К вопросу о канонических почти геодезических отображениях первого типа

В. Е. Березовский
(Уманьский национальный университет садоводства, ул.Институтская, д. 1, г.Умань, Черкасская обл., 20305, Украина)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш
(университет им.Палацкого, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

Е. В. Черевко
(Одесский национальный экономический университет, ул.Преображенская, д. 8, г.Одесса, 65082, Украина)
E-mail: cherevko@usa.com

Пусть при отображении $\pi : A_n \to \overline{A}_n$ тензор деформации связностей P^h_{ij} удовлетворяет уравнению

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k} + \delta^h_{(k} a_{ij)}, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, скобки обозначают симметрирование по указанным индексам без деления.

Легко убедиться, что отображение $\pi : A_n \to \overline{A}_n$, определяемое уравнением (1) является частным случаем почти геодезических отображений первого типа [1, 2]

Имеют место

Теорема 1. *Тензор Римана R^h_{ijk} является инвариантным относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнением* (1)*, геометрическим объектом пространств аффинной связности.*

Теорема 2. *Если аффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение, определяемых уравнением* (1)*, на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, то пространство $\overline{A}_n$ является аффинным пространством.*

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнением (1).

Рассматривая (1) как систему уравнений типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij}, из условий ее интегрируемости получим

$$\begin{aligned} a_{ik,j} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \big[n \big(P^\alpha_{ik} R_{\alpha j} - P^\beta_{\alpha(k} R^\alpha_{i)j\beta} \big) + R_{\alpha(k} P^\alpha_{i)j} - P^\beta_{\alpha j} R^\alpha_{(ik)\beta} - \\ - P^\beta_{\alpha(i} R^\alpha_{|j|k)\beta} + (n+1) \big(a_{j(i} P^\alpha_{k)\alpha} - a_{\alpha(i} P^\alpha_{k)j\alpha} \big) + 2 \big(a_{ik} P^\alpha_{j\alpha} - a_{j\alpha} P^\alpha_{ik} \big) \big], \end{aligned} \tag{2}$$

где R^h_{ijk} и R_{ij} – соответственно, тензоры Римана и Риччи пространства A_n.

Очевидно, должны еще выполняться условия алгебраического характера

$$P^h_{ij} = P^h_{ji}, \qquad a_{ij} = a_{ji}. \tag{3}$$

Поэтому, имеет место теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемых уравнением* (1)*, на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной замкнутой системы типа Коши* (1)*,* (2) (3) *относительно функций P^h_{ij} и a_{ij}.*

Литература

[1] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979.
[2] J. Mikeš, et al. *Differential geometry of special mappings*, Palacky Univ. Press, Olomouc, 2015.