

УДК 004.94+519.6+622.2

[https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-2\(43\)-1348-1364](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-2(43)-1348-1364)

**Мануйленко Роман Іванович** кандидат технічних наук, викладач, Уманський національний університет садівництва, м. Умань, тел.: +38 (050) 471-00-72, <https://orcid.org/0000-0003-1083-9697>

**Ковальов Леонід Євгенійович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Уманський національний університет садівництва, м. Умань, тел.: +38 (050) 551-68-32, <https://orcid.org/0000-0003-3386-7439>

**Побережець Іван Іванович** кандидат технічних наук, доцент Уманський національний університет садівництва, м. Умань, тел.: +38 (098) 333-75-59, <https://orcid.org/0000-0002-9964-5022>

### МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИДОБУВАННЯ ТВЕРДОЇ КОРИСНОЇ КОПАЛИНИ З ЗАКРІПЛЕННЯМ ВИРОБЛЕНОГО ПРОСТОРУ

**Анотація.** Розширення сфери застосування методів з необхідними властивостями, удосконалення традиційних та впровадження нових виробничих технологій та підвищення їх ефективності обумовлює необхідність розробки нових засобів математичного моделювання як самих матеріалів, так і технологічних процесів.

На інтенсивність зміни напружено-деформованого стану гірничого масиву впливають гірничо-технічні умови видобування корисної копалини. Сукупність гірничо-геологічних умов залягання пласта і гірничо-технічних умов його розробки визначають стан очисного вибою, підземних виробок, які оточують вибій і денну поверхню.

Основними показниками, що характеризують взаємодію кріплення з породою, є абсолютна величина і характер сходження порід, рівень контакту між опорним перекриттям і безпосередньою покрівлею, а також фактичні експлуатаційні характеристики силового кріплення. Неправильний вибір кріплення для гірничо-геологічних умов очисного вибою призводить до збільшення конвергенції порід при низьких експлуатаційних характеристиках або до дроблення нижнього пласта безпосередньої покрівлі при завищених характеристиках механізованого кріплення. В результаті в нижніх шарах безпосередньої покрівлі виникають розтягуючі напруження, які призводять до розкриття тріщин і утворення обвалів.

Проведений спільний аналіз рівнянь механіки деформівного твердого тіла і рівнянь відповідної теорії міцності для вивчення процесів зсуву і руйнування гірничних мас. Запропоновано комп'ютерну модель для чисельного розрахунку параметрів розлому гірничних порід в районі виробничих операцій.

При створенні моделі використовувалися математичні методи: перетворення комплексної площини, інтеграли типу Коші у формі Сіньоріні-Келдиша-Седова.

Комп'ютерна модель описує процес видобування корисної копалини з закріпленням виробленого простору та враховує різноманітні геологічні умови, технічні параметри, властивості пласта копалини і навколишніх порід.

**Ключові слова:** комп'ютерне моделювання, чисельні розрахунки, теорія міцності, механізоване кріплення, напруження, деформація.

**Manuylenko Roman Ivanovych** candidate of technical sciences, assistant professor, Uman National University of Horticulture, Uman, tel.: +38 (050) 471-00-72, <https://orcid.org/0000-0003-1083-9697>

**Kovalev Leonid Evheniyovych** candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Uman National University of Horticulture, Uman, tel.: +38 (050) 551-68-32, <https://orcid.org/0000-0003-3386-7439>

**Poberezhets Ivan Ivanovych** candidate of technical sciences, associate professor, Umansk National University of Horticulture, Uman, tel.: +38 (098) 333-75-59, <https://orcid.org/0000-0002-9964-5022>

## **SIMULATION OF THE PROCESS OF EXTRACTION OF SOLID RESOURCES WITH CONSOLIDATION OF THE PRODUCED SPACE**

**Abstract.** The expansion of the scope of application of methods with the necessary properties, the improvement of traditional and the introduction of new production technologies and the improvement of their efficiency necessitate the development of new means of mathematical modeling of both the materials themselves and technological processes.

The intensity of changes in the stress-strain state of the mining massif is influenced by the mining and technical conditions of mineral extraction. The combination of mining-geological conditions of the deposit and mining-technical conditions of its development determine the condition of the cleaning pit, underground workings that surround the pit and the day surface.

The main indicators characterizing the interaction of the fastener with the rock are the absolute magnitude and character of rock convergence, the level of contact

between the supporting floor and the immediate roof, as well as the actual operational characteristics of the power fastener. Incorrect choice of fastening for the mining and geological conditions of the clean-out pit leads to an increase in the convergence of rocks with low operational characteristics or to crushing of the lower layer of the immediate roof with overestimated characteristics of the mechanized fastening. As a result, tensile stresses occur in the lower layers of the immediate roof, which lead to the opening of cracks and the formation of collapses.

A joint analysis of the equations of the mechanics of a deformable solid body and the equations of the corresponding theory of strength was carried out to study the processes of shearing and destruction of mining masses. A computer model for the numerical calculation of fracture parameters of mining rocks in the area of production operations is proposed.

When creating the model, mathematical methods were used: transformation of the complex plane, Cauchy-type integrals in the Signorini-Keldysh-Sedov form.

The computer model describes the process of mineral extraction with the consolidation of the produced space and takes into account various geological conditions, technical parameters, properties of the mineral layer and surrounding rocks.

**Keywords:** computer modeling, numerical calculations, theory of strength, mechanized fastening, tension, deformation.

**Постановка проблеми.** Комп'ютерне моделювання технологічних процесів набуває широкого поширення у різних сферах практичної діяльності. Разом з тим залишається безліч невіршених завдань математичного моделювання технологічних процесів, враховують фізичні та технологічні аспекти. Актуальними залишаються завдання розробки методик та алгоритмів чисельного розрахунку, що забезпечують створення комплексів програм для проведення наукових досліджень та підтримки виробництва. Вирішення заданих проблем із використанням сучасних інформаційних технологій обумовлює необхідність створення комплексних систем комп'ютерного та фізичного моделювання. Це визначає актуальність задачі вдосконалення методів та засобів математичного та комп'ютерного моделювання технологічних процесів та розробки елементів автоматизованих систем управління.

Важливою проблемою є вивчення геомеханічного стану нестійких порід біля гірничих виробок з метою забезпечення їх безаварійної роботи. Для вирішення цієї проблеми необхідно виявити залежності і закономірності деформацій нестійких порід поблизу гірничих виробок. Це дасть можливість на етапі розробки проектної документації приймати рішення, що забезпечують стійкість порід на межі гірничих виробок, скорочують простої лав і дотримуються безпечних умов праці.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Останнім часом намітилися нові тенденції в розвитку технології проведення виробничих операцій в

складних гірничо-геологічних умовах. Перш за все, це пов'язано з необхідністю підвищення продуктивності очисного вибою і підвищення ефективності взаємодії механізованих кріплень з породами для зменшення викидів та інших динамічних явищ [1].

У той же час ефективне використання високопродуктивних вибоїв на великих глибинах з нестабільними покрівлями вугільних пластів вимагає додаткових досліджень в області встановлення меж зон впливу технологічних операцій виїмки вугілля і переміщення механізованого кріплення по довжині очисного вибою, а також вивчення геомеханічних процесів, що відбуваються в гірничому масиві.

Аналіз принципу роботи механізованого кріплення і схем його руху в очисному вибої вказує на той факт, що при формалізації та виявленні технологічних параметрів з метою оцінки надійності виробничого процесу в стабільному режимі необхідно включати параметр, що враховує фізико-механічні властивості порід з метою мінімізації виконання ремонтних робіт при переміщенні ділянок механізованого кріплення.

Огляд методів математичного моделювання показав, що найкращі результати у розв'язанні таких задач дає використання індуктивного моделювання [2].

**Мета статті** – визначення параметрів розлому гірничих порід в районі виробничих операцій вимагає аналітичних досліджень процесів зсуву і руйнування гірничих мас, які передбачають спільний аналіз рівнянь механіки деформівного твердого тіла і рівнянь відповідної теорії міцності.

**Виклад основного матеріалу.** У процесі виймання корисної копалини відбувається перерозподіл напружень в гірничій масі за рахунок руху бічних порід. При певних розмірах видобутого простору прошарки гірничих порід згинаються, як затиснуті по контуру плити.

Залежність між напруженнями і деформаціями виражається через закон Гука [3, 4]:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy} \\
 \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy} \\
 \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy} \\
 \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy} \\
 \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy} \\
 a_{ij} &= a_{ji}, i, j = \overline{1,6}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Якщо тіло має три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, то рівняння закону Гука записуються через технічні константи:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}}; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}.\end{aligned}\quad (2)$$

де  $E$  - модуль Юнга;

$G$  – модулі зсуву;

$\nu$  – коефіцієнти Пуассона.

Таке тіло називають ортотропним [3]:

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}; E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz}; E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx}. \quad (3)$$

У плоскій задачі теорії пружності  $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ , а  $\sigma_x, \sigma_y$  і  $\tau_{xy}$  залежать від координат  $x$  і  $y$ . Це можливо для виробок, довжина яких по осі  $z$  досить велика. Тоді [1]

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} &= \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0 \\ \tau_{zx} &= \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z &= \frac{1}{a_{33}} (a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{36} \tau_{xy})\end{aligned}\quad (4)$$

Введемо коефіцієнти [1]  $b_{ij} = b_{ji}$ :

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} a_{3j}}{a_{33}}.$$

У рівняннях (1) коефіцієнти  $a_{ij}$  замінюються на  $b_{ij}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = b_{11} \sigma_x + b_{12} \sigma_y + b_{16} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_{21} \sigma_x + b_{22} \sigma_y + b_{26} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_{61} \sigma_x + b_{62} \sigma_y + b_{66} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (5)$$

Напруження задовольняють і рівнянням рівноваги

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0,\end{aligned}\quad (6)$$

де  $X$  і  $Y$  – об'ємні сили.

Якщо об'ємні сили мають потенціал  $U$ :

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (7)$$

тоді напруження можуть бути виражені через похідні функції

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

Функція  $F$  задовольняє диференціальному рівнянню [1]:

$$\begin{aligned} b_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2b_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2b_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + b_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \\ = -(a_{12} + a_{22}) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{26}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - (a_{12} + a_{11}) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Диференціальні рівняння для функцій двох змінних розв'язуються методами комплексних змінних. Щоб знайти функцію, яка задовольняє диференціальному рівнянню (9), розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$b_{22} - 2b_{26}\mu + (2b_{12} + b_{66})\mu^2 - 2b_{16}\mu^3 + b_{11}\mu^4 = 0 \quad (10)$$

С.Г. Лехницький довів, виходячи із закону збереження енергії, що рівняння має комплексні корені  $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2$ . [1], а для ортотропних середовищ корені бікватратного рівняння суто уявні. Рішення рівняння (9) запишемо у вигляді:

$$F = 2 \operatorname{Re}(F_1(z_1) + F_2(z_2)) \quad (11)$$

де  $z_1 = x + \mu_1 y; z_2 = x + \mu_2 y$ .

Напруження будуть записуватися за допомогою функцій  $\Phi_j(z_j) = F'_j(z_j)$  наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}(\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)) \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}(\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)) \\ u &= 2 \operatorname{Re}(p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)) + u_0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v &= 2 \operatorname{Re}(q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)) + v_0 \\ p_j &= a_{11}\mu_j^2 - a_{16}\mu_j + a_{12} \\ q_j &= a_{12}\mu_j + \frac{a_{22}}{\mu_j} - a_{26} \end{aligned} \quad (14)$$

При великих навантаженнях корпус переходить в пластичний стан, виникають залишкові деформації. У разі пластичної анізотропії умова пластичності має вигляд [5, 6]

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (15)$$

Коефіцієнти рівняння знаходять емпіричним шляхом.

У випадку плоскої деформації маємо

$$\sigma_z = \frac{G\sigma_x + F\sigma_y}{G + F}$$

Межу міцності в площині ху позначимо через k:

$$\frac{FG + GH + HF}{F + G}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{k^2} = 1 \quad (16)$$

Для компактності позначимо

$$\frac{1}{4k^2} \frac{F + G}{FG + GH + HF} = g^2 \quad (17)$$

то умова пластичності буде переписано як

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4g^2} + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (18)$$

Рівняння зв'язку між напруженнями і переміщеннями має такий вигляд:

$$g^2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (19)$$

А рівняння жорсткості запишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

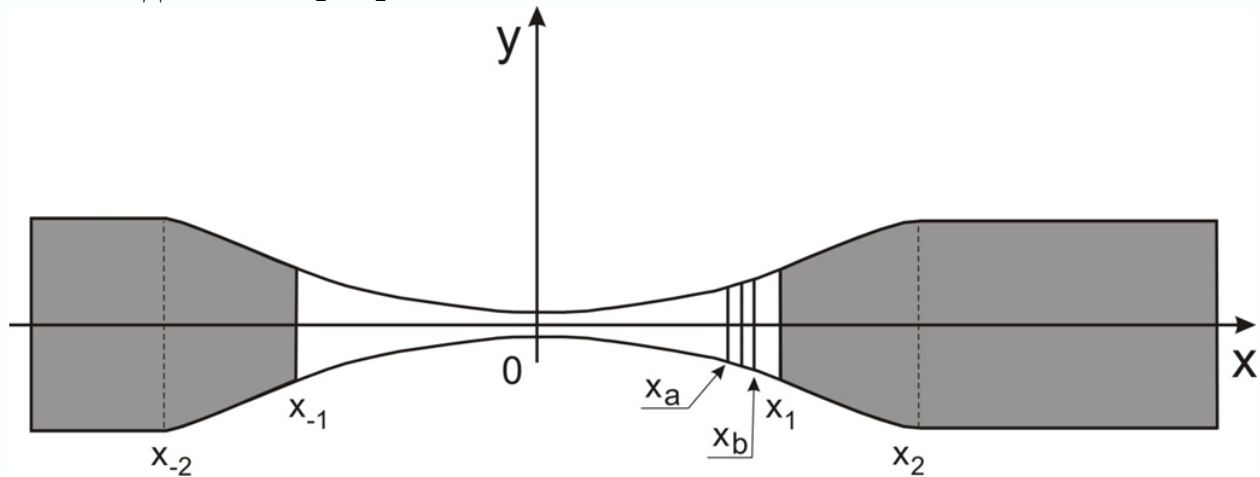
Тоді залежності (18-20) і рівняння рівноваги (6) утворюють систему рівнянь пластичності [1, 5, 6]. Напруження зсуву при контакті порід приймаються рівними межі плинності k:

$$\tau_{xy} = \pm r(x) = \mp k \quad (21)$$

Гірничий масив з розвиненим вугільним пластом є анізотропним пружнопластним середовищем [7]. Розглянемо початковий етап розробки вугільного пласта до зіткнення покрівлі і порід ґрунту. В якості критерію плинності ми використовуємо представлення Мізеса-Хілла [1, 6]

Схема проектування представлена на малюнку. Вісь x декартової системи координат спрямована уздовж шва перпендикулярно лінії очисного вибою, вісь y перпендикулярна пласту корисної копалини до денної поверхні.

За початок координат береться середина видобутого простору. Біля вибою вугільний пласт знаходиться в непружному стані. Координати крайової частини пласта позначені  $x_{-1}$  і  $x_1$ ,  $x_{-1} = -x_1$ . Межі зон пластичної деформації забою відзначені  $x_{-2}$  і  $x_2$ .



**Рис. 1** Схема розрахунку

Природний напружений стан гірничих порід обумовлено їх вагою і виражається формулами

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(0)} &= -\gamma(H - y); \\ \sigma_x^{(0)} &= -\lambda\gamma(H - y); \\ \tau_{xy}^{(0)} &= 0\end{aligned}\tag{22}$$

де  $\gamma$  - питома вага гірничих порід;  
 $\lambda$  – коефіцієнт бічного розпирання [1].

Після видалення частини вугільного пласта відбувається перерозподіл напружень у вугільному пласті і навколишніх породах. Представимо виникаючі компоненти напружень у вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}; \\ \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)}\end{aligned}\tag{23}$$

де  $\sigma_y^{(1)}$ ,  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1)}$  додаткові напруження, які потрібно знайти.

Додаткове поле напружень знаходять з крайових умов. Біля вироблюваного простору відсутні нормальні і зсувні напруження:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= 0, \tau_{xy} = 0, \quad x_{-1} < x < x_a, \quad y = 0 \\ \sigma_y &= 0, \tau_{xy} = 0, \quad x_b < x < x_1, \quad y = 0\end{aligned}\tag{24}$$

У нерухомому перетині тиск кріплення на породи виглядає наступним чином:

$$\sigma_y = -R(x), \tau_{xy} = 0, \quad x_a < x < x_b, \quad y = 0 \quad (25)$$

де  $R$  – задана функція.

Розроблений вугільний пласт знаходиться в пластичному напруженому стані в зоні опорного тиску. Для того щоб сформулювати граничні умови, необхідно вирішити задачу визначення напружень в крайовій частині вугільного пласта.

Система диференціальних рівнянь (6), (18) – (20) пластичності має гіперболічний тип.

Чисельний метод дає можливість вирішити початкову характеристичну задачу і змішану задачу [1].

Таким чином, в непружній зоні вугільного пласта визначаємо вертикальні і зсувні напруження. Напруження на контакті пласта і породи мають вигляд:

$$\sigma_y = -\gamma H(ax/h + c), \tau_{xy} = 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad y = 0 \quad (26)$$

$$\sigma_y = -\gamma H(-ax/h + c), \tau_{xy} = 0, \quad x_{-2} < x < x_{-1}, \quad y = 0$$

де  $a = k/\gamma H, c = k/\gamma H(\pi h/2 - x_1)$ ;

$k$  – межа міцності вугілля на зсув.

Поза зоною опорного тиску вугільний пласт вважається недеформованим

$$v = h, \tau_{xy} = 0, \quad x > x_2, \quad y = 0, \quad (27)$$

$$v = h, \tau_{xy} = 0, \quad x < x_{-2}, \quad y = 0.$$

Таким чином, граничні умови для додаткових компонент напружень запишуться у вигляді:

$$\sigma_y^{(1)} = \gamma H, \tau_{xy} = 0, \quad x_{-1} < x < x_a, \quad y = 0$$

$$\sigma_y^{(1)} = \gamma H, \tau_{xy} = 0, \quad x_b < x < x_1, \quad y = 0$$

$$\sigma_y^{(1)} = \gamma H - \gamma H(ax/h + c), \tau_{xy} = 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad y = 0$$

$$\sigma_y^{(1)} = \gamma H - \gamma H(-ax/h + c), \tau_{xy} = 0, \quad x_{-2} < x < x_{-1}, \quad y = 0 \quad (28)$$

$$\sigma_y^{(1)} = \gamma H - R(x), \tau_{xy} = 0, \quad x_a < x < x_b, \quad y = 0$$

$$v = h, \tau_{xy} = 0, \quad x > x_2, \quad y = 0$$

$$v = h, \tau_{xy} = 0, \quad x < x_{-2}, \quad y = 0$$

Координати  $x_2$  і  $x_{-2}$  заздалегідь не відомі і визначаються в ході розв'язання задачі. Комплексні потенціали  $\Phi_1'(z_1)$  і  $\Phi_2'(z_2)$  виражаються через функцію  $F(z)$ :

$$\Phi_1'(z_1) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{F(z_1)}{\gamma H}; \quad \Phi_2'(z_2) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \frac{F(z_2)}{\gamma H}; \quad (29)$$

У цьому випадку при  $y=0$  напруження зсуву дорівнюватимуть нулю, тобто виконуються граничні умови для  $\tau_{xy}$ . Функція  $F(z_j)$  вибирається так, щоб напруження на нескінченності прямували до нуля.

$$F(\infty) = 0. \quad (30)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження функції за крайовими умовами. При розв'язанні задачі використовується метод інтегралів типу Коші для напівплощини. Якщо  $x \in [a_k; b_k]$  напруження задані на відрізках межі напівплощини (при  $y=0$ ), а на відрізках  $x \in [b_k; a_{k+1}]; x \in [b_n; +\infty]; x \in [-\infty; a_1]$  переміщення:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} &= \sigma(x), x \in [a_k; b_k] \\ v &= v(x), x \in [b_k; a_{k+1}] \\ v &= v(x), x \in [b_n; +\infty] \\ v &= v(x), x \in [-\infty; a_1] \end{aligned} \quad (31)$$

тоді поле напружень розташовується за формулою Сіньоріні-Келдиша-Седова [1]:

$$\begin{aligned} F(z_j) &= \frac{1}{\pi i X(z_j)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(x)h(x)}{x - z_j} dx + \Psi(z_j) \\ X(x) &= \prod_{k=1}^n \sqrt{(x - a_k)(x - b_k)} \\ h(x) &= \begin{cases} \sigma(x), x \in [a_k; b_k] \\ v'(x), x \notin [a_k; b_k] \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Функція  $\Psi(z_j)$  визначається з рівняння:

$$v(b_k) - v(a_k) = 2 \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{Re}(q_1 \Phi_1'(x) + q_2 \Phi_2'(x)) dx \quad (33)$$

При цьому напруження задаються на відрізку  $(x_{-2}; x_2)$ , а на відрізках  $(-\infty; x_{-2})$  і  $(x_2; +\infty)$  задаються зміщення, які є постійними. Формула записується так:

$$\begin{aligned}
\frac{F(z_j)}{\gamma H} = & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i \sqrt{(z_j - x_2)(z_j - x_{-2})}} \int_{x_2}^{x_2} \frac{\sqrt{(t - x_2)(t - x_{-2})}}{2(t - z_j)} dt + \\
& - \frac{1}{\pi i \sqrt{(z_j - x_2)(z_j - x_{-2})}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sqrt{(t - x_2)(t - x_{-2})}(c - at)}{t - z_j} dt - \\
& - \frac{1}{\pi i \sqrt{(z_j - x_2)(z_j - x_{-2})}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(t - x_2)(t - x_{-2})}(c + at)}{t - z_j} dt + \\
& + \frac{1}{\pi i \sqrt{(z_j - x_2)(z_j - x_{-2})}} \int_{x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{(t - x_2)(t - x_{-2})}r(t)}{t - z_j} dt
\end{aligned} \tag{34}$$

Щоб знайти  $x_{-2}$  і  $x_2$ , складемо систему трансцендентних алгебраїчних рівнянь. Задовольнимо умову (30) локальності впливу очисних робіт. Для цього розкладемо функцію в степеневий ряд Лорана:

$$F(z) = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \dots \tag{35}$$

Для виконання умови (30) достатньо, щоб:

$$f_0 = 0 \tag{36}$$

Розв'язавши систему рівнянь (27) і (30), знаходимо координати меж зон пластичної деформації  $x_{-2}$ ,  $x_2$ .

Умова змикання порід полягає в наступному:

$$v^+(x_0) = v^-(x_0) = 0 \tag{37}$$

Обчислення інтеграла з комплексної змінної проводиться аналітичним або чисельним методами. При цьому підінтегральні функції, має властивості, що дозволяють записати отримані інтеграли у вигляді аналітичної функції. При розв'язанні систем диференційних рівнянь і побудові графіків використовувалися програми Matlab і Maple. Чисельні розрахунки проводилися за допомогою методу послідовних наближень. Були обрані значення  $x_2$  і  $x_{-2}$ , було знайдено значення функцій, потім знайдені значення підставлялися в систему рівнянь: умови локальності впливу виробки(36) і умови для переміщень (37). Потім методами множення і половинного ділення визначалися нові значення величин до тих пір, поки не була досягнута задана точність. В результаті похибка розрахунків не перевищувала  $10^{-4}$ . Дослідження показують, що розподіл напружень в опорі впливає на напружено-деформований стан порід поблизу неї. Не менш важлива різниця напружень уздовж опори, чим контрастніше розподіл напружень, тим більше зона впливу опори.

Чисельні дослідження проводились за таких умов: глибина  $H = 1000$  м, товщина пласта  $2h = 1$  м. Навколишні породи вважаються анізотропними.

Піщанисті сланці мають характеристики: модуль Юнга  $E_1 = 3 \cdot 10^5$  Па,  $E_2 = 7 \cdot 10^5$  Па, модуль зсуву  $G_1 = G_2 = 2 \cdot 10^5$  Па, міцність  $\sigma_{\text{rozt}} = 1,2 \cdot 10^7$  Па,  $\sigma_{\text{stys}} = 9 \cdot 10^7$  Па.

Результати рішення представлені на графіках вертикальних напружень і горизонтальних напружень при  $x_1 = 5$  і  $x_1 = 32$  відповідно. Наявність опори призводить до перерозподілу напружень і зміни довжини пластичної зони.

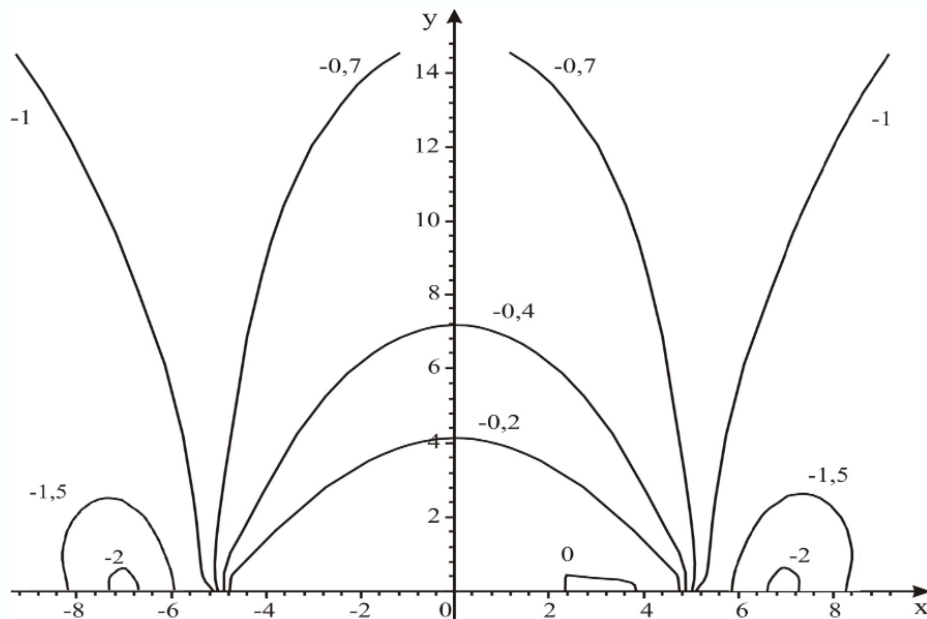


Рис. 2 Вертикальні напруження при  $x_1=5$

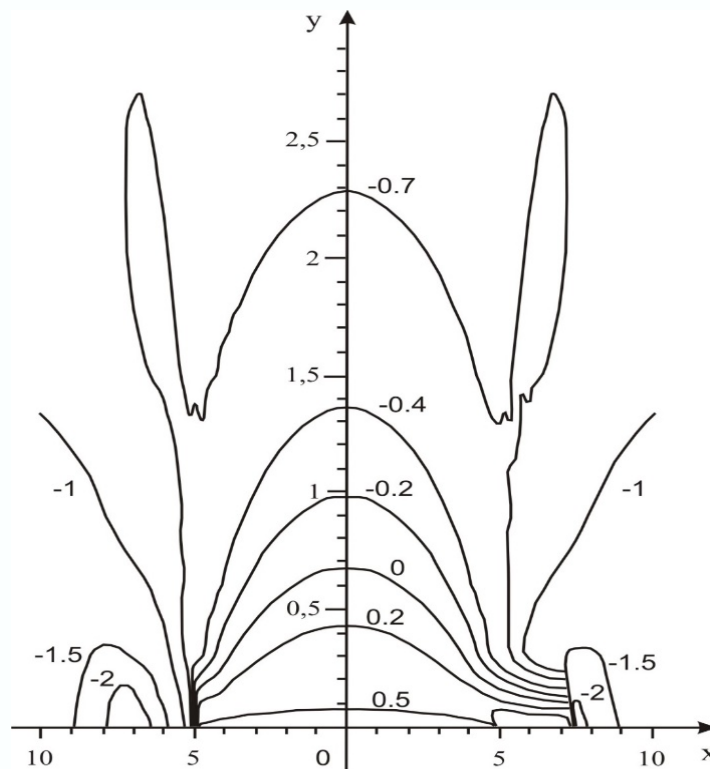


Рис. 3 Горизонтальні напруження при  $x_1=5$

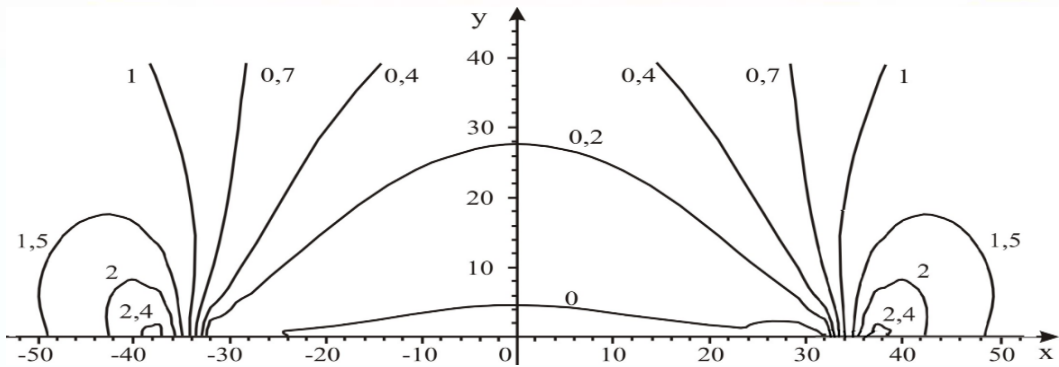


Рис. 4 Вертикальні напруження при  $x_1=32$

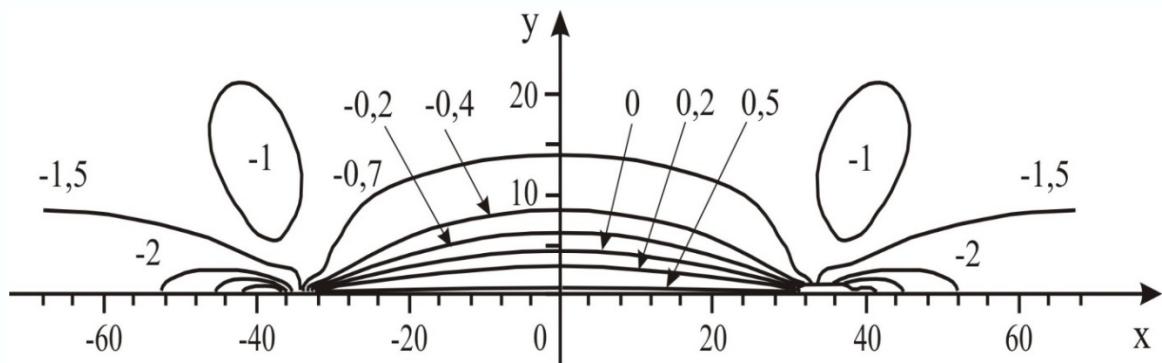


Рис. 5 Горизонтальні напруження при  $x_1=32$

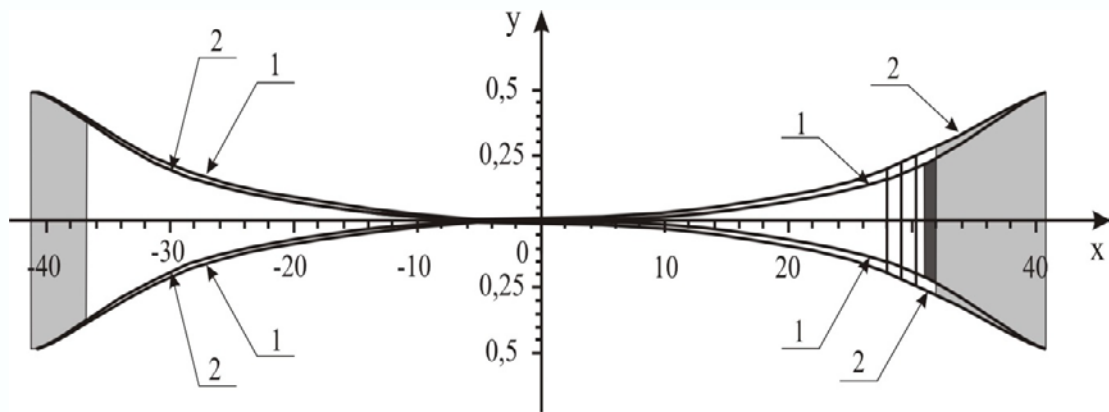
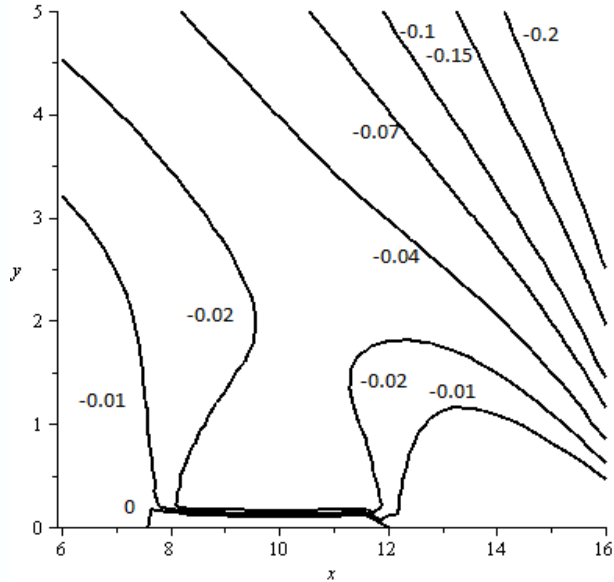


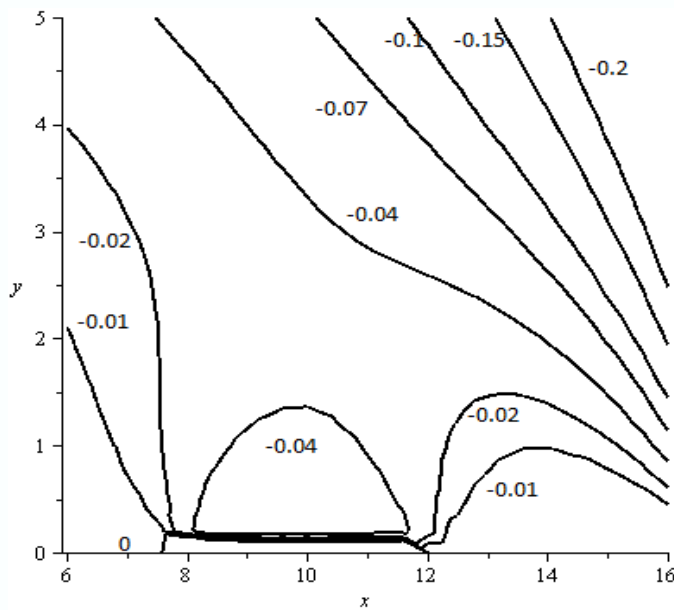
Рис. 6 Конвергенція гірничих порід при відсутності (1) і при наявності (2) опор

При постійному значенні тиск кріплення на породи уздовж виробки зона впливу менше, ніж при лінійній залежності від координати. При квадратичному і експоненціальному співвідношенні зона впливу опори буде більше, ніж при лінійному відношенні, але ця різниця не значна, всього кілька відсотків (рис. 7-10). З іншого боку, значно збільшується час на розрахунок напружень і визначення межі зони тиску опори і замикання породи. При розрахунках тиск кріплення на породи слід апроксимувати неперервною функцією, яка виражена єдиною математичною формулою на всьому відрізку

кріплення. Якщо тиск визначити як кускову функцію, то рішення значно ускладниться, а витрати машинного часу на розрахунок напружень, деформацій і зрушень у вугільному пласті і породах зростуть.



**Рис. 7** Контури вертикальних напружень, постійна реакція



**Рис. 8** Контури вертикальних напружень, квадратична залежність

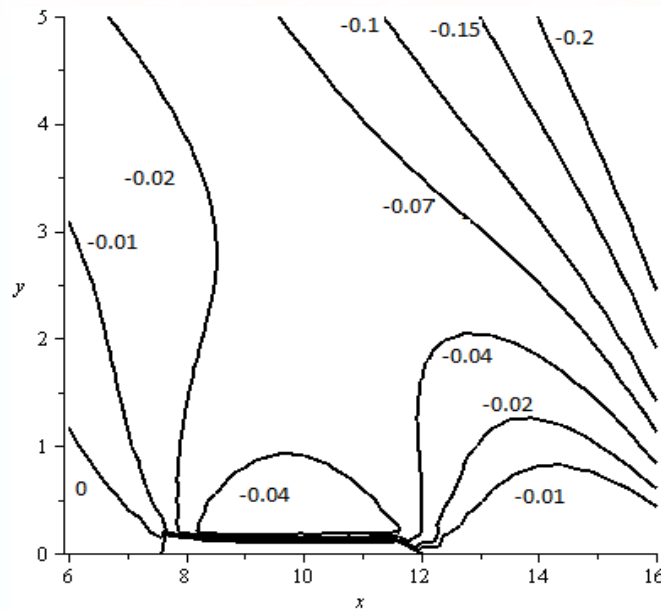


Рис. 9 Контури вертикальних напружень, лінійна залежність

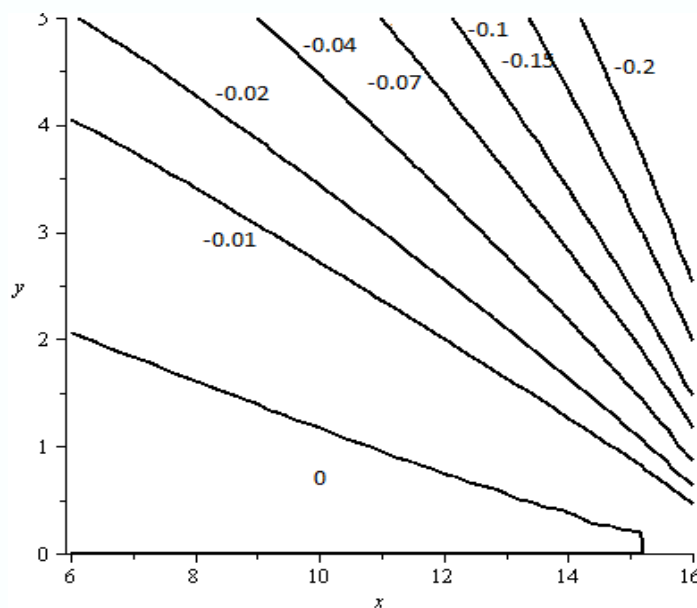


Рис. 10 Контури вертикальних напружень, без опори

**Висновки.** Створено комп'ютерну програму, яка моделює процес видобування корисної копалини з закріпленням виробленого простору. Програма може враховувати різноманітні геологічні умови, технічні параметри, властивості пласта копалини і навколишніх порід, зокрема, анізотропію.

Анізотропія порід і пластична анізотропія твердої корисної копалини є вагомим чинником, який необхідно враховувати при побудові комп'ютерної моделі процесу видобування. Для порід зі слабкою анізотропією більшою буде зона вертикальних напружень розтягу, для порід із сильною анізотропією більшою буде зона горизонтальних напружень розтягу.

Наявність розтягу збільшує ризик обвалення порід поблизу вибою. Наявність кріплення дозволяє зменшити зону, таким чином покращити безпеку умов виробництва.

Змінна тиску кріплення на породи від 335 кПа до 435 кПа збільшує ефект опори, зона впливу і стискаючих напружень біля опори в абсолютній величині буде більше, ніж в разі постійної реакції підтримки в 420 кПа. При розрахунках напружено-деформованого стану гірничого масиву необхідно враховувати непостійність тиску кріплення.

Квадратична апроксимація більш точно описує тиск кріплення на породи, але формули стають більш громіздкими, час розрахунку трохи довше, а результати відрізняються не суттєво. Тому лінійна залежність може бути хорошим наближенням. Зазвичай лінійна апроксимація тиску кріплення на породи дає результати з необхідною для замовника точністю

#### **Література:**

1. Андреев М.М., Камишан В.В., Мануйленко Р.І. Гірничий тиск - основний фактор розвитку динамічних явищ вугленосного масиву. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. Донецьк : ІПММ НАН України, 2008. Т. 16. С. 3-12.
2. Винников Ю.Л. Прикладні задачі механіки анізотропних ґрунтів : монографія. Полтава : ПолтНТУ : Вараждін : Ун-т Північ, 2019. 152 с.
3. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів : Підручник. Київ : Знання, 2016. 400 с.
4. Ковальчук С.Б., Горик О.В. Аналітичне визначення реактивних зусиль для криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми. *Вісник ОДАБА*, 2019. С. 66-75.
5. Винников Ю.Л., Аніскін А. Прикладні задачі механіки анізотропних ґрунтів: монографія. – Полтава : ПолтНТУ імені Юрія Кондратюка, Вараждін : Університет Північ, 2019. 152 с.
6. Гришук С. В. Моногенні функції зі значеннями в комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з простими ненульовими характеристиками. *Український математичний журнал*. 2021. Т. 73, № 4. С. 474-487.
7. Ротко С.В., Ужегова О.А., Задорожнікова І.В. Розрахунок кам'яних і армокам'яних конструкцій : навч. посіб. Луцьк : Луцький національний технічний університет, 2010. 356 с.

#### **References:**

1. Andreev, M.M., Kamyshan, V.V., & Manuilenko, R.I. (2008). Hirnychnyi tysk – osnovnyi faktor rozvytku dynamichnykh yavyschch vuhlenosnoho masyvu [Mining pressure is the main factor in the development of dynamic phenomena of the coal massif]. *Pratsi Instytutu prykladnoi matematyky i mekhaniky NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*. (Vols. 16), (pp. 3-12). Donetsk: IPMM of NAS of Ukraine [in Ukrainian].
2. Vinnikov, Y.L. (2019). *Prykladni zadachi mekhaniky anizotropnykh gruntiv: monohrafiia [Applied problems of mechanics of anisotropic soils: monograph]*. Poltava: Polytechnic University: Varazhdin: Pivnich University [in Ukrainian].
3. Shvabuk, V.I. (2016). *Opir materialiv : pidruchnyk [Resistance of materials: Textbook]*. Kyiv: Znannia [in Ukrainian].