідно отримати випадкове значення, яке відповідає нормальному розподілу $N(10, 2)$. Обчислимо суму перших 12 випадкових чисел табл. 14.1 $x = 6,1094$. Отже, $y = 10 + 2 \cdot (6,1094 - 6) = 10,2188$.

Ця процедура незручна тому що, для отримання одного вибіркового значення, необхідно генерувати n (в нашому прикладі 12) випадкових чисел.

Згідно з методом Бокса-Мюллера більш ефективною процедурою є використання перетворення $x = \sqrt{-2 \ln R_1} \cos(2\pi R_2)$. Величина x є стандартно розподіленою випадковою величиною, тобто має розподіл $N(0,1)$. Отже $y = \mu + \sigma x$ дає значення, яке характеризується нормальним розподілом $N(\mu, \sigma)$. Крім того, схожа формула $x = \sqrt{-2 \ln R_1} \sin(2\pi R_2)$ дає випадкову величину з таким же розподілом. Причому ці дві випадкові величини, отримані за схожими формулами та залежні від одних й тих же рівномірно розподілених випадкових чисел R_1 і R_2 , незалежні між собою.

Використаємо метод Бокса-Мюллера для знаходження значень, які мають нормальний розподіл $N(10, 2)$. Візьмемо два перших числа з табл. 14.1 та отримуємо

$$x_1 = \sqrt{-2 \ln 0,0589} \cos(2\pi \cdot 0,6733) \approx -1,103$$

$$x_2 = \sqrt{-2 \ln 0,0589} \sin(2\pi \cdot 0,6733) \approx -2,108.$$

Отже,

$$y_1 = 10 + 2 \cdot (-1,103) = 7,794$$

$$y_2 = 10 + 2 \cdot (-2,108) = 5,7823$$

Метод відбору (метод відмов)

Даний метод розроблений для отримання значень випадкових величин із складними функціями густин ймовірностей, до яких неможливо застосовувати попередні методи. Загальна ідея даного методу зводиться до заміни складної густини ймовірностей $f(x)$ більш зручною, з аналітичної точки зору, густиною ймовірностей $h(x)$. Потім значення, яке відповідає густині ймовірностей $h(x)$, використовується для отримання значень, що відповідають густині $f(x)$.

Для густини ймовірностей $f(x)$ визначаємо мажоруючу функцію $g(x)$, таку, що

$$g(x) \geq f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Потім визначаємо густину ймовірностей $h(x)$ шляхом нормалізації функції $g(x)$:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(z) dz}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Метод відбору передбачає виконання наступних дій.

1. За допомогою методу обернених функцій або методу згорток отримуємо випадкове значення $x = x_1$, яке відповідає густині ймовірностей $h(x)$.
2. Генеруємо випадкове число R з інтервалу $[0,1]$.
3. Якщо $R \leq f(x_1)/g(x_1)$, то слід прийняти x_1 як шукане значення, яке відповідає розподілу $f(x)$. Інакше необхідно повернутися до п.1, відкидаючи значення x_1 .

Бета-розподіл. Скористаємось методом відбору для знаходження значення, яке відповідає бета-розподілу, густина ймовірностей якого задається формулою

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

На рис.6.7 зображені функція $f(x)$ та мажоруюча її функція $g(x)$.

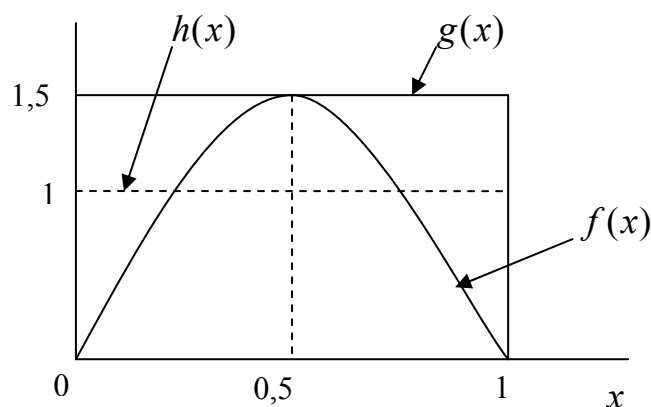


Рис.6.7

Значення мажоруючої функції $g(x)$ дорівнює максимальному значенню функції $f(x)$, якого вона досягає у точці $x = 0,5$. Це означає, що

$$g(x) = 1,5, \quad 0 < x < 1.$$

Функція густини розподілу $h(x)$ обчислюється за формулою

$$h(x) = \frac{g(x)}{\text{площа під } g(x)} = \frac{1,5}{1 \cdot 1,5} = 1.$$

Виконаємо дії згідно з алгоритмом методу та використаємо послідовності випадкових чисел з табл. 14.1.

1. Використання числа $R = 0,0589$ приводить до випадкового значення $x = 0,0589$, що відповідає густині $h(x)$.

2. Вибираємо з табл. 14.1 наступне число $R = 0,6733$.

3. Так як $f(0,0586)/g(0,0589) = 0,3326/1,5 = 0,2217$ менше $R = 0,6733$, відкидаємо значення $x = 0,0589$.

Для отримання другого значення повторюємо дії.

1. Використання числа $R = 0,4799$ приводить до випадкового значення $x = 0,4799$, що відповідає густині $h(x)$.

2. Вибираємо з табл. 14.1 наступне число $R = 0,9486$.

3. Так як $f(0,4799)/g(0,4799) = 0,9984$ більше $R = 0,9486$, ми приймаємо значення $x = 0,4799$ як таке, що відповідає бета-розподілу.

З цього прикладу видно, що ітерації методу відбору повинні повторюватись з новими значеннями випадкових чисел.

Ефективність методу відбору підвищується якщо мажоруючу функцію $g(x)$ обирати так, щоб вона «обгортала» б функцію $f(x)$ як можна щільніше та приводила до припустимої з аналітичної точки зору апроксимуючої функції $h(x)$. Наприклад, метод буде більш ефективним, якщо прямокутну мажоруючу функцію $g(x)$ (рис. 14.7) замінити східчастою. Із збільшенням кількості сходинок функція $g(x)$ стає більш щільною до функції $f(x)$. Але отримання більш щільної мажоруючої функції спричиняє додаткові обчислення, які можуть стати занадто громіздкими.

14.5. МЕТОДИ ЗБОРУ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

Імітаційне моделювання являє собою статистичний експеримент. Його результати повинні ґрунтуватись на відповідних статистичних перевірках (з використанням, наприклад, довірчих інтервалів і методів перевірки гіпотез). Для виконання цієї задачі спостереження в імітаційному експерименті повинні задовольняти наступним трьом вимогам:

1. Спостереження мають стаціонарні розподіли, тобто розподіли, які не змінюються під час проведення експерименту.
2. Спостереження мають нормальний розподіл.
3. Спостереження незалежні.

Нестаціонарність процесу імітації можна подолати шляхом використання вибірки достатньо великого об'єму. У прикладі 14.1 ми бачили, що точність оцінки еліпса методом Монте-Карло підвищується із збільшенням об'єму вибірки.

Результати спостережень над моделлю залежать від тривалості періоду імітації. Початковий період нестійкої поведінки моделі звичайно називають *перехідним*. Коли результати імітаційного експерименту стабілізуються, кажуть, що система працює в *стаціонарному* режимі. Тривалість перехідного періоду визначається в основному початковими характеристиками моделі. Неможливо передбачити, коли настане стаціонарний режим, але в загальному випадку, чим довше тривалість прогону моделі, тим вище шанс досягти стаціонарного стану.

Розглянемо другу вимогу. Вимога нормального розподілу спостережень може бути виконана, якщо залучити центральну граничну теорему, яка стверджує, що розподіл середнього вибірки є асимптотично нормальним незалежно від розподілу генеральної сукупності, з якої взята вибірка. Отже центральна гранична теорема є головним засобом виконання вимоги про нормальний розподіл.

Третя вимога стосується незалежності спостережень. Природа імітаційного експерименту не гарантує незалежності між послідовними спо-

стереженнями над моделлю. Але використання вибірових середніх для представлення окремих спостережень дозволяє пом'якшити проблему, яка пов'язана з незалежністю. Для цього, зокрема, необхідно збільшити часовий інтервал імітації для отримання вибірового середнього.

Поняття перехідного і стаціонарного станів мають сенс у ситуаціях коли системи функціонують нескінченно довго. У випадку, коли імітація має початок і кінець (наприклад, робота банку, якщо він звичайно працює вісім годин на добу), перехідна поведінка є частиною нормального функціонування системи та не може ігноруватись. Єдиним виходом з такої ситуації є збільшення, наскільки це можливо, кількості спостережень.

Розглянемо три найбільш загальні методи збору інформації в процесі імітаційного моделювання:

- метод підінтервалів;
- метод повторення;
- метод циклів.

Метод підінтервалів

Нехай імітація триває протягом T одиниць часу (тобто довжина прогону моделі дорівнює T) і необхідно отримати n спостережень. Згідно з методом підінтервалів необхідно спочатку «обрізати» інформацію, яка відноситься до перехідного періоду, а потім розділити частину, що залишилась, на n рівних підінтервалів (рис. 14.8). Середнє значення шуканої величини (наприклад, довжина черги) всередині кожного підінтервалу використовується потім в якості одиничного спостереження.

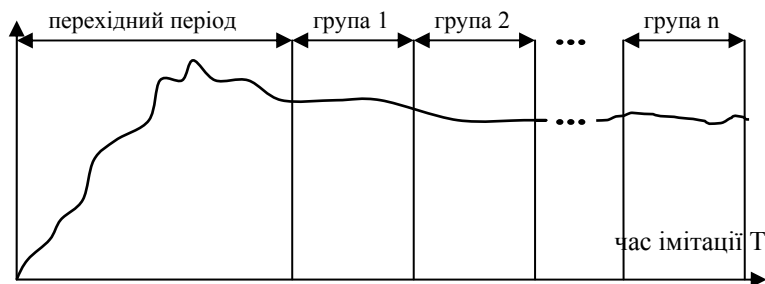


Рис. 14.8

Перевагою даного методу є те, що вплив перехідних (нестационарних) умов зменшується, зокрема на дані, які зібрані в кінці часу імітації. Недоліком є те, що послідовні підінтервали із загальною границею будуть корельованими, що приводить до невиконання припущення про незалежність. Вплив кореляції може бути зменшено шляхом збільшення інтервалу часу для кожного підінтервалу.

Метод повторення

У даному методі кожне спостереження являє собою незалежний прогон моделі, в якому перехідний процес не враховується (рис. 14.9). Обчислення середніх величин для кожної вибірки дає як й у попередньому методі одиничне спостереження.

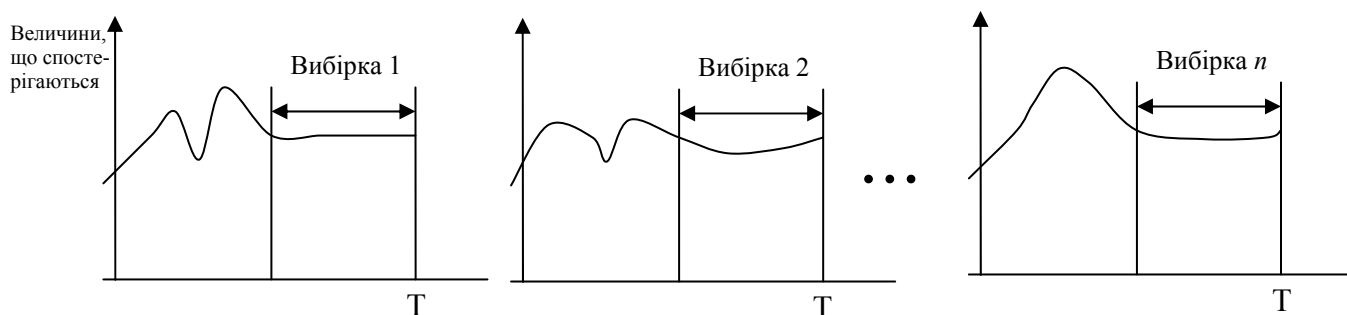


Рис. 14.9

Перевагою цього методу є те, що кожний імітаційний прогон моделі визначається своєю послідовністю випадкових чисел з інтервалу $[0,1]$, що дійсно забезпечує статистичну незалежність спостережень. Недолік полягає у тому, що всі спостереження можуть бути під сильним впливом початкових перехідних умов. Цей недолік можна пом'якшити збільшенням довжини прогону моделі.

Метод циклів

Цей метод можна розглядати як розширений варіант методу підінтервалів. Мотивацією цього методу є намагання зменшити вплив автокореляції, яка характерна для методу підінтервалів. Досягається це тим, що для кожного інтервалу (вибірки) забезпечуються однакові початкові умови. Наприклад, якщо в якості змінної розглядається довжина черги,

то кожен інтервал повинен починатись у той момент, коли довжина черги дорівнює нулю. На відміну від методу підінтегралів, в методі циклів довжини інтервалів кожної вибірки можуть бути різними.

Хоч метод циклів й дозволяє зменшити вплив автокореляції, його недоліком є менша ніж у методі підінтервалів кількість спостережень при заданій довжині прогону моделі. Це обумовлено тим, що не можна заздалегідь визначити, коли новий цикл починається та яка тривалість кожного циклу. Однак, можна очікувати, що в стаціонарних умовах початкові точки послідовних циклів будуть розміщені більш менш рівномірно.

Обчислення середнього для циклу j визначається у вигляді відношення двох випадкових величин a_j і b_j , тобто у вигляді $x_j = a_j/b_j$. Визначення величин a_j і b_j залежить від змінної, яка обчислюється. Наприклад, якщо змінна є функцією часу, то a_j являє собою площу під кривою, яка визначає залежність змінної від часу, а b_j - тривалість відповідного інтервалу часу. Якщо ж змінна є функцією кількості подій, то a_j - загальна сума спостережень цієї величини в межах циклу j , а b_j - загальна кількість подій всередині відповідного циклу.

Так як x_j є відношенням двох випадкових величин, то в даному випадку незміщена оцінка вибіркового середнього визначається формулою

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j,$$

$$\text{де } y_j = \frac{n\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{(n-1)(n\bar{a} - a_j)}{n\bar{b} - b_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j, \quad \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j.$$

У цьому випадку довірчий інтервал для математичного сподівання можна знайти за допомогою вибіркового середнього \bar{y} та стандартного відхилення величин y_j .

14.6. СИСТЕМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Імітаційне моделювання, як різновид моделювання економічних систем, в значній мірі базується на комп'ютерних технологіях. Перші методи імітаційного моделювання використовували алгоритмічний підхід. Складність реальних економічних процесів та наявність багатьох суперечливих умов існування цих процесів (від сотень до тисяч) приводять до наступного результату. Якщо скористатись алгоритмічним підходом при створенні імітаційної моделі з використанням звичайних мов програмування (BASIC, FORTRAN, C та ін.), то складність і об'єм моделюючих програм будуть дуже великими, а логіка моделі занадто заплутаною. Створення такої імітаційної моделі потребує значних витрат часу.

Слід відмітити, що алгоритмічний підхід і зараз використовується в навчальних цілях для вивчення основ моделювання елементів економічних систем.

Однак в середині 1970-х років з'явилися перші достатньо технологічні інструментальні середовища імітаційного моделювання, які мали власні мовні засоби.

Реалізація імітаційних моделей спричиняє два різних типи обчислень:

- 1) маніпуляції реєстрацією, які мають справу з хронологічним накопиченням та обробкою подій моделі;
- 2) обчислення, пов'язані з генеруванням випадкових чисел та збором статистичних даних, які відносяться до моделі.

Обчислення першого типу засновані на різних логічних методах обробки списків, а обчислення другого типу звичайно дуже громіздкі та займають багато часу. Природа цих обчислень робить комп'ютер важли-

вим інструментом в реалізації імітаційних моделей та стимулює, в свою чергу, створення спеціалізованих систем, що дозволяє виконувати ці обчислення більш зручним та ефективним способом.

Системи дискретного імітаційного моделювання поділяються на дві категорії:

- системи, які орієнтовані на планування подій;
- системи, які орієнтовані на обробку процесів (процедур).

При використанні систем, які орієнтовані на планування подій, користувачу необхідно вказати дії, що пов'язані з кожною подією, яка відбувається в системі. Основна роль системи у цьому випадку зводиться до автоматизації процесу отримання випадкових значень, що мають відповідні розподіли, хронологічному накопиченню, обробки подій і збору даних.

Процедурно-орієнтовані системи використовують блоки (вузли), які можна з'єднувати для формування мережі, що описує рух **транзакцій** або **об'єктів** (тобто клієнтів) в моделі. Наприклад, найбільш відомими типами вузлів у будь-якій системі імітаційного моделювання є *джерело*, в якому транзакції створюються, *черга*, де при необхідності вони можуть очікувати обслуговування, та *сервіси*, де виконується обслуговування. Кожен з цих вузлів при його визначенні забезпечується всією необхідною інформацією, що дозволяє виконувати імітацію автоматично.

До систем, які орієнтовані на планування подій відносяться SIMSCRIPT, SLAM, SIMAN. Розвиток цих систем протягом багатьох років привело до того, що вони містять й можливості процедурно-орієнтованих систем.

Першою процедурно-орієнтованою системою була GPSS (General Purpose Simulation System). Однією з перших була система SIMNET.

На даний час можна виділити наступні системи імітаційного моделювання:

- Process Charter (США);

- Powersim (Норвегія);
- Ithink (США);
- ExtendtBPR (США);
- ReThink (США);
- пакет РДО (Росія);
- система СИМПАС (Росія);
- Pilgrim (Росія);
- Arena (США);
- Crystal Ball (США);
- AnyLogic (Росія).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються аналітичні та імітаційні моделі? Які їх основні переваги та недоліки?
2. В чому полягає основна ідея методу Монте-Карло?
3. Що називається одиничним жеребом?
4. Як розігруються види одиничного жеребу?
5. Які існують методи генерування випадкових чисел?
6. Опишіть логіку роботи імітаційної моделі у термінах СМО.
7. Які розподіли використовуються в методах генерування послідовних випадкових значень?
8. Які відмінності основних методів збору інформації?
9. Які існують на даний час системи імітаційного моделювання?

ВПРАВИ

Розв'яжіть вправи з використанням якої-небудь системи імітаційного моделювання або мов програмування високого рівня.

- 14.1. Клієнти випадково надходять на поштове відділення, в якому працює три службовці. Час між їх надходженнями є випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням п'ять хвилин. Час, який витрачає службовець на обслуговування клієнта, має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням десять хвилин. Всі клієнти формують єдину чергу та очікують першого службовця, який звільниться. Використайте імітаційну модель системи для дослідження її роботи протягом 480 хвилин, для того щоб визначити середню кількість клієнтів у черзі, середню зайнятість службовців.
- 14.2. Блоки живлення надходять для перевірки на конвеєр з сталою швидкістю п'ять одиниць за годину. Час перевірки блока є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена між 10 та 15 хвилинами. Попередній досвід показує, що 20% перевірених блоків повинні бути відрегульовані та відправлені на повторну перевірку. Час регулювання також є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена між 6 і 8 хвилинами. Використайте імітаційну модель системи для дослідження її роботи протягом 480 хвилин, для того щоб обчислити середній час, необхідний для перевірки одного блока та середню кількість повторних перевірок, які повинен пройти блок живлення перед виходом із системи.
- 14.3. На фінальній стадії зборки автомобіль рухається на конвеєрі між двома паралельними робочими місцями, для того щоб можна було виконувати роботу з обох боків одночасно. Час виконання робіт з кожного боку є рівномірно розподіленою випадковою величиною з інтервалом зміни від 15 до 20 хвилин та від 18 до 22 хвилин. Авто-

мобіль прибуває на робочі місця кожні 20 хвилин. Побудуйте імітаційну модель роботи складального конвеєра протягом 960 хвилин для визначення часу використання обох робочих місць.

14.4. Час між прибуттям клієнтів у маленьку перукарню з одним працівником є випадковою величиною, як розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням десять хвилин. Черга може містити максимум п'ять клієнтів. Якщо черга заповнена, то клієнт, який прибуває, покидає перукарню. Час обслуговування клієнта є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена на інтервалі від 10 до 15 хвилин. Побудуйте імітаційну модель роботи перукарні протягом 480 хвилин та знайдіть час перебування клієнта в перукарні.

РОЗДІЛ 15

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА MATHCAD ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

15.1. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ MATHCAD

В даний час для науково-технічних розрахунків на комп'ютерах все частіше використовуються не традиційні мови програмування і не електронні таблиці, а спеціальні математичні програми типу Mathematica, MatLab, Mapl, MathCad, Gauss, Eureka, Reduce, Derive, Theorist, Macsyma та ін.

Математичні пакети, в особливості MathCad, дозволяють спеціалістам у конкретній науковій галузі дуже швидко засвоїти роботу на комп'ютері й реалізувати на них математичні моделі, і при тому не удаватися у тонкощі програмування на традиційних мовах (Fortran, Pascal, C, Basic та ін.). Надзвичайна простота інтерфейсу MathCad зробила його одним з популярних і безумовно самим поширеним у студентському середовищі математичним пакетом.

З дидактичної точки зору, на нашу думку, MathCad є найбільш оптимальним для засвоєння студентами. Це пов'язано з тим, що, з одного боку, MathCad – це потужне і у той же час просте універсальне середовище для розв'язування задач у різних галузях науки і техніки, фінансів і економіки, фізики і астрономії, будівництві й архітектурі, математики і статистики, організації виробництва і управління... З другого боку, виконуючи рутинні або несуттєві (у контексті матеріалу, що вивчається) операції, пакет дозволяє студенту, який не володіє у повній мірі технікою математичних перетворень, самостійно виконувати громіздкі обчислення, розв'язувати змістовні задачі, набути стійких навиків розв'язування прикладних задач. При цьому студент спілкується з

комп'ютером на рівні математичних понять, ідей, загальних підходів і за незначний час може розглянути самостійно багато прикладів. Ці властивості спілкування з обчислювальним середовищем особливо важливі для розвитку творчого, критичного і незалежного мислення, оскільки студент може всебічно досліджувати нові об'єкти, виділяти загальні закономірності та сформулювати узагальнюючі твердження на основі власних спостережень.

Крім того, пакет MathCad можна використовувати як засіб модернізації курсів, як середовище для спілкування студента з викладачем, як засіб контролю і самоконтролю, як інструмент допомоги студенту при самостійній роботі. При створенні навчальних курсів MathCad допомагає викладачам підготувати змістовні динамічні ілюстрації, перенести акценти на концептуальні аспекти проблем, що вивчаються, збагатити курс прикладами, які виникають у різних галузях науки і практики, і які незвичайно не розглядаються в навчальних курсах внаслідок їх складності. Лекційні демонстрації можна підготувати таким чином, що кожен студент отримає стільки прикладів, скільки йому необхідно для зрозуміння суті питання. Для одного й того ж розділу можна підготувати самі різні за об'ємом, формою і глибиною навчальні курси.

Наведемо конкретні переваги роботи у середовищі MathCad:

- система MathCad більш доступна для масового користувача: вона у декілька разів дешевше своїх аналогів (мова йде про ліцензійні продукти);
- MathCad – це універсальна, а не спеціалізована математична система; так, для розв'язання складних задач у аналітичному вигляді краще застосовувати Maple, а для розв'язання складних задач лінійної алгебри – MatLab і т. д.;
- математичні вирази у середовищі MathCad записуються у їх загальноприйнятій нотації: чисельник дроби знаходиться наверху, а знаменник – нанизу; у визначеному інтегралі межі інтегрування роз-

міщенні на своїх звичних місцях. Здавалось би, що це все дрібниці, які ніяк не впливають на обчислювальний процес. Але... Програма повинна бути зрозумілою не тільки комп'ютеру, але й людині. Користувач, читаючи роздруківку принтера або дивлячись на дисплей, бачить, що дана величина записана у чисельнику та її збільшення приводить до зростання всього виразу. А це дуже важливо при аналізі математичних моделей, форма і зміст яких єдині;

- у середовищі MathCad процес створення „програми” йде паралельно з її налагодженням. Користувач, після введення нового виразу у MathCad-документ, може не тільки відразу підрахувати, чому він дорівнює при певних значеннях змінних, але й побудувати графік або поверхню, побіжний погляд на які може безпомилково вказати, де таїться помилка, якщо вона була допущена при введенні формул або при створенні самої математичної моделі;
- у пакет MathCad інтегрований достатньо потужний математичний апарат, який дозволяє розв'язувати проблеми без виклику зовнішніх процедур;
- пакет MathCad має довідник по основним математичним і фізико-хімічним формулам і константам, які можна автоматично переносити у документ без побоювання внести в них спотворення, які, на жаль, не рідкість при ручній роботі;
- до пакету MathCad можна придбати ті чи інші електронні підручники з різних дисциплін (наприклад, статистики, теорії управління);
- розв'язуючи задачу, користувач може вводити не тільки числові значення змінних, але й доповнювати їх розмірностями. При цьому користувач може обрати і систему одиниць;
- система MathCad обладнана засобами анімації, що дозволяє реалізовувати створені моделі не тільки у статиці (числа, таблиці, графіки), але й у динаміці (анімаційні кліпи);

- в систему MathCad інтегровані засоби символічної математики, що дозволяє розв'язувати задачі не тільки чисельно, але й аналітично;
- не виходячи із середовища MathCad, можна відкривати нові документи на інших серверах і користуватись тими перевагами інформаційних технологій, які надає Internet.

Система MathCad існує у трьох основних варіантах:

1. MathCad Standart – стандартна версія; ідеальна система для повсякденних розрахунків. Розрахована для масової аудиторії та широкого використання в навчальному процесі.
2. MathCad Professional – версія для професіоналів; промисловий стандарт прикладного використання математики у технічних додатках. Орієнтована на математиків і наукових співробітників, які виконують складні і трудомісткі розрахунки. Це найбільш повна і потужна версія.
3. MathCad Professional Academic – професіональне академічне видання; пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними посібниками і ресурсами, але за спеціальною ціною для освітніх цілей.

15.2. ПОЧАТОК РОБОТИ У СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Після завантаження програми з'являється вікно MathCad, верхній рядок якого – стандартний рядок windows-додатку.

Все, що розміщено нижче, відноситься до роботи у середовищі пакета.

Другий рядок екрану – рядок меню.

Меню має набір стандартних пунктів для windows-додатків: File (Файл), Edit (Редактировать), View (Вид), Format (Формат), Windows (Окно), Help (Помощь) і специфічні для MathCad пункти: Insert (Вставка), Math (Математика), Symbolics (Символы). У дужках вказані назви пунктів меню у російській редакції MathCad.

Наступні три рядка вікна містять панелі інструментів, частина з яких – стандартні для windows-додатків операції роботи з файлами і текстом, а інша – специфічні функції MathCad, наприклад, кнопка з надписом $f(x)$ відкриває список вмонтованих функцій.

В окремому рядку звичайно розташовують панель інструментів для виконання математичних операцій, яку ще називають панеллю математичних інструментів або панеллю математичних операцій.

Математичні операції в MathCad розділені на групи і кожна кнопка панелі математичних інструментів відкриває доступ до певної групи операцій – клацання по кнопці цієї панелі відкриває іншу, додаткову, панель, на якій власно і розміщені кнопки математичних операцій відповідної групи.

Під рядками панелей інструментів знаходиться вікно робочого документа MathCad – простір, в якому розташовуються всі введені команди і вирази, куди MathCad виводить результати обчислень, графіки і, де розміщуються текстові коментарі. Зміст цього вікна можна редагувати, форматувати, зберігати у файлах на диску, друкувати та ін.

Останній, нижній рядок вікна – рядок стану. У ньому наведені рекомендації до подальших дій, поточний стан середовища і номер сторінки, яка відображена на екрані робочого документа.

Читач, який має навички роботи з windows-додатками відразу зрозуміє специфіку інтерфейсу MathCad.

Для початку роботи у середовищі клацніть у будь-якому місці в робочому документі – у полі з'явиться хрестик, який відмічає позицію, з якої починається введення.

Наведемо простіші принципи організації інтерфейсу і роботи MathCad:

- формули відображаються на екрані у загальноприйнятій математичній нотації;
- правильно визначається порядок дій;

- після введення знаку рівності справа від нього відображається результат обчислень;
- після введення знаку ділення MathCad вказує чорною міткою позицію для введення знаменника;
- при введенні виразу у робочому документі виділяється обмежене прямокутником поле введення;
- введений вираз можна змінити (відредагувати) і отримати обчислене значення нового виразу, якщо клацнути мишею зовні виділеної рамки;
- можна вилучити будь-який фрагмент робочого документу.

Важливо пам'ятати, що MathCad читає і виконує введені операції зліва направо і зверху донизу, тому слідкуйте, щоб вираз для обчислень розташовувався правіше або нижче визначених для нього значень змінних.

Більшість обчислень в MathCad можна виконувати трьома способами:

- вибором операції в меню;
- за допомогою кнопок панелей інструментів;
- звертанням до відповідних функцій.

Майже всі операції, що закріплені за пунктами меню, дублюються відповідними кнопками панелі інструментів. Для звертання до вмонтованої функції можна вставити функцію в робочий документ, якщо вибрати потрібне ім'я зі списку функцій, можна ввести ім'я функції з клавіатури або, для найчастіше використовуваних функцій, вставити ім'я функції клацанням по кнопці на панелі інструментів.

Для більш детального ознайомлення з основами роботи у середовищі MathCad можна звернутись до спеціалізованих посібників, наприклад [14, 16, 19, 20].

15.3. ОСНОВИ РОБОТИ В MATHCAD

У вікні робочого документа MathCad червоним хрестиком позначене місце, де створюватимемо блоки. Розрізняють три типи блоків:

- текстовий блок, куди можна вводити будь-який текст і куди традиційно вводять умову задачі чи коментар;
- математичний блок, куди вводять математичні вирази і де генеруються результати;
- блок, що містить графік.

Програма автоматично розпізнає типи блоків. У математичний блок вводять числові, алгебраїчні чи інші математичні вирази, змінні та команди. Блоки спочатку є невірвняними, їх вирівнюють за допомогою команд у вертикальному чи горизонтальному напрямках. Обчислення виконуються в математичних блоках у вікні робочого документа зліва направо і зверху-вниз. Блоки можна переміщувати.

Правила, які потрібно запам'ятати.

1. Щоб надати значення змінній, слід натиснути на клавішу із символом двокрапки (:). На екрані ця дія позначається символом присвоєння (:=).

2. Щоб отримати результат обчислень числового чи іншого виразу, слід натиснути на клавішу (=).

3. Щоб ввести символ = в розумінні "дорівнює", наприклад, в рівнянні, треба натиснути (**Ctrl**+**=**). На екрані ця дія позначається символом напівжирне дорівнює (**=**).

4. Щоб виконати символічне перетворення (визначити похідну, первісну, розкласти вираз на множники чи в ряд тощо), треба натиснути (**Ctrl**+**крапка лат.**). На екрані дія символічних обчислень позначається стрілкою (**→**).

5. Дробова частини десяткового числа в MathCad відділяється крапкою (наприклад, 123.45).

6. За умовчанням початкові індекси векторів і матриць в MathCad дорівнюють нулю. Для того щоб встановити значення початкового індексу одиниця (як прийнято в задачах математичного програмування), треба відкрити пункт **Математика (Math)** головного меню, а потім пункт падаючого меню **Параметры (Options)**. Вікно діалогу має вкладку **Переменные (Built-in Variables)**, в якій у рядку **Начальный индекс массивов (ORIGIN)** необхідно встановити значення **1**.

7. В іменах середовища MathCad не застосовуються нижні та верхні індекси.

8. Для того, щоб задати точність обчислень необхідно відкрити пункт головного меню **Формат (Format)**, а потім клацнути по пункту **Результат... (Result...)** і у вікні діалогу на вкладці **Формат чисел (Number Format)** встановити кількість знаків після крапки у рядку **Число знаков (Number of decimal places)**.

9. Якщо математичний вираз довгий, можна застосувати додавання з переносом на наступний рядок за допомогою комбінації клавіш **(Ctrl+Enter)**.

В MathCad розрізняють прості змінні ($x:=8$) і змінні-діапазони, наприклад, $x1:=1, 1.2..2$. Тут змінна x отримує значення 8, а змінна $x1$ – значення 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0. Якщо крок зміни параметра діапазону 1, то пишуть коротко: $x2:=1..10$. Запам'ятайте правило створення діапазону: для операції $:=$ набирайте на клавіатурі двокрапку (:), а для $..$ – набирайте крапку з комою (;). Ім'я змінної має починатися з літери.

Вирази складаються з чисел, змінних і функцій, з'єднаних символами операцій: $^$ – піднесення до степеня, $*$, $/$, $+$, $-$ тощо.

Якщо над виразом потрібно виконати декілька дій, варто створити функцію користувача, наприклад, $z(x):=x^3+2x^2-4$.

Програма намагається самостійно розпізнати, де поставити символ множення. Зазвичай це крапка, але може бути й інший символ. Вирази x^3 , x^2 на екрані зображаються природно x^3 , x^2 . Порядок виконання

арифметичних операцій у виразі традиційний, його можна змінити за допомогою круглих дужок.

Є ще один тип присвоєння – тотожність (\equiv). Таке присвоєння надає значення змінній чи оголошує функцію глобально, тобто для всього вікна робочого документа, не залежно від того, де розміщений відповідний математичний блок.

Матриці утворюють за допомогою панелі інструментів.

Є універсальний спосіб розв'язування рівнянь чи нерівностей за допомогою блоку команди **Given...Find**. Спочатку записують службове слово **Given**, далі блоки рівнянь чи нерівностей, а потім функцію **Find** із зазначенням, що саме треба знайти, наприклад:

$$x1 := 0 \qquad x2 := 0$$

Given

$$x1^2 + x2^2 = 25 \qquad x1 + x2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \text{Find}(x1, x2) \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що в системі рівнянь символи $=$ є символами відношення, їх слід вводити комбінацією клавіш $\text{Ctrl}+=$. В останньому виразі символ $=$ є звичайною командою обчислення.

15.4. Розв'язання задач лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування.

Розглянемо приклад 3.4 з розділу 3.

Введемо цільову функцію:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \quad .$$

Зауваження. За умовчанням початкові індекси векторів і матриць в MathCad дорівнюють нулю. Для того щоб встановити значення початкового індексу одиниця (як прийнято в задачах математичного програмування), треба відкрити пункт Математика (Math) головного меню, а потім пункт падаючого меню Параметри (Options). Вікно діалогу має вкладку Переменные (Built-in Variables), в якій у рядку Начальный индекс массивов (ORIGIN) необхідно встановити значення 1.

Введемо початкове значення компонентів вектору \vec{x} (можна ввести лише значення для останньої компоненти):

$$x_4 := 0$$

Для розв'язання задачі у середовищі MathCad введемо ключове слово Given і систему обмежень:

Given

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 14$$

$$x \geq 0$$

Введемо ім'я шуканого вектора оптимального розв'язку, наприклад x_{\min} , знак надавання та ім'я вмонтованої функції, яка забезпечує мінімізацію цільової функції – minimize:

$$x_{\min} := \text{Minimize}(z, x)$$

Зауваження. У іменах середовища MathCad не застосовуються нижні та верхні індекси.

Далі визначається шуканий розв'язок і значення цільової функції:

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} 2.769231 \\ 0 \\ 0 \\ 1.076923 \end{pmatrix} \quad z(x_{\min}) = -2$$

Отже, у середовищі MathCad задача має вигляд:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4$$

$$x_4 := 0$$

Given

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 14$$

$$x \geq 0$$

$$x_{\min} := \text{Minimize}(z, x)$$

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} 2.769231 \\ 0 \\ 0 \\ 1.076923 \end{pmatrix} \quad z(x_{\min}) = -2$$

Зауваження. Для того, щоб задати точність обчислень необхідно відкрити пункт головного меню Формат (Format), а потім клацнути по пункту Результат... (Result...) і у вікні діалогу на вкладці Формат чисел (Number Format) встановити кількість знаків після крапки у рядку Число знаків (Number of decimal places).

Якщо система обмежень задачі лінійного програмування приведе-на до першої або другої стандартної форм, то у середовищі MathCad можна застосувати розв'язування у матричній формі. Алгоритм такого розв'язування покажемо на прикладі 3.5 розділу 3.

Після введення цільової функції

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4,$$

запишемо матрицю коефіцієнтів системи рівностей. Для цього задамо ім'я матриці, наприклад М, та знак надавання і у вікні діалогу Матриця (Matrix), яке можна вивести за допомогою панелі математичних інструментів або пункту головного меню Вставка (Insert), натиснемо відповідний пункт. З'явиться вікно діалогу Вставка Матриця (Insert Matrix), у

якому введемо необхідну кількість рядків та стовпців. Вікно діалогу Вставка Матриці (Insert Matrix) можна вивести за допомогою комбінації клавіш Ctrl+M. Після цього встановимо покажчик миші у мітку шаблону матриці і введемо відповідні коефіцієнти системи рівностей:

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Введемо вектор вільних членів системи обмежень як матрицю, в якій кількість стовпців дорівнює одиниці:

$$b := \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Введемо початкове значення останньої компоненти вектору розв'язків:

$$x_4 := 0$$

Введемо ключове слово Given, систему обмежень у матричній формі й умову невід'ємності розв'язків:

$$\text{Given} \quad M \cdot x = b \quad x \geq 0$$

Зауваження. Знак рівності у системі обмежень є знаком булевих операцій (жирний знак рівності). Його можна ввести за допомогою комбінації клавіш Ctrl+= або у вікні діалогу Булевы опера... (Boolean).

Далі вводиться вмонтована функція максимізації і виводиться оптимальний розв'язок. Отже, вигляд розв'язування задачі у середовищі MathCad наступний:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$x_4 := 0$$

$$\text{Given} \quad M \cdot x = b \quad x \geq 0$$

$$x_{\max} := \text{Maximize}(z, x)$$

$$x_{\max} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z(x_{\max}) = 14$$

Розв'язування розподільчих задач.

Розв'яжемо у середовищі MathCad транспортну задачу з прикладу 5.2 розділу 5.

Задамо критерій оптимізації – цільову функцію:

$$\begin{aligned} z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) := & 6 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} \dots \\ & + 15 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{14} \dots \\ & + 9 \cdot x_{21} + 15 \cdot x_{22} \dots \\ & + 2 \cdot x_{23} + 3 \cdot x_{24} \dots \\ & + 6 \cdot x_{31} + 12 \cdot x_{32} \dots \\ & + 7 \cdot x_{33} + 10 \cdot x_{34} \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо математичний вираз довгий, можна застосувати додавання з переносом на наступний рядок за допомогою комбінації клавіш Ctrl+Enter.

Для розв'язання задачі використаємо блок функцій Given...Minimize. Далі поданий розв'язок задачі у середовищі MathCad.

$$z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) := 6 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} \dots$$

$$+ 15 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{14} \dots$$

$$+ 9 \cdot x_{21} + 15 \cdot x_{22} \dots$$

$$+ 2 \cdot x_{23} + 3 \cdot x_{24} \dots$$

$$+ 6 \cdot x_{31} + 12 \cdot x_{32} \dots$$

$$+ 7 \cdot x_{33} + 10 \cdot x_{34}$$

$$x_{11} := 0 \quad x_{12} := 0 \quad x_{13} := 0 \quad x_{14} := 0 \quad x_{21} := 0 \quad x_{22} := 0 \quad x_{23} := 0$$

$$x_{24} := 0 \quad x_{31} := 0 \quad x_{32} := 0 \quad x_{33} := 0 \quad x_{34} := 0$$

Given

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \quad x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 130 \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80 \quad x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90 \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \quad x_{31} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110$$

$$x_{13} \geq 0 \quad x_{14} \geq 0 \quad x_{23} \geq 0 \quad x_{24} \geq 0 \quad x_{33} \geq 0 \quad x_{34} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix} := \text{Minimize}(z, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = 1.55 \times 10^3$$

Зауваження. Ми вже знаємо, що ця задача має альтернативні розв'язки. Як у середовищі MathCad отримати хоча б один альтернатив-

ний розв'язок, для того щоб потім можна було записати загальний розв'язок задачі?

Після розв'язання будь-якої задачі транспортного типу перевіряють її на наявність альтернативного розв'язку. Це можна зробити наступним чином. Треба вибрати який-небудь рядок чи стовпець у матриці розв'язку, (якщо розмірності рядків і стовпців різні, то обирають з більшою). Наприклад, в нашій задачі оберемо перший рядок.

В системі обмежень послідовно будемо змінювати обмеження за знаком на умову, що виключає значення, яке присутнє у розв'язку. Отже для першого елемента обраного рядка замінюємо $x_{11} \geq 0$ на $x_{11} \neq 0$ та отримуємо новий розв'язок (зауваження: при такій заміні MathCad може дати повідомлення про помилку, але результат обчислень буде виведений):

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 80 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 90 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Цей розв'язок не є допустимим, так як є від'ємні елементи.

Переходимо до наступного елемента (попередню зміну необхідно повернути назад), тобто замінюємо $x_{12} \geq 0$ на $x_{12} \neq 20$ та отримуємо альтернативний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

Маючи два альтернативні розв'язки можна побудувати загальний розв'язок так, як показано у розділі 5 (приклад 5.2).

В у середовищі MathCad транспортну задачу можна розв'язати й більш елегантним способом. Ми наводимо його на прикладі задачі 5.1.

ORIGIN := 1

$$c := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} \quad b := (200 \quad 200 \quad 300 \quad 400)^T$$

$$A := \sum a \quad B := \sum b \quad A = 1 \times 10^3 \quad B = 1.1 \times 10^3$$

$$a := \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n := \text{rows}(c) \quad m := \text{cols}(c) \quad n = 4 \quad m = 4$$

$$x_{n,m} := 0 \quad z(x) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_{i,j} \cdot x_{i,j})$$

$$i := 1..n \quad j := 1..m$$

$$t_i := 1 \quad k_j := 1$$

Given

$$x \cdot k = a \quad x^T \cdot t = b \quad x \geq 0$$

$$x_{\min} := \text{Minimize}(z, x)$$

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 21.91 & 178.09 & 100 \\ 200 & 178.09 & 121.91 & 7.105 \times 10^{-15} \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$z(x_{\min}) = 5.3 \times 10^3$$

15.5. Розв'язання задач нелінійного програмування

При розв'язанні задач нелінійного програмування традиційний симплекс-метод часто виявляється безсилим. Отже, розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою вмонтованих функцій **Maximize**, **Minimize** може привести до трьох результатів:

Розв'язок знайдено.

Розв'язок не знайдено.

MathCad намагається підсунути користувачу результат, який тільки здалеку нагадує оптимальний розв'язок.

Наведемо деякі поради по роботі з функціями **Maximize**, **Minimize**:

1. Після того, як знайдений розв'язок, примусить MathCad знайти його ще раз, але вже з іншими початковими значеннями змінних.
2. Перед розв'язуванням задачі оптимізації з обмеженнями спочатку оцініть область допустимих розв'язків. З цією метою за допомогою функції **Find** знайдіть якщо не всі, то хоч деякі вершини многогранника розв'язків.
3. Починайте пошук оптимального розв'язку з початковими значеннями змінних, що відповідають однієї з точок, які знайдені у пункті 2.
4. Вводьте обмеження поступово: ввели перше – знайшли якийсь розв'язок, ввели друге – уточнили його і т. д.
5. Розв'язування задач цілочислового програмування починайте без обмежень на цілочислове значення змінних.

Розв'яжемо засобами середовища MathCad задачу опуклого програмування з прикладу 7.8 розділу 7.

$$f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$$

Given

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 5 \quad x_1 + x_3 \leq 2 \quad x_1 \geq 1 \quad x_2 \geq 2 \quad x_3 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 5$$

MathCad відразу дало оптимальний розв'язок (ми вже знали правильну відповідь), а, взагалі, завжди необхідно знайти принаймні ще один розв'язок з іншими початковими значеннями змінних. Покажемо, як це робиться на прикладі 7.2.

Якщо початкові значення змінних

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

то середовище MathCad дає наступний розв'язок:

$$z(x_1, x_2) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 12 \quad x_1 + x_2 \leq 9 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(z, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z(x_1, x_2) = 13$$

Змінимо початкові значення змінних, але перед цим, за допомогою вмонтованої функції Find, знайдемо одну з вершин многокутника допустимих розв'язків:

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 12 \quad x_1 + x_2 = 9$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Для знаходження нового розв'язку задачі в якості початкових значень змінних візьмемо отримані координати вершини многокутника розв'язків:

$$z(x_1, x_2) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$x_1 := 6 \quad x_2 := 3$$

Given

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 12 \quad x_1 + x_2 \leq 9 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(z, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z(x_1, x_2) = 58$$

Ми отримали новий розв'язок, який краще за попередній (ми вже знаємо, що він і є оптимальним).

Отже, при розв'язуванні задач нелінійного програмування завжди користуйтеся порадами даного параграфу.

15.6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Класична задача економічного розміру замовлення.

Розглянемо приклад 10.1 з розділу 10.

Для побудови математичної моделі в системі MathCad сформуємо початковий вираз критерію оптимізації з використанням напівжирного дорівнює (комбінація клавіш **Ctrl+=**).

Далі визначимо складові критерію оптимізації. Для введення першого виразу вибираємо пункт меню **View** (Вид) головного меню MathCad. В меню, що з'явилося, клацаємо на пункт **Toolbars** (Панели інструментов). Вибираємо в наступному меню пункт **Symbolic** (Символи). В панелі інструментів, яка з'явилась, клацаємо на кнопку з назвою **Substitute** (Підставить). З'явиться шаблон з мітками, замість яких введемо перший вираз (знак дорівнює слід вводити комбінацією клавіш **Ctrl+=**) і т.д. до тих пір, доки не розмістимо всі необхідні вирази. Після

цього натискаємо клавішу **Enter** та отримуємо розгорнутий вираз критерію оптимізації – шукану математичну модель.

$$c(q) = \frac{c1 + c2 + c3}{t0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute } c1 = b \\ \text{substitute } c2 = s \cdot v \cdot t0 \\ \text{substitute } c3 = h \cdot t0 \cdot \frac{q}{2} \\ \text{substitute } t0 = \frac{q}{v} \end{array} \right. \rightarrow c(q) = \frac{b + s \cdot q + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{q^2}{v}}{q} \cdot v$$

Продиференціюємо отриманий вираз відносно шуканої змінної q (розміру замовлення). Операція диференціювання вводиться за допомогою панелі інструментів **Math** (Математика), панелі **Calculus** (Матаналіз) та кнопки **d/dx**.

$$\frac{d}{dq} \frac{b + s \cdot q + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{q^2}{v}}{q} \cdot v \rightarrow \frac{s + h \cdot \frac{q}{v}}{q} \cdot v - \frac{b + s \cdot q + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{q^2}{v}}{q^2} \cdot v$$

Виразимо змінну q при умові, що отриманий після диференціювання вираз дорівнює нулю. Для цього записуємо рівняння, вводимо ключове слово **solve** (за допомогою панелі інструментів **Symbolic** та кнопки "мітка та стрілка вправо") та кому. З'явиться нова мітка, замість якої слід ввести ім'я шуканої змінної та натиснути клавішу **Enter**. Якщо всі дії були виконані вірно, то з'явиться розв'язок рівняння. Квадратне рівняння має два розв'язки, з яких обираємо один – додатний.

$$\frac{s + h \cdot \frac{q}{v}}{q} \cdot v - \frac{b + s \cdot q + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{q^2}{v}}{q^2} \cdot v = 0 \text{ solve, } q \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{h} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (h \cdot b \cdot v)^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{h} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (h \cdot b \cdot v)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

Далі вводимо вихідні параметри задачі та отримуємо числовий розв'язок.

$$v := 100 \quad b := 100 \quad h := 0.02$$

$$q_{opt} := \frac{1}{h} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (h \cdot b \cdot v)^{\frac{1}{2}}$$

$$q_{opt} = 1 \times 10^3 \blacksquare$$

Задача економічного розміщення замовлення з розривами цін.

Розв'яжемо у середовищі MathCad задачу з прикладу 10.2 .

$$v := 150 \cdot 1.25 \quad h := 0.02 \quad b := 20 \quad L := 2 \quad S1 := 3 \quad S2 := 2.5 \quad y := 1000$$

$$q_m := \sqrt{\frac{2 \cdot b \cdot v}{h}} \quad q_m = 612.372$$

$$c1(q) := S1 \cdot v + \frac{b \cdot v}{q} + \frac{h \cdot q}{2}$$

$$c2(q) := S2 \cdot v + \frac{b \cdot v}{q} + \frac{h \cdot q}{2}$$

Given

$$c2(q) - c1(q_m) = 0$$

$$\text{Find}(q) \rightarrow (35.497084844748524670 \quad 10564.247786546840525)$$

$$Y := 10564.247786546840525$$

$$q_{opt} := \begin{cases} y & \text{if } q_m < y < Y \\ q_m & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$q_{opt} = 1 \times 10^3$$

Для розв'язання задачі використаний блок функцій **Given...Find** (для знаходження мінімуму функцій витрат) та оператори програмування в системі MathCad **Add Line** (Добавить строку) і оператор умовного переходу **if** з оператором додаткової вітки **otherwise** (для визначення положення точки розриву цін відносно мінімуму функцій витрат).

Для створення програми (функції) були виконані наступні дії:

- ввели ім'я програми `fort` та оператор присвоювання;
- клацнули на кнопку **Add Line** на панелі інструментів **Programming** для того, щоб отримати дві мітки для введення в них операторів і шаблонів операторів програмування;
- клацнули на верхню мітку, а потім на кнопку **if** панелі **Programming**. Заповнили шаблон оператора **if**, який з'явився;
- клацнули на нижню мітку, а потім на кнопку **otherwise** панелі **Programming** (при цьому з'явився шаблон оператора **otherwise**);
- ввели в мітку шаблону оператора **otherwise** значення, яке повинне повертатись, якщо умова не виконується.

Модель виробничих постачань.

Задачі моделі виробничих постачань в системі MathCad розв'язуються аналогічно класичній задачі.

$$c(q) = c_1 + c_2 + c_3 \begin{cases} \text{substitute } c_1 = \frac{b \cdot v}{q} \\ \text{substitute } c_2 = S \cdot v \\ \text{substitute } c_3 = \frac{(p - v) \cdot h \cdot q}{2 \cdot p} \end{cases} \rightarrow c(q) = b \cdot \frac{v}{q} + S \cdot v + \frac{1}{2} \cdot (p - v) \cdot h \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{d}{dq} \left[b \cdot \frac{v}{q} + S \cdot v + \frac{1}{2} \cdot (p - v) \cdot h \cdot \frac{q}{p} \right] \rightarrow -b \cdot \frac{v}{q^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot \frac{h}{p}$$

$$-b \cdot \frac{v}{q^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot \frac{h}{p} = 0 \text{ solve, } q \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

$$\frac{-1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \text{ collect, } h \rightarrow \frac{-1}{-p + v} \cdot \frac{[(2 \cdot p - 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$v := 2000 \quad b := 20 \quad h := 0.1 \quad p := 4000$$

$$q_{opt} := \sqrt{\frac{2 \cdot p \cdot b \cdot v}{(p - v) \cdot h}} \quad q_{opt} = 1.265 \times 10^3$$

15.7. ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

В розділі 11 були розглянуті деякі прості системи масового обслуговування (СМО) та запропоновані формули для визначення граничних ймовірностей станів системи. Ці формули можуть бути використані для визначення параметрів СМО, зокрема і в системі MathCad. Але всі розглянуті СМО були відкритого типу. Тому у даному розділі розглянемо *замкнуту* систему з n каналами і m джерелами замовлень (вимог).

Наприклад, два робітника ($n=2$) обслуговують 15 станків в цеху ($m=15$), кожен з яких час від часу потребує налагодження. Інтенсивність потоку вимог кожного працюючого станка дорівнює λ . Якщо станок ви-

йшов з ладу в момент, коли хоч один робітник вільний, він відразу обслуговується. Якщо він вийшов з ладу в момент, коли всі робітники зайняті, він стає у чергу та очікує, доки не звільниться якийсь робітник. Середній час налагодження станка одним робітником $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$. З інтенсивністю μ система може перейти з стану p_1 , коли на обслуговуванні один станок, у стан p_0 , коли всі канали вільні. З інтенсивністю 2μ система може перейти з стану p_2 в стан p_1 , з стану p_n в стан p_{n-1} з інтенсивністю $n\mu$. Іntenсивність переходу з станів $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_m$ (коли всі канали обслуговування зайняті) у попередні стани, також дорівнює $n\mu$. Іntenсивність потоку замовлень залежить від того скільки станків працює. Якщо на обслуговуванні знаходиться k станків, вона дорівнює $(m - k)\lambda$.

Розглянемо стаціонарний режим роботи замкнутої СМО, коли основні імовірнісні характеристики сталі у часі. У цьому випадку інтенсивності вхідних і вихідних потоків для кожного стану будуть збалансовані.

Для випадку, коли кількість вимог k , що надійшли до системи, менше кількості каналів обслуговування n ($0 \leq k < n$) рівняння балансу мають вигляд:

$$p_k(k\mu + (m - k)\lambda) = p_{k-1}(m - (k - 1))\lambda + p_{k+1}(k + 1)\mu.$$

Для випадку, коли кількість вимог k , які надійшли до системи, більше або дорівнює кількості каналів обслуговування n ($n \leq k \leq m$) рівняння балансу:

$$p_k(n\mu + (m - k)\lambda) = p_{k-1}(m - (k - 1))\lambda + p_{k+1}n\mu,$$

$$p_{m-1}\lambda = p_m n\mu.$$

Припустимо, що наша система має два канали обслуговування $n = 2$. Іntenсивність надходження однієї вимоги на обслуговування $\lambda = 6$ раз за годину. Іntenсивність обслуговування $\mu = 30$. Кількість джерел вимог $m = 5$. Необхідно визначити граничні імовірності станів системи (стан системи визначається кількістю вимог на обслуговуванні).

Розв'язання задачі в системі MathCad подане нижче.

$$\mu := 30 \quad \lambda := 6 \quad m := 5 \quad n := 2$$

$$D(p) := \begin{cases} D_0 \leftarrow \mu \cdot p_1 - m \cdot \lambda \cdot p_0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 & \text{if } n > 1 \\ D_i \leftarrow (m-i+1) \cdot \lambda \cdot p_{i-1} + (i+1) \cdot \mu \cdot p_{i+1} - [(m-i) \cdot \lambda + i \cdot \mu] \cdot p_i \\ \text{for } j \in n..m-1 \\ D_j \leftarrow (m-j+1) \cdot \lambda \cdot p_{j-1} + n \cdot \mu \cdot p_{j+1} - [(m-j) \cdot \lambda + n \cdot \mu] \cdot p_j \\ D \end{cases}$$

$$D(p) \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \cdot p_1 - 30 \cdot p_0 \\ 30 \cdot p_0 + 60 \cdot p_2 - 54 \cdot p_1 \\ 24 \cdot p_1 + 60 \cdot p_3 - 78 \cdot p_2 \\ 18 \cdot p_2 + 60 \cdot p_4 - 72 \cdot p_3 \\ 12 \cdot p_3 + 60 \cdot p_5 - 66 \cdot p_4 \end{pmatrix}$$

$$p_0 := 1 \quad i := 1..m \quad p_i := 0$$

Given

$$D(p) = 0 \quad \sum_{i=0}^m p_i = 1.0$$

P := Find(p)

$$P^T = \left(0.393 \quad 0.393 \quad 0.157 \quad 0.047 \quad 9.425 \times 10^{-3} \quad 9.425 \times 10^{-4} \right)$$

На початку були введені вихідні дані, потім записаний вектор лівих частин системи рівнянь балансів (праві частини дорівнюють нулю). Так як система рівнянь балансу вироджена, то останнє рівняння з неї вилучене. Замість нього у блоці розв'язання Given ... Find використане рівняння нормування ймовірностей (сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці). Перед блоком розв'язання введені початкові наближення. Отри-

мані ймовірності можуть бути використані для знаходження характеристик даної СМО.

15.8. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В СИСТЕМІ MATHCAD

Як було зазначено в розділі 6, основна ідея методу Монте-Карло полягає у створенні певної послідовності випадкових чисел, які моделюють той чи інший ефект. Для генерації M -компонентного вектора випадкових чисел в системі MathCad є декілька вбудованих функцій, які реалізують різні типи статистичних розподілів. Найчастіше в нескладних програмах застосовується функція $\text{rnd}(x)$, яка приводить до генерації одного псевдовипадкового числа, що має рівномірну густину розподілу на інтервалі $(0, x)$.

Нижче наведене розв'язання прикладу 14.1 розділу 14 в системі MathCad.

$$S(n) := \left| \begin{array}{l} m \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow -10 + 20 \text{ rnd } (1) \\ y \leftarrow -5 + 10 \text{ rnd } (1) \\ m \leftarrow m + 1 \quad \text{if } \left(\frac{x^2}{100} \right) + \left(\frac{y^2}{25} \right) \leq 1 \end{array} \right. \\ 200 \cdot \frac{m}{n} \end{array} \right.$$

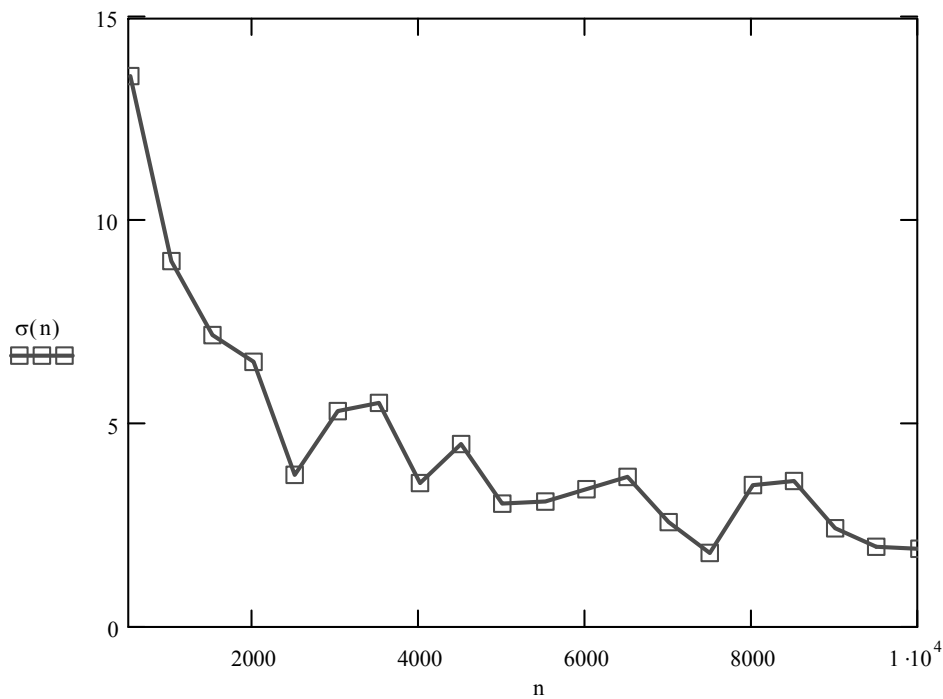
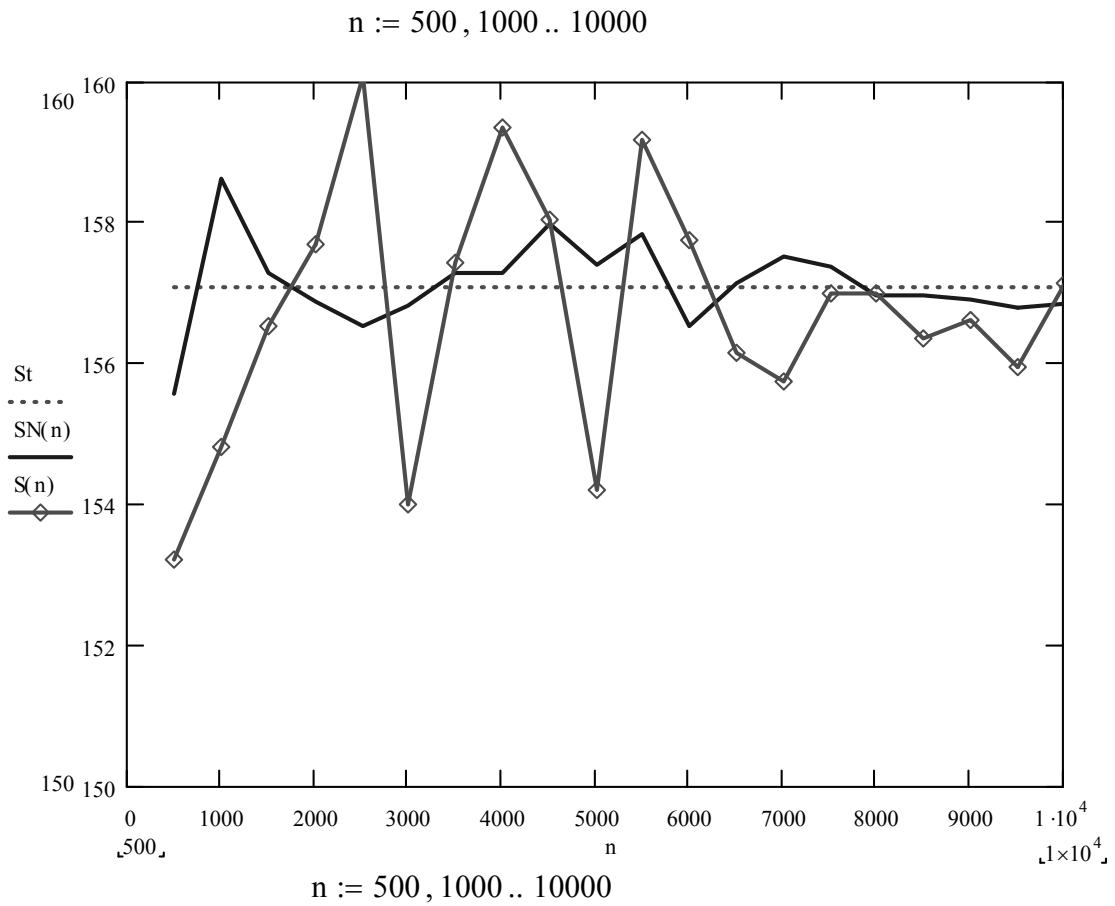
$$St := \pi \cdot 50$$

$$St = 157.08$$

$$SN(n) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. 10 \\ \quad k \leftarrow k + S(n) \\ \frac{k}{10} \end{array} \right.$$

$$\sigma(n) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. 10 \\ \quad p \leftarrow p + (S(n) - St)^2 \\ \sqrt{\frac{p}{9}} \end{array} \right.$$

$$SN(10000) = 157.01$$



$$\sigma(10000) = 0.528$$

$$\Delta := \frac{\sigma(10000) \cdot dt(0.025, 9)}{3}$$

$$\Delta = 0.084$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які вмонтовані функції середовища MathCad використовуються для відшукування розв'язків задач лінійного програмування?
2. Що необхідно задати перед застосуванням блоків розв'язання задач оптимізації у середовищі MathCad?
3. Яке ключове слово треба ввести при наявності обмежень?
4. Які особливості розв'язування задач нелінійного програмування за допомогою середовища MathCad?

ВПРАВИ

При розв'язуванні задач попередніх розділів використовуйте додатково середовище MathCad.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вища шк., 2002. – 287 с.
2. Боровик О.В., Боровик Л.В. Дослідження операцій в економіці: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2003. – 520 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб. пособие для студ. вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
6. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975. – 141 с.
7. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
8. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
9. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство „Дело и Сервис” , 2001. – 368 с.
10. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.Т. Тришин, М.Н. Фридман / Под. ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
11. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.

12. Карагорова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.
13. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
14. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
15. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
16. Кудрявцев Е.М. MathCad 2000 Pro. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
17. Математичне програмування / В.О. Борисенко, Т.В. Ковальчук, В.В. Левчук, В.С. Мартиненко. – К.: ВЦ КДТЕУ, 1998. – 48 с.
18. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д., Демченко В.В. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2003. – 319 с.
19. Очков В.Ф. MathCad 2000 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
20. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
21. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.
22. Степанюк В.В. Методи математичного програмування. К.: Вища шк., 1984. – 272 с.
23. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.
24. Теория выбора и принятия решений: Учеб. пособие / И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А Рубчинский, В.Б. Соколов. М.: Наука, 1982. – 328 с.
25. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Значення функції e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,432	3,60	0,027
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,00	0,0009

Нормована функція Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00789	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	49903	49903	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997									
5,0	49999									

Примітка. В таблиці подані мантиси значень функції (0,...).

$$\Phi(-z) = -\Phi(z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt = 0,5$$

Додаток В

**Значення чисел q в залежності від об'єму вибірки n і надійності
удля визначення довірчого інтервалу середнього квадратич-
ного відхилення σ_x**

n	0,95	0,99	0,999		n	0,95	0,99	0,999
7	0,92	—	—		25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	—	—		30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	—	—		35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	—	—		40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	—		45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	—		50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	—		60	0,188	0,269	0,38
14	0,48	0,78	—		70	0,174	0,245	0,34
15	0,46	0,73	—		80	0,161	0,226	0,31
16	0,44	0,70	—		90	0,151	0,211	0,29
17	0,42	0,66	—		100	0,143	0,198	0,27
18	0,40	0,63	0,96		150	0,115	0,160	0,211
19	0,39	0,60	0,92		200	0,099	0,136	0,185
20	0,37	0,58	0,88		250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу χ^2

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,55	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,96	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,8	14,0	12,3	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Критичні точки розподілу Фішера — Снедекора

 $P = 0,9$ ($\alpha = 0,1$)

$\frac{11}{12}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64

$\frac{11}{12}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,31	1,30	1,24	1,17

$P = 0,95 (\alpha = 0,05)$

$\frac{I1}{I2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90

$\frac{11}{12}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

Додаток Е

t – розподіл (значення $t_{кр}$, відповідне $P(T > t_{кр}) = \alpha$)

n	α				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,576
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**В.М. Дякон
Л. Є. Ковальов**

**МОДЕЛІ І МЕТОДИ
ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ**

Підп. до друку 06.03.2013.
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Georgia. Друк офс.
Ум. друк. арк. 35,108 Обл.-вид. арк. 15,152
Тираж 500 пр. Вид. № 1
Зам. №017

Інформація про видавця:

АНФ ГРУП, ТОВ

07400, Київська обл, м. Бровари, вул. Декабристів 46, к. 149

тел.: + 38 044 221 29 60, + 38 050 953 21 39

e-mail: info@anf-group.com.ua

anf-group.com.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 4329 від 24.05.2012