

МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ПОВІТРЯНИХ СИЛ імені ІВАНА КОЖЕДУБА

ОСНОВИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Харків

2021

УДК 681.51 (075.8)
О-75

*Затверджено до видання вченою радою
Харківського національного університету
Повітряних Сил імені Івана Кожедуба
(протокол № 19 від 12.11.2020)*

Авторський колектив: А. О. Ковальчук, В. А. Таршин,
В. Ш. Хісматулін, К. В. Садовий, Ю. О. Ковальчук, В. І. Васишин,
О. Л. Кузнецов, А. С. Чопенко, Ю. І. Полонський, О. А. Малишев, Ф. Ф. Зоц

Рецензенти: Г. В. Худов, доктор технічних наук, професор;
І. М. Невмержицький, кандидат технічних наук, доцент.

О-75 Основи автоматичного керування : навч. посіб. / А. О. Ковальчук,
В. А. Таршин, В. Ш. Хісматулін та ін. – Х. : ХНУПС, 2021. – 160 с.

У навчальному посібнику викладені принципи побудови систем автоматичного керування, методи математичного опису неперервних діянь, а також неперервних та дискретних систем автоматичного керування. Розглядаються принципи побудови і особливості математичного опису цифрових та імпульсних систем автоматичного керування, що містять блоки дискретної та неперервної дії. Описані методи побудови спрощених еквівалентних неперервних та дискретних математичних моделей таких систем.

Призначений для курсантів та студентів Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. Він може бути корисним також викладачам, ад'юнктам, інженерно-технічному складу для поповнення своїх знань з основних положень класичної теорії лінійних неперервних систем автоматичного керування.

УДК 681.51 (075.8)

© Ковальчук А. О., Таршин В. А., Хісматулін В. Ш.,
Садовий К. В., Ковальчук Ю. О., Васишин В. І.,
Кузнецов О. Л., Чопенко А. С., Полонський Ю. І.,
Малишев О. А., Зоц Ф. Ф., 2021

© Харківський національний університет
Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2021

ЗМІСТ

СПИСОК СКОРЕЧЕНЬ	6
ПЕРЕДМОВА	8
1. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	9
1.1. Основні поняття теорії автоматичного керування	9
1.2. Види алгоритмів функціонування систем автоматичного керування	11
1.3. Принципи автоматичного керування	12
1.4. Види діянь у САК. Класифікація САК за видами діянь	17
1.5. Функціональні структури та принципи дії типових САК	19
1.5.1. Система автоматичної стабілізації частоти електричних коливальних автогенераторів	19
1.5.2. Система регулювання швидкості обертання вала двигуна	22
1.5.3. Електромеханічна слідкуюча система	24
Контрольні запитання та завдання	28
2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	30
2.1. Поняття математичної моделі системи автоматичного керування	30
2.2. Класифікація динамічних систем за видами їх математичних моделей	32
2.2.1. Інерційні та безінерційні динамічні системи. Поняття стану системи	32
2.2.2. Стаціонарні та нестаціонарні динамічні системи	33
2.2.3. Лінійні та нелінійні динамічні системи. Властивості лінійних систем	34
2.3. Диференціальне рівняння “вхід-вихід” та оператор передачі лінійної стаціонарної інерційної динамічної системи	37
2.4. Характеристики лінійних стаціонарних динамічних систем.	39
2.4.1. Поняття про характеристики динамічних систем	39
2.4.2. Часові характеристики	40
2.4.3. Передавальна функція	44
2.4.4. Частотні характеристики	48
Контрольні запитання та завдання	54
3. ЕЛЕМЕНТАРНІ ЛАНКИ	57
3.1. Поняття та класифікація елементарних ланок	57
3.2. Підсилювальна ланка	61
3.3. Диференціююча ланка	62

3.4. Інтегруюча ланка	64
3.5. Інерційна (аперіодична) ланка	66
3.6. Форсуюча ланка	70
3.7. Коливальна ланка	72
3.8. Форсуюча ланка другого порядку	79
3.9. Типові динамічні ланки	81
3.10. Немінімально-фазові ланки	83
Контрольні запитання та завдання	85
4. СХЕМИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ І ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	88
4.1. Поняття схеми математичної моделі САК	88
4.2. Види з'єднань динамічних ланок	89
4.3. Перетворення схеми математичної моделі САК довільної конфігурації до типового одноконтурного вигляду	92
4.4. Основні рівняння лінійної стаціонарної САК	96
4.5. Методика отримання основних рівнянь лінійної стаціонарної САК з одиничним негативним головним зворотним зв'язком	98
4.6. Основні характеристики лінійної стаціонарної САК	102
4.7. Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи	103
Контрольні запитання та завдання	110
5. ЦИФРОВІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	114
5.1. Типові функціональні структури цифрових САК з об'єктом керування неперервної дії.	114
5.2. Стисла характеристика і математична модель АЦП.	115
5.3. Стисла характеристика і математична модель ЦАП.	119
5.4. Математична модель цифрового керуючого пристрою.	123
5.5. Математична модель цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії.	125
5.6. Методика отримання спрощеної еквівалентної дискретної математичної моделі.	128
5.7. Методика отримання спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі.	132
5.7.1. Аналіз умов, необхідних для побудови еквівалентної неперервної математичної моделі.	132
5.7.2. Побудова спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі в частотній області.	134

5.7.3. Побудова спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі в часовій області.	138
5.7.4. Методика визначення ширини смуги пропускання (прозорості) системи.	140
Контрольні запитання та завдання	143
6. ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.	145
6.1. Види імпульсної модуляції. Імпульсний елемент та його математична модель.	145
6.2. Відновний пристрій та його математична модель.	149
6.3. Функціональні схеми і математичні моделі САК імпульсних РЛС з об'єктом керування неперервної дії.	152
Контрольні запитання та завдання	155
ДОДАТКИ.	157
Додаток 1. Основні властивості та теореми перетворення Лапласа. . .	157
Додаток 2. Таблиця перетворень Лапласа та Z -перетворень.	158
ЛІТЕРАТУРА.	159

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АГ	– автогенератор
АІМ	– амплітудно-імпульсна модуляція
АКП	– автоматичний керуючий пристрій
АСЧ	– автоматична стабілізація частоти
АЧХ	– амплітудно-частотна характеристика
АЦП	– аналого-цифровий перетворювач
ВБ	– виконавчий блок
ВД	– виконавчий двигун
ВП	– відновний пристрій
ГІ	– генератор імпульсів
ГПН	– генератор пилкоподібної напруги
ДЕ	– дискретний еквівалент
ДЧ	– дискретна частина
ЕМП	– електромашинний підсилювач потужності
ЕМСС	– електромеханічна слідкуюча система
ЗБ	– задавальний блок
ЗРК	– зенітний ракетний комплекс
ІВП	– індукційний вимірювальний пристрій
ІЕ	– імпульсний елемент
ІПП	– імпульсний порівнювальний пристрій
КЧХ	– комплексна частотна характеристика
ЛАЧХ	– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика
ЛФЧХ	– логарифмічна фазочастотна характеристика
НЕ	– неперервний еквівалент
НПП	– неперервний порівнювальний пристрій
НЧ	– неперервна частина
ОК	– об'єкт керування
ПБ	– порівнювальний блок
ПВД	– пневматичний виконавчий двигун
ППБ	– підсилювально-перетворювальний блок
ППС	– підсилювач постійного струму
Р	– редуктор
РЛС	– радіолокаційна станція
САК	– система автоматичного керування
СБ	– сприймальний блок
СД	– сельсин-датчик
СТ	– сельсин-трансформатор
ФАР	– фазована антенна решітка
ФБС	– формувач бічних складових

- ФЧВ – фазочутливий випрямляч
- ФЧХ – фазочастотна характеристика
- ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач
- ЦКП – цифровий керуючий пристрій
- ЧД – частотний дискримінатор (детектор)
- ЧІМ – часово-імпульсна модуляція
- ШІМ – широтно-імпульсна модуляція

ПЕРЕДМОВА

Нині неможливо уявити собі будь-яку галузь науки, техніки та побуту людства без застосування систем автоматичного керування. Яскравими прикладами тріумфу автоматики можна вважати здійснення автоматичного польоту, посадки та роботи космічних зондів на Місяці, Венері і Марсі, а також поширення автоматичних систем стільникового зв'язку.

Навчальний посібник призначений для забезпечення навчальних дисциплін: “Теорія автоматичного управління”, “Основи автоматичного керування зенітного озброєння протиповітряної оборони Сухопутних військ”, “Системи автоматичного управління”. У ньому викладені основні положення класичної теорії лінійних неперервних систем автоматичного керування. Тому у виданні відсутні принципові та термінологічні розмежування між будь-якими напрямками підготовки бакалаврів та фахівців.

У першому розділі наведені загальні поняття автоматики та принципи побудови систем автоматичного керування (САК). У другому розділі розглядаються методи математичного опису неперервних САК у часовій та частотній областях, а також за допомогою перетворення Лапласа. Основна увага приділяється взаємозв'язку між різними методами подання математичних моделей динамічних систем та характеристиками систем, а також методиці визначення реакції системи на вхідне діяння. У третьому розділі дана класифікація елементарних ланок та наведені їх характеристики. Розглянуто деякі типові та немінимально-фазові ланки. Четвертий розділ присвячений правилам перетворення схем математичних моделей САК до типового вигляду та складання основних рівнянь системи. Важливим компонентом цього розділу є методика побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК. У п'ятому розділі розглядаються цифрові дискретні системи автоматичного керування. Наведені принципи побудови і особливості математичного опису цифрових систем автоматичного керування, що містять блоки дискретної та неперервної дії. Він має прикладну спрямованість, що дозволяє використовувати його при проведенні практичних занять, під час виконання бакалаврських робіт та при викладанні інших навчальних дисциплін щодо підготовки бакалаврів. Шостий розділ присвячений імпульсним системам автоматичного керування. Розглядаються види імпульсної модуляції та схеми математичних моделей імпульсних систем автоматичного керування. У дод. 1, 2 наведений довідковий матеріал з перетворення Лапласа та Z -перетворень.

Матеріал посібника викладений з урахуванням багаторічного досвіду викладання ряду навчальних дисциплін на кафедрі озброєння радіотехнічних військ університету.

1. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Будь-який технічний пристрій (агрегат, машина) призначений для виконання визначеного технічного процесу. Наприклад, автогенератор призначений для формування електричних коливань, двигун – для обертання навантаження, нагрівник – для нагрівання деякого об'єкта тощо.

Позначимо величину, що характеризує результат функціонування технічного пристрою, функцією $y(t)$ (для автогенератора це буде частота $f(t)$ або фаза $\varphi(t)$ електричних коливань, для двигуна – швидкість обертання $\Omega(t)$ або кут повороту $\beta(t)$ вала, для нагрівника – температура об'єкта). Природно, що внаслідок впливу ряду факторів, в основному – дії навколишнього середовища та особливостей функціонування пристрою, фактичний результат функціонування $y(t)$ буде відрізнятися від бажаного $y_0(t)$. Тому для усунення цієї невідповідності необхідно вживати спеціальних заходів. Одним з найбільш ефективних серед таких заходів є здійснення керування технічним пристроєм (рис. 1.1).

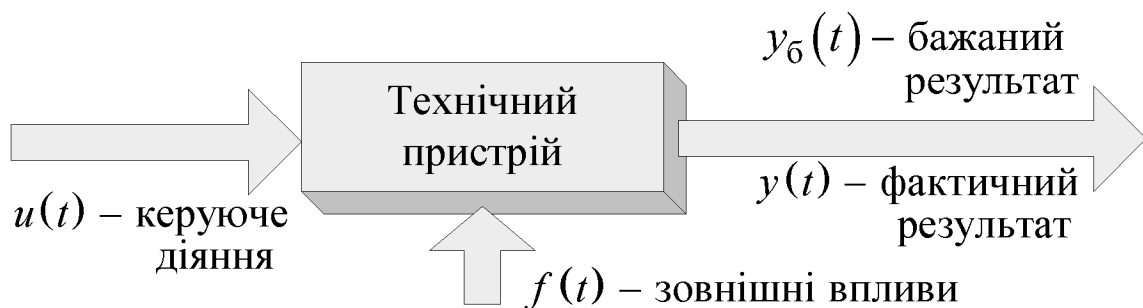


Рис. 1.1. Структура процесу керування технічним пристроєм

Керування – процес подачі на технічний пристрій спеціально організованих діянь (керуючих діянь), що спрямовані на одержання необхідного результату його функціонування незалежно від властивостей пристрою та впливу зовнішнього середовища.

За наявності керування технічний пристрій, над яким здійснюється керування, називають **об'єктом керування** (ОК) або керованим об'єктом, а величини $y(t)$ і $y_0(t)$ називають керованою величиною та її бажаним значенням відповідно.

Виділяють *три способи керування*:

- *ручне*, що здійснюється людиною-оператором без застосування технічних засобів;
- *автоматичне*, яке здійснюється спеціальним технічним засобом без участі людини-оператора;
- *автоматизоване*, що здійснюється людиною-оператором за допомогою спеціальних технічних засобів.

Далі будемо розглядати тільки автоматичне керування. При автоматичному керуванні між собою взаємодіють об'єкт керування і спеціальний технічний засіб, що формує керуюче діяння. Цей технічний засіб називають **автоматичним керуючим пристроєм** (АКП).

Сукупність взаємодіючих між собою та із зовнішнім середовищем об'єкта керування й автоматичного керуючого пристрою (рис. 1.2) називають **системою автоматичного керування** (САК).

Як відомо, поняття системи охоплює сукупність об'єктів, що поводитья як щось цілісне та характеризується новими властивостями у порівнянні з властивостями окремих компонентів. Такою новою властивістю системи автоматичного керування є здатність змінювати вихідну величину $y(t)$ у відповідності до бажаного значення $y_0(t)$ завдяки взаємодії АКП та об'єкта керування.

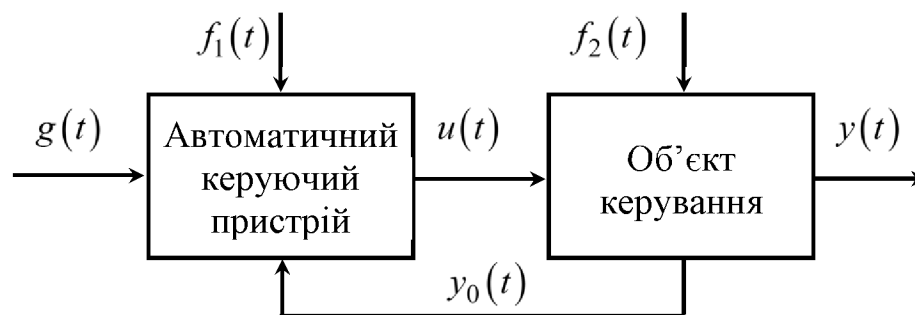


Рис. 1.2. Узагальнена структура САК

Об'єкти, що не входять до складу системи, називаються зовнішніми і створюють середовище, в якому існує система.

Усі об'єкти системи та середовища об'єднані між собою причинно-наслідковими зв'язками. Причинно-наслідкові зв'язки – це зв'язки, що відбуваються у часі в одному напрямку – від минулого до майбутнього. Вони є необхідною умовою існування усіх без винятку матеріальних об'єктів. Системи з причинно-наслідковими зв'язками між об'єктами та середовищем називаються **динамічними системами**. Таким чином, системи автоматичного керування є одним із різновидів динамічних систем.

Зв'язки між елементами САК і зовнішнім середовищем здійснюються за допомогою діянь (впливів). Діяння, за допомогою яких здійснюються зв'язки між частинами САК, називають внутрішніми. Діяння (впливи), за допомогою

яких здійснюються зв'язки між САК і зовнішнім середовищем, називають зовнішніми. Діяння (впливи), що прикладаються до САК або до її елемента, називають вхідними, а діяння, що виходять із САК або з її елемента, називають вихідними.

Вихідним діянням САК є керована величина $y(t)$, що характеризує фактичний хід технічного процесу.

Відзначимо, що бажане значення керованої величини $y_0(t)$ може або формуватись усередині АКП, або надходити ззовні у вигляді вхідного **задавального діяння** $g(t)$ (рис. 1.2). Зовнішніми є також і **заважаючі впливи** $f_1(t)$ та $f_2(t)$, що можуть призводити до порушення нормального функціонування системи (рис. 1.2).

Якщо в АКП під час формування керуючого діяння застосовується інформація не тільки про бажаний хід технічного процесу, а й про його фактичний хід, то з об'єкта керування на автоматичний керуючий пристрій подається **контрольна величина** $y_0(t)$, яка характеризує результат функціонування системи. У більшості випадків як контрольна величина застосовується керована величина, тобто $y_0(t) = y(t)$.

1.2. ВИДИ АЛГОРИТМІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Алгоритмом функціонування САК називають сукупність правил (розпоряджень), що визначають бажаний хід технічного процесу.

Виділяють такі види алгоритмів функціонування САК:

- алгоритм стабілізації;
- алгоритм програмного керування;
- алгоритм слідування.

Алгоритм стабілізації містить розпорядження підтримувати керовану величину незмінною. У загальному випадку бажане значення керованої величини системи, в якій реалізується алгоритм стабілізації, може бути записане у такому вигляді:

$$y_0(t) = g_0 = \text{const} . \quad (1.1)$$

Алгоритм програмного керування містить розпорядження змінювати керовану величину відповідно до заздалегідь визначеного закону. У загальному випадку бажане значення керованої величини системи, в якій реалізується алгоритм програмного керування, може бути записане у такому вигляді:

$$y_0(t) = g_0(t) , \quad (1.2)$$

де $g_0(t)$ – відома функція часу.

Алгоритм слідування містить розпорядження змінювати керовану величину відповідно до задавального діяння, закон зміни якого заздалегідь невідомий. У загальному випадку бажане значення керованої величини системи, в якій реалізується алгоритм слідування, може бути записано у такому вигляді:

$$y_0(t) = g(t), \quad (1.3)$$

де $g(t)$ – довільна функція часу.

Відповідно до виду алгоритму функціонування, за яким здійснюється керування, системи автоматичного керування поділяють на системи стабілізації, системи програмного керування і сліdkуючі системи.

Прикладами систем стабілізації є стабілізатори напруги та струму, системи стабілізації частоти коливань в автогенераторах, системи стабілізації кутової швидкості обертання вала двигуна, системи підтримки постійної температури (термостати, кондиціонери, холодильники) та ін. До систем програмного керування належать, наприклад, системи розгону та гальмування двигунів, переведення стрілок залізничної колії та ін. Типовими прикладами сліdkуючих систем є системи автоматичного підстроювання частоти та системи фазової синхронізації електричних коливань генераторів, що застосовуються в багатьох радіотехнічних пристроях, системах передачі даних, енергетичних установках та ін.

1.3. ПРИНЦИПИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Принципи автоматичного керування визначають, на підставі якої інформації формується керуюче діяння. Виділяють три основні принципи керування:

- пряме керування;
- компенсація заважаючого впливу;
- керування зі зворотним зв'язком.

Принцип прямого керування полягає у використанні для формування керуючого діяння інформації тільки про бажане значення керованої величини.

У цьому випадку керуюче діяння є функцією бажаного значення керованої величини

$$u(t) = A\{y_{\text{пр}}(t)\}. \quad (1.4)$$

У складі автоматичного керуючого пристрою САК, що реалізує принцип прямого керування, можна виділити (рис. 1.3):

- задавальний блок (ЗБ), що формує бажане значення керованої величини;

- підсилювально-перетворювальний блок (ППБ), що здійснює необхідні підсилення та перетворення сигналу;
- виконавчий блок (ВБ), що безпосередньо формує керуюче діяння.

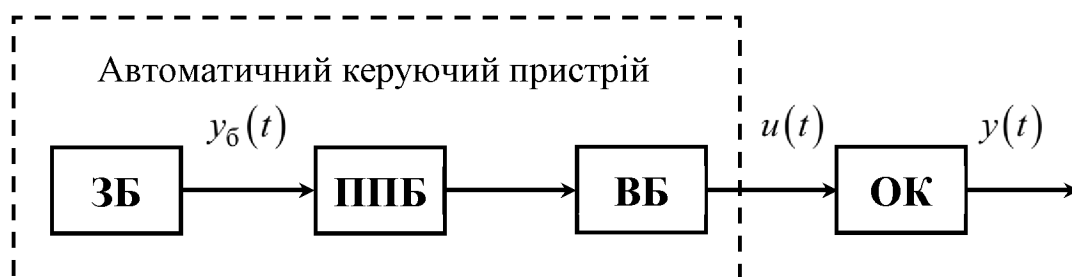


Рис. 1.3. Структура САК з прямим керуванням при формуванні задавального діяння в АКП

Інформація про бажане значення керованої величини може також надходити до системи ззовні у вигляді задавального діяння $g(t)$. Тоді керуюче діяння є функцією задавального діяння

$$u(t) = A\{g(t)\}, \quad (1.5)$$

а до складу АКП замість задавального блока входить сприймальний блок (СБ). Цей блок виділяє задавальне діяння із зовнішнього середовища та фіксує його величину (рис. 1.4). Зазвичай СБ являє собою датчик певної величини – температури, вологості, швидкості обертання та ін.



Рис. 1.4. Структура САК з прямим керуванням при надходженні задавального діяння ззовні

У системах, що реалізують принцип прямого керування, не використовується інформація про фактичний хід технічного процесу (про те, як об'єкт дійсно функціонує). Тому, якщо нормальне функціонування об'єкта керування порушують заважаючі впливи, а також якщо властивості об'єкта з часом змінюються або не цілком відомі, таке керування може виявитися неефективним.

Принцип компенсації полягає у використанні для формування керуючого діяння інформації про заважаючий вплив, що діє на об'єкт керування.

У цьому випадку алгоритм керування має такий загальний вигляд:

$$u(t) = A\{f(t)\}. \quad (1.6)$$

Сутність цього принципу полягає в тому, щоб за допомогою керуючого діяння усунути порушення роботи об'єкта, обумовлені дією на нього заважаючого впливу.

Структура САК, у якій реалізований принцип компенсації, зображена на рис. 1.5. Сприймальний блок (датчик) формує сигнал $F[f(t)]$, величина якого визначається величиною заважаючого впливу. Підсилювально-перетворювальний і виконавчий блоки виконують такі самі функції, що й у розглянутому вище принципі прямого керування.

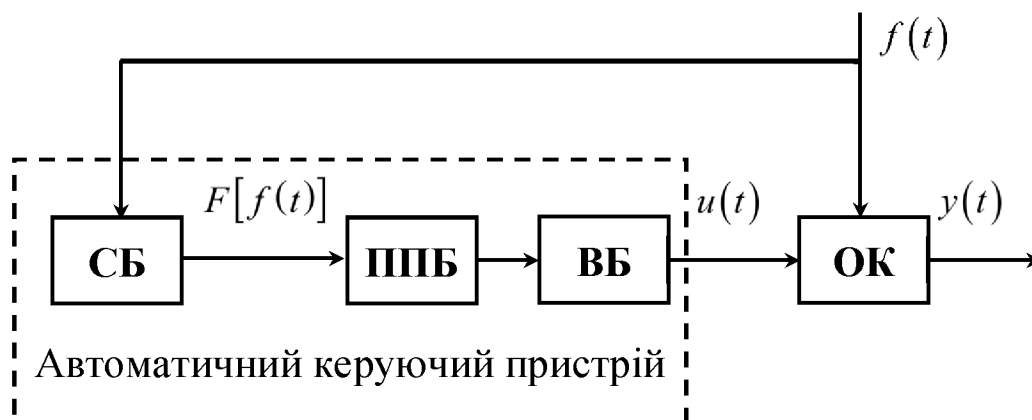


Рис. 1.5. Структура САК, у якій реалізований принцип компенсації заважаючого діяння

Цей принцип можна реалізувати лише тоді, коли заважаючий вплив, що діє на об'єкт керування, доступний для вимірювання.

У САК, що реалізують принцип компенсації, також не використовується інформація про фактичний хід технічного процесу. Тому, якщо на об'єкт керування діють інші (не вимірювані) заважаючі впливи, а також якщо властивості об'єкта за будь-яких обставин змінюються або не цілком відомі, таке керування може виявитися неефективним.

Принцип зворотного зв'язку в загальному випадку полягає у використанні для формування керуючого діяння інформації про бажаний і про фактичний хід технічного процесу:

$$u(t) = A\{y_6(t), y_0(t)\}, \quad (1.7)$$

де $y_0(t)$ – контрольна величина.

Якщо $y_0(t) = y(t)$, тобто як контрольна застосовується вихідна величина системи, то зазвичай цей принцип реалізується у вигляді **керування за помилкою**:

$$u(t) = A\{\varepsilon(t)\}, \quad (1.8)$$

де

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} y_0(t) - y(t), \\ g(t) - y(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

– помилка системи, яка є різницею або між бажаним значенням керованої величини $y_0(t)$, або між відповідним зовнішнім задавальним діянням $g(t)$ та фактичним значенням керованої величини $y(t)$.

Структура САК, в якій реалізоване керування за помилкою, зображена на рис. 1.6. Для вимірювання величини помилки до складу автоматичного керуючого пристрою вводять порівнювальний блок (ПБ). Він являє собою сукупність датчиків та (або) інших елементів, що виділяють сигнал $F[\varepsilon(t)]$, величина якого залежить від величини помилки системи. Підсилювально-перетворювальний і виконавчий блоки виконують такі самі функції, що й у розглянутих вище принципах керування.



Рис. 1.6. Структура САК з керуванням за помилкою

Алгоритм роботи автоматичного керуючого пристрою будується таким чином, щоб формоване ним керуюче діяння було спрямоване на усунення помилки, що виникає в системі, незалежно від причини її виникнення (дії заважаючих впливів, зміни характеристик об'єкта й ін.).

Розглянемо найпростіший приклад, який наочно демонструє можливості принципу керування за помилкою. Нехай вихідна величина об'єкта керування залежить від керуючого та заважаючого діянь, і ця залежність визначається виразом

$$y(t) = k_1 \cdot u(t) + k_2 \cdot f(t),$$

де k_1, k_2 – коефіцієнти передачі (підсилення) об'єкта за відповідними діями.

Нехай АКП формує керуюче діяння

$$u(t) = k_a \cdot \varepsilon(t) = k_a [g(t) - y(t)],$$

яке пропорційне помилці системи (k_a – коефіцієнт підсилення АКП).

Тоді, як нескладно встановити, помилка системи буде дорівнювати

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + k_a \cdot k_1} g(t) - \frac{k_2}{1 + k_a \cdot k_1} f(t).$$

Отже, шляхом встановлення достатньо великого коефіцієнта підсилення АКП k_a можна досягти скільки завгодно малої помилки системи незалежно від величин задавального діяння, заважаючого впливу та характеристик об'єкта (значень коефіцієнтів k_1, k_2).

Така властивість принципу зворотного зв'язку обумовила його найбільше поширення для побудови автоматичних систем.

Недоліком систем, у яких реалізується принцип зворотного зв'язку, є проблеми, обумовлені інерційністю пристроїв, увімкнених між порівнювальним блоком і виходом системи. Інерційність призводить до запізнювання і, внаслідок цього, до неадекватності реакції системи на величину поточної помилки. При достатньо великій інерційності може виникнути повне порушення нормального функціонування системи.

На практиці широко застосовується також *комбіноване керування*, яке є поєднанням розглянутих вище принципів. Залежно від того, яка інформація використовується для формування керуючого діяння, можливі різні варіанти комбінованого керування. Наприклад, на рис. 1.7 зображена функціональна структура САК, в якій реалізоване керування за помилкою та з компенсацією заважаючого впливу.

Відзначимо, що залежно від того, чи використовується контрольна величина $y_0(t)$ для формування керуючого діяння, САК поділяють на системи з розімкненим контуром діянь (*розімкнені САК*) і системи із замкненим контуром діянь (*замкнені САК*). Відповідно до викладеного вище розімкненими є такі системи, у яких реалізуються принципи прямого керування та компенсації, а замкненими є системи, в яких застосовується принцип зворотного зв'язку.

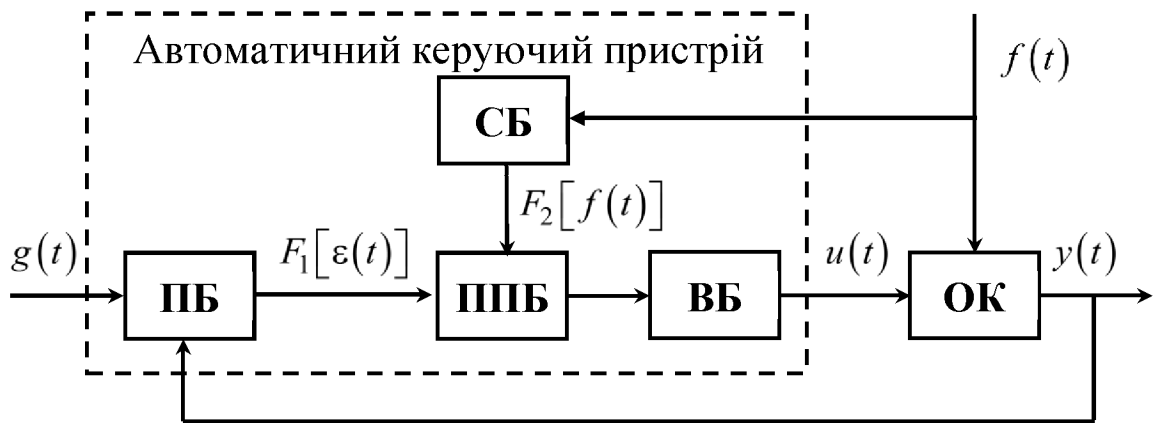


Рис. 1.7. Структура САК з комбінованим керуванням

1.4. ВИДИ ДІЯНЬ У САК. КЛАСИФІКАЦІЯ САК ЗА ВИДАМИ ДІЯНЬ

За характером зміни у часі діяння (впливи) поділяються на неперервні та переривчасті.

Діяння називається *неперервним*, якщо воно існує протягом усього інтервалу часу керування (рис. 1.8, а). Величина неперервного діяння визначається або безпосередньо його значенням (наприклад кут повороту вала, момент сил опору), або значенням якогось параметра неперервного сигналу, що містить інформацію про діяння (наприклад амплітуда, частота або фаза напруги змінного струму).

Системи автоматичного керування, в яких усі діяння є неперервними, називають *системами неперервної дії* або *неперервними САК*.

Для математичного опису неперервних діянь та систем застосовується математичний апарат функцій неперервного аргументу – часу t .

Діяння називається *переривчастим*, якщо воно існує протягом деяких інтервалів часу $(t_0, t_0 + \Delta t_0)$, $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$, ..., $(t_n, t_n + \Delta t_n)$, розділених паузами (рис. 1.8, б).

Системи, в яких є часові паузи в контурі передачі діянь, називають *системами переривчастої дії*. Різновидами таких систем є імпульсні та цифрові САК.

В імпульсних САК застосовуються модульовані імпульсні послідовності – послідовності імпульсів, у яких інформація про величину діяння міститься в одному з її параметрів – амплітуді, тривалості імпульсів, часовому зсуві щодо деякої опорної послідовності імпульсів та ін. До складу таких систем входять імпульсні модулятори (перетворювачі) та демодулятори (відновлювачі).

У цифрових САК величина діянь визначається числовими значеннями послідовності кодових слів. Складовими частинами цифрових САК є мікропроцесор або електронна обчислювальна машина.

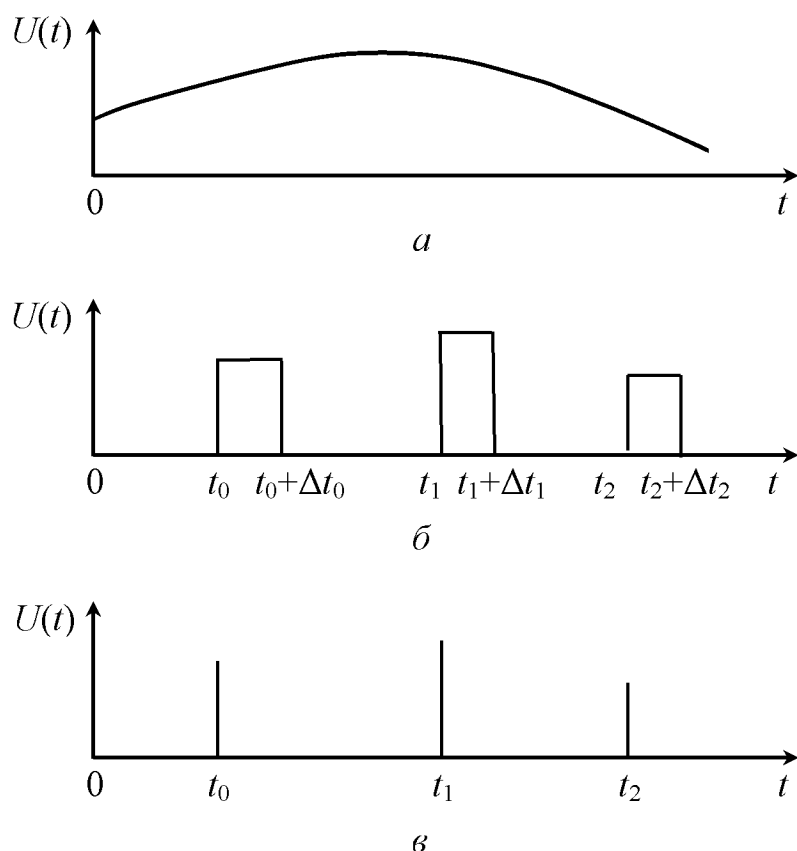


Рис. 1.8. Види діянь: *a* – неперервне діяння, *б* – переривчасте діяння, *в* – дискретне діяння

У більшості систем переривчастої дії на інтервалі часу, протягом якого існують діяння, вони або не змінюються, зафіксовані (це відбувається при використанні імпульсних послідовностей і послідовностей цифрових кодів), або змінюються настільки несуттєво, що можуть вважатися постійними. У зв'язку з цим для спрощення математичного опису таких переривчастих діянь їх заміняють ідеальними діяннями, визначеними в дискретні моменти часу, які відносять, наприклад, до моментів початку кожного інтервалу існування переривчастого діяння. Діяння, значення яких визначені в дискретні моменти часу, називають **дискретними** (рис. 1.8, *в*).

Системи переривчастої дії, в яких усі діяння можуть розглядатися як дискретні, називають **системами дискретної дії** або **дискретними САК**. Для математичного опису дискретних діянь та систем використовують математичний апарат функцій дискретного аргументу – так званих гратчастих функцій часу.

На практиці широко застосовуються системи, в яких частина діянь описується функціями неперервного аргументу, а інша частина – функціями дискретного аргументу. Такі системи називають *дискретно-неперервними*. До дискретно-неперервних належать, наприклад, системи керування об'єктами неперервної дії, до складу АКП яких входять мікропроцесори, а також аналого-цифрові та цифро-аналогові перетворювачі.

У межах цього посібника будуть розглядатися лише системи неперервної дії.

1.5. ФУНКЦІОНАЛЬНІ СТРУКТУРИ ТА ПРИНЦИПИ ДІЇ ТИПОВИХ САК

1.5.1. Система автоматичної стабілізації частоти електричних коливань автогенератора

Як відомо, частота електричних коливань, що формуються на виході автогенератора (АГ), визначається за формулою

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (1.10)$$

де L – загальна індуктивність;

C – загальна ємність параметрів коливального контуру автогенератора.

Значення параметрів коливального контуру, а відповідно й частоти коливань вихідної напруги АГ, залежать від значної кількості факторів – температури середовища, стабільності параметрів елементної бази, стабільності джерел живлення тощо. Для усунення впливу заважаючих факторів на частоту коливань АГ застосовують спеціальні заходи: термостатування, параметричну стабілізацію, а також системи автоматичної стабілізації частоти.

Система автоматичної стабілізації частоти (АСЧ) призначена для усунення відхилень частоти коливань автогенератора від номінального значення. Алгоритм її функціонування визначається виразом

$$f_6(t) = f_0 = \text{const}, \quad (1.11)$$

де f_0 – номінальне значення частоти коливань.

Один з найпростіших варіантів побудови системи АСЧ зображений на рис. 1.9. У системі реалізований принцип керування за помилкою. Об'єктом керування є автогенератор G , порівнювальним блоком є частотний дискримінація (детектор) UI , підсилювально-перетворювальний блок

виконаний на операційному підсилювачі A та резисторах $R1, R2, R3$, а виконавчим блоком (елементом керування) є варикап VD .

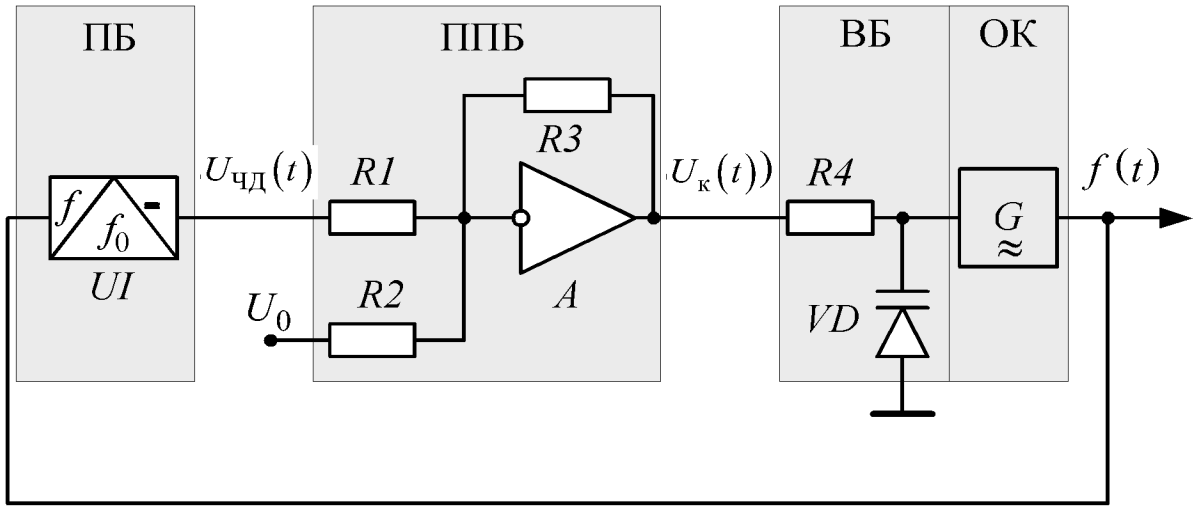


Рис. 1.9. Функціональна схема системи стабілізації частоти

Як відомо, варикап є напівпровідниковим діодом, ємність C_V закритого $p-n$ переходу якого визначається величиною керуючої напруги U_k . Залежність ємності C_V від напруги U_k називається **вольт-фарадною характеристикою** варикапа (рис. 1.10, *a*).

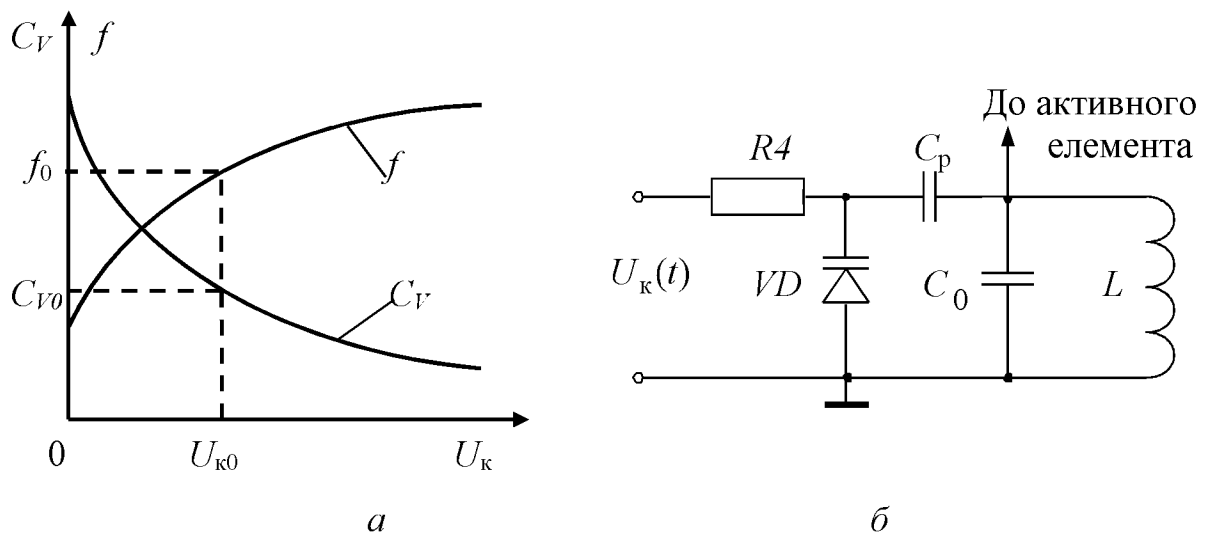


Рис. 1.10. Робота системи стабілізації частоти:
a – вольт-фарадна та регульовальна характеристики АГ;
б – схема підключення варикапа до коливального контуру АГ

Варикап підключається до коливального контуру автогенератора за схемою, наведеною на рис. 1.10, б ($R4$ – обмежувальний резистор, C_p – розподільний конденсатор, призначений для того, щоб керуюча напруга не була замкненою на масу).

При $C_p \gg C_V$ загальна ємність контуру $C = C_0 + C_V$, і тому частота коливань сигналу на виході АГ стає залежною від величини керуючої напруги. Відповідна залежність називається **регулювальною характеристикою** АГ (рис. 1.10, а).

Поблизу робочої точки $(U_{к0}, f_0)$ можна вважати, що частота коливань АГ $f(t)$ змінюється залежно від значення керуючої напруги за законом

$$f(t) = f_0 + K_{\Gamma} \cdot \Delta U_{\kappa}(t), \quad (1.12)$$

де $K_{\Gamma} = \left. \frac{df}{dU_{\kappa}} \right|_{f=f_0, U_{\kappa}=U_{\kappa 0}}$ – крутість регулювальної характеристики АГ у робочій точці, Гц/В;

$\Delta U_{\kappa}(t) = U_{\kappa}(t) - U_{\kappa 0}$ – відхилення керуючої напруги від номінального значення.

У початковому стані до варикапа прикладається тільки напруга $U_{\kappa 0}$, яка задається напругою U_0 на другому вході операційного підсилювача (див. рис. 1.9). Підбираючи значення напруги, встановлюють номінальне значення ємності варикапа C_{V0} , при якій частота коливань АГ дорівнює бажаному значенню f_0 .

З часом під впливом дестабілізуючих факторів – зміни температури, величини напруги живлення частота коливань АГ $f(t)$ буде відхилятися від бажаного значення f_0 , тобто виникне частотне неузгодження $\Delta f(t)$ між дійсним та бажаним значеннями частоти коливань:

$$\Delta f(t) = f(t) - f_0. \quad (1.13)$$

Для вимірювання частотного неузгодження застосовується частотний дискримінатор ЧД, позначений на рис. 1.9 як блок UI . Він являє собою радіотехнічний пристрій, на виході якого створюється напруга постійного струму $U_{\text{ЧД}}$, значення якої залежить від величини та знака неузгодження Δf .

Типова **статична характеристика** ЧД – залежність вихідної напруги $U_{\text{ЧД}}$ від неузгодження Δf – зображена на рис. 1.11. Вона має лінійний відрізок поблизу початку координат, і тому при достатньо малих величинах Δf можна вважати, що

$$U_{\text{ЧД}}(t) = K_{\text{ЧД}} \Delta f(t), \quad (1.14)$$

де $K_{\text{ЧД}} = \left. \frac{dU_{\text{ЧД}}}{d\Delta f} \right|_{\Delta f=0}$ – крутість статичної характеристики ЧД, В/Гц.

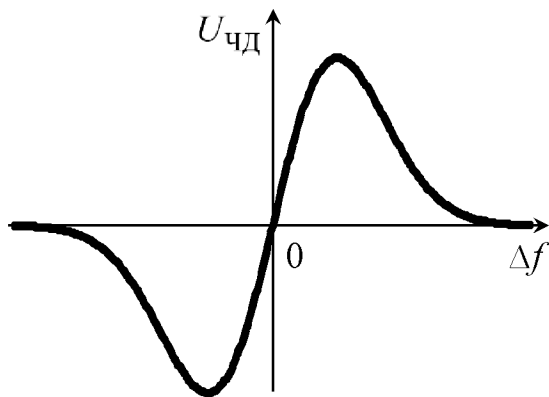


Рис. 1.11. Статична характеристика ЧД

Отже, при виникненні неузгодження до напруги $U_{\text{к0}}$ буде додаватись напруга

$$\Delta U_{\text{к}}(t) = -K_{\text{п}} \cdot U_{\text{ЧД}}(t), \quad (1.15)$$

де $K_{\text{п}} = \frac{R3}{R1}$ – коефіцієнт підсилення операційного підсилювача (див. рис. 1.9).

При незначних неузгодженнях з урахуванням (1.14) керуюча напруга

визначається виразом

$$\Delta U_{\text{к}}(t) = -K_{\text{п}} \cdot K_{\text{ЧД}} \cdot \Delta f(t), \quad (1.16)$$

тобто пропорційна значенню неузгодження $\Delta f(t)$. Внаслідок дії цієї напруги ємність варикапа буде змінюватись таким чином, що відхилення частоти коливаний вихідної напруги АГ від бажаного значення f_0 буде зменшуватись.

Нехай, наприклад, з деяких причин частота коливаний АГ f стала більшою за номінальне значення f_0 , тобто виникло початкове неузгодження $\Delta f_{\text{поч}} > 0$. Тоді на виході ЧД виникне напруга $U_{\text{ЧД}} > 0$, внаслідок чого до напруги $U_{\text{к0}}$ буде додана величина $\Delta U_{\text{к}}(t) < 0$, і частота коливаний АГ зменшиться, отже, початкове неузгодження буде усунуте.

Можна довести, що остаточне неузгодження $\Delta f_{\text{ост}}$ буде визначатись виразом

$$\Delta f_{\text{ост}} = \frac{\Delta f_{\text{поч}}}{1 + K_{\text{п}} \cdot K_{\text{ЧД}} \cdot K_{\text{Г}}}. \quad (1.17)$$

При достатньо великому коефіцієнті підсилення розімкненої системи $K_{\text{р}} = K_{\text{п}} \cdot K_{\text{ЧД}} \cdot K_{\text{Г}}$ остаточне неузгодження буде суттєво меншим за початкове. Отже, система АСЧ ефективно усуває відхилення частоти коливаний АГ від бажаного значення незалежно від причин, з яких вони виникли.

1.5.2. Система регулювання швидкості обертання вала двигуна

Спрощена функціональна схема системи регулювання швидкості обертання вала двигуна наведена на рис. 1.12. Система складається з

потенціометра $R1$, підсилювача потужності $A2$, двигуна постійного струму M , тахогенератора TG та підсумовувального підсилювача, до складу якого входять операційний підсилювач $A1$ з резисторами $R2, R3, R4$. У системі реалізований принцип керування за помилкою.

Потенціометр $R1$ є задавальним блоком системи. Необхідна швидкість обертання Ω_0 вала двигуна визначається напругою $U_{\Omega 0}$, яка залежить від кута повороту движка $R1$.

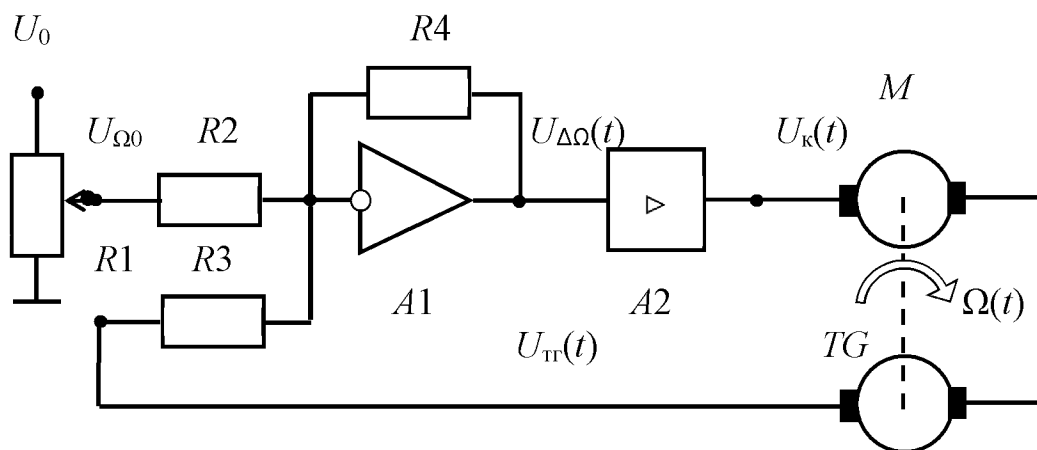


Рис. 1.12. Функціональна схема системи регулювання швидкості обертання вала двигуна

Контрольна величина, що характеризує фактичне значення швидкості обертання $\Omega(t)$ вала двигуна M , створюється за допомогою тахогенератора TG – малопотужного генератора постійного струму. Його якір механічно з'єднаний з вихідним валом двигуна, і тому вихідна напруга тахогенератора пропорційна швидкості обертання вала двигуна

$$U_{Tr}(t) = k_{Tr} \cdot \Omega(t), \quad (1.18)$$

де k_{Tr} – коефіцієнт передачі (підсилення) тахогенератора.

Напруга, створювана тахогенератором, подається на вхід підсумовувального підсилювача зі зворотним знаком по відношенню до задавальної напруги $U_{\Omega 0}$. Тому керуюча напруга $U_k(t)$, що подається на якір двигуна, дорівнює

$$U_k(t) = k_{п} \cdot \left(\frac{R4}{R2} U_{\Omega 0} - \frac{R4}{R3} U_{Tr}(t) \right) = k_{п} \cdot \left(\frac{R4}{R2} U_{\Omega 0} - k_{Tr} \frac{R4}{R3} \Omega(t) \right), \quad (1.19)$$

де $k_{п}$ – коефіцієнт підсилення підсилювача потужності.

Отже, керуюча напруга, а тому й струм якоря двигуна, залежать від швидкості обертання вала двигуна. Якщо, наприклад, з будь-яких причин (зміна навантаження та ін.) швидкість обертання вала двигуна зменшилася, то керуюча напруга зросте, що призведе до зростання швидкості обертання вала двигуна. Таким чином у системі здійснюється стабілізація швидкості обертання вала двигуна.

1.5.3. Електромеханічна слідкуюча система

Електромеханічна слідкуюча система (ЕМСС) призначена для розвороту вала об'єкта відповідно до величини кута повороту задавального вала.

Задавальна величина – кут повороту задавального вала $\alpha(t)$ – може бути довільною. У результаті здійснення процесу керування вихідна величина – кут повороту вала об'єкта $\beta(t)$ – повинна наближатися до задавальної величини, тобто неузгодження (помилка системи) між задавальною і керованою величинами

$$\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t) \quad (1.20)$$

повинно бути усунене.

Такі системи, як й інші слідкуючі системи, будують із застосуванням принципу керування за помилкою (відхиленням).

Структурна схема одного з варіантів ЕМСС зображена на рис. 1.13.

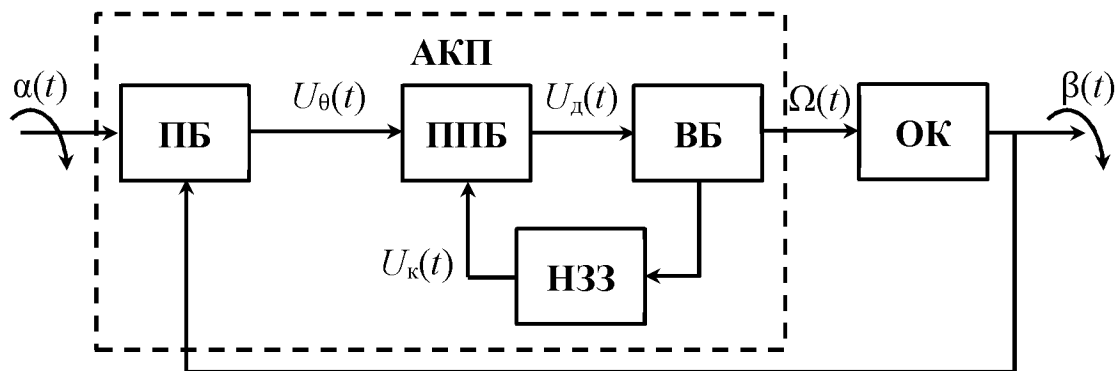


Рис. 1.13. Структурна схема електромеханічної слідкуючої системи

- Основні функціональні блоки електромеханічної слідкуючої системи:
- порівнювальний блок (ПБ), що формує напругу $U_\theta(t)$, яка залежить від величини кутового неузгодження $\theta(t)$;
 - підсилювально-перетворювальний блок (ППБ), у якому формується напруга $U_d(t)$, що подається на якір двигуна;

– виконавчий блок (ВБ), яким є електричний двигун постійного струму з редуктором;

– контур негативного зворотного зв'язку (НЗЗ), в якому здійснюється формування напруги корекції $U_k(t)$.

Розглянемо роботу ЕМСС у деяких типових режимах. З метою спрощення пояснень будемо вважати, що вхідні та вихідні величини окремих блоків пов'язані між собою рівняннями пропорційного зв'язку, а контур НЗЗ відключено.

Робота ЕМСС при усуненні початкового неузгодження

Нехай перед вмиканням системи існувало початкове неузгодження $\theta_0 = \alpha_0 - \beta_0$ між задавальним та вихідним валами. Тоді після вмикання системи на виході БП виникає сигнал помилки

$$U_\theta(t) = K_{\text{ПБ}} \cdot \theta(t). \quad (1.21)$$

Він підсилюється у ППБ до величини

$$U_d(t) = K_{\text{ППБ}} U_\theta = K_{\text{ПБ}} \cdot K_{\text{ППБ}} \theta(t), \quad (1.22)$$

де $K_{\text{ПБ}}$, $K_{\text{ППБ}}$ – коефіцієнти підсилення порівнювального та підсилювально-перетворювального блоків.

Напруга $U_d(t)$ подається на якір виконавчого двигуна, внаслідок чого він починає обертатися. Виконавчий двигун через редуктор повертає вал об'єкта керування ОК. Як видно з виразу (1.22), вихідний вал буде обертатися, доки існує напруга $U_d(t)$, тобто доки помилка системи не встановиться рівною нулю: $\theta_{\text{уст}} = 0$. Отже, внаслідок роботи системи початкове неузгодження буде повністю усунуте, і вихідний вал повернеться в положення $\beta_{\text{уст}} = \alpha_0$, яке дорівнює початковому значенню кута повороту задавального вала (рис. 1.14).

Відзначимо, що внаслідок інерційності процесів у колі живлення якоря двигуна та інерційності мас, що обертаються, потрібен деякий час на усунення початкового неузгодження – **час регулювання** t_p .

Характер процесу регулювання (монотонний або коливальний) суттєво залежить від величини коефіцієнта підсилення ППБ, а також від структури та параметрів контуру НЗЗ. Зі збільшенням коефіцієнта підсилення ППБ швидкодія системи зростає. Однак при цьому накопичується велика надлишкова енергія в інерційних електричних та механічних частинах системи, внаслідок чого виникає її подальший перерозподіл між цими частинами. Протягом часу згасання надлишкової енергії перехідний процес у системі має коливальний характер. Якщо ж умови, які необхідні для згасання

надлишкової енергії, не виконуються, то в системі виникають автоколивання зі зростанням амплітуди – система стає нестійкою.

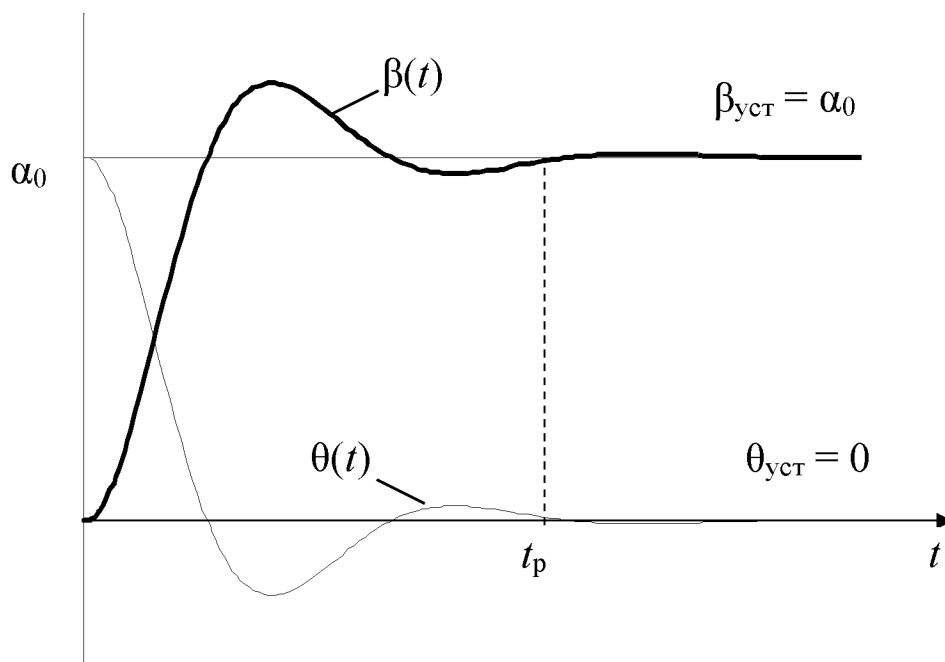


Рис. 1.14. Перехідна характеристика ЕМСС

Для зменшення запасів надлишкової енергії в таких системах здійснюється **корекція** керуючого діяння на підставі детального врахування характеру процесів у найбільш інерційних блоках. З цією метою до складу контуру НЗЗ вводять спеціальні датчики, які вимірюють величини похідних діянь у найбільш інерційних блоках, і фільтри, за допомогою яких здійснюється формування необхідного закону зміни величини коректуючого діяння $U_k(t)$. Коректуюче діяння з виходу контуру НЗЗ додається до сигналу помилки в ППБ і усуває надмірне накопичення надлишкової енергії.

Робота ЕМСС при обертанні задавального вала з постійною швидкістю

Нехай задавальний вал приведений в обертання з постійною кутовою швидкістю $\alpha' = \Omega_0$. У цьому випадку внаслідок інерційності двигуна та об'єкта керування вихідний вал спочатку буде запізнюватись відносно задавального, і тому виникне кутове неузгодження $\theta(t)$. Однак через деякий час усталена швидкість обертання вихідного вала буде дорівнювати швидкості обертання задавального вала, тобто буде виконуватись умова

$$\beta'_{уст} = \Omega_{уст} = \Omega_0, \quad (1.23)$$

а між валами буде існувати постійна кутова помилка $\theta_{уст}$ (рис. 1.15).

Усталена швидкість обертання вихідного вала пропорційна величині напруги на якорі двигуна:

$$\Omega_{\text{уст}} = K_{\text{д}} \cdot K_{\text{ред}} \cdot U_{\text{д}}, \quad (1.24)$$

де $K_{\text{д}}$, $K_{\text{ред}}$ – коефіцієнти підсилення (передачі) виконавчого двигуна та редуктора.

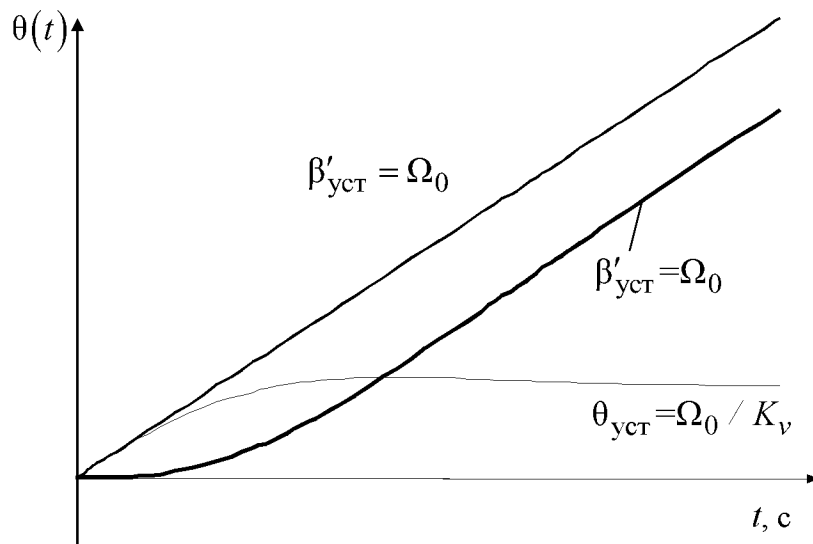


Рис. 1.15. Залежність кутової помилки від швидкості обертання вала

З урахуванням залежності (1.22) величини напруги на якорі від сигналу помилки отримуємо, що

$$\Omega_{\text{уст}} = K_{\text{д}} \cdot K_{\text{ред}} \cdot K_{\text{ПБ}} \cdot K_{\text{ППБ}} \theta = K_{\text{v}} \cdot \theta_{\text{уст}}, \quad (1.25)$$

де $K_{\text{v}} = K_{\text{д}} \cdot K_{\text{ред}} \cdot K_{\text{ПБ}} \cdot K_{\text{ППБ}}$ – загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи.

З аналізу виразів (1.23), (1.25) можна зробити висновок, що кутове неузгодження між задавальним та вихідним валами дорівнює

$$\theta_{\text{уст}} = \Omega_0 / K_{\text{v}}. \quad (1.26)$$

Отже, для зменшення величини усталеної помилки необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи K_{v} .

Робота ЕМСС при обертанні задавального вала за гармонічним законом

Якщо задавальний вал обертається за гармонічним законом, то варто очікувати, що:

а) при малих частотах коливань вихідний вал буде встигати за рухом задавального вала, і тому амплітуди та фази коливань обох валів будуть збігатися;

б) при зростанні частоти коливань вихідний вал внаслідок інерційності двигуна та об'єкта керування буде все більше запізнюватись за кутовим положенням по відношенню до задавального вала;

в) можливе існування області частот, в якій система має резонансні властивості, коли амплітуда вихідних коливань перевищує амплітуду коливань задавального вала;

г) при великих частотах обертання вихідний вал не встигає за рухом задавального вала, і тому амплітуда його коливань буде суттєво меншою за амплітуду коливань задавального вала.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення поняття “керування”.
2. Які способи керування існують? У чому їх відмітність?
3. Дайте визначення поняття “автоматичний керуючий пристрій”.
4. Дайте визначення поняття “система автоматичного керування”.
5. Дайте визначення поняття “динамічна система”.
6. Дайте характеристику основних видів діянь: задавального, заважаючого, керуючого, контрольного.
7. Дайте визначення поняття “алгоритм функціонування системи автоматичного керування”.
8. У чому суть алгоритму стабілізації?
9. У чому суть алгоритму програмного керування?
10. У чому суть алгоритму слідкування?
11. Дайте визначення поняття “принцип автоматичного керування”.
12. Дайте характеристику принципу прямого керування. Наведіть структуру системи автоматичного керування, що реалізує цей принцип, та вкажіть призначення її функціональних блоків.
13. Дайте характеристику принципу компенсації заважаючого діяння. Наведіть структуру системи автоматичного керування, що реалізує цей принцип, та вкажіть призначення її функціональних блоків.
14. Дайте характеристику принципу зворотного зв'язку та керування за помилкою. Наведіть структуру системи автоматичного керування, що здійснює керування за помилкою, та вкажіть призначення її функціональних блоків.
15. У чому суть принципу комбінованого керування?

16. Які системи автоматичного керування називають розімкненими?
17. Які системи автоматичного керування називають замкненими?
18. Наведіть функціональну схему та поясніть принцип дії системи автоматичної стабілізації частоти автогенератора.
19. Наведіть функціональну схему та поясніть принцип дії системи регулювання швидкості обертання двигуна.
20. Наведіть структурну схему та поясніть принцип дії електромеханічної слідкуючої системи.
21. Поясніть роботу електромеханічної слідкуючої системи при усуненні початкового неузгодження.
22. Поясніть роботу електромеханічної слідкуючої системи при обертанні задавального вала з постійною швидкістю.
23. Поясніть роботу електромеханічної слідкуючої системи при обертанні задавального вала за гармонічним законом.

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1. ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Математичною моделлю САК називається сукупність співвідношень та (або) правил, які пов'язують між собою функції, що описують вхідні величини, і функції, що описують вихідні величини системи.

Основою для отримання математичної моделі є закони фізики, що визначають принципи роботи окремих функціональних блоків, або математичні операції, що виконуються під час перетворення діянь у функціональних блоках. Тому математична модель САК складається із сукупності моделей всіх функціональних блоків, які входять до складу системи.

Окремі функціональні блоки і САК у цілому є *динамічними системами* – системами, в яких усі події (процеси) відповідають принципу причинності: реакція (наслідок) не може виникнути раніше вхідного діяння (причини), що викликає цю реакцію. Тому співвідношення, якими представлена математична модель будь-якої динамічної системи, також повинні відповідати принципу причинності (наприклад, цій вимозі не відповідає вираз $y(t) = x(t + \tau)$, $\tau > 0$, тому що тут вихідна величина $y(t)$ дорівнює вхідній $x(t + \tau)$, що буде мати місце через час τ).

Математична модель задається або рівнянням “вхід-вихід”, або оператором “вхід-вихід”.

Рівняння “вхід-вихід” – співвідношення, що пов'язують між собою вхідні і вихідні величини системи.

Оператор “вхід-вихід” – сукупність дій, які необхідно виконати над функцією, якою описується вхідна величина, щоб отримати функцію, якою описується вихідна величина системи.

Розглянемо найпростіші математичні моделі деяких функціональних блоків.

Приклад 1

У системах автоматичного керування частотою електричних коливань використовується частотний дискримінатор (детектор) ЧД. Він являє собою пристрій, вихідна напруга якого залежить від величини та знака неузгодження $\Delta f(t) = f(t) - f_0$ між дійсним $f(t)$ та бажаним f_0 значеннями частоти коливань (див. п. 1.5.1 та рис. 1.11). При достатньо малих неузгодженнях вихідна напруга ЧД визначається рівнянням

$$U_{\text{ЧД}}(t) = K_{\text{ЧД}} \Delta f(t), \quad (2.1)$$

де $K_{\text{ЧД}} = \left. \frac{dU_{\text{ЧД}}}{d\Delta f} \right|_{\Delta f=0}$ – крутість статичної характеристики ЧД, В/Гц.

Вираз (2.1) є одночасно рівнянням і оператором “вхід-вихід” частотного дискримінатора при незначних неузгодженнях.

Приклад 2

Фільтр, який являє собою інтегруюче RC -коло (рис. 2.1). Як відомо, напруги на вході $U_{\text{ВХ}}(t)$ і виході $U_{\text{ВИХ}}(t)$ цього фільтра пов’язані таким диференціальним рівнянням:

$$T \cdot U'_{\text{ВИХ}}(t) + U_{\text{ВИХ}}(t) = U_{\text{ВХ}}(t), \quad (2.2)$$

де $T = RC$ – стала часу фільтра ($[T] = \text{с}$).

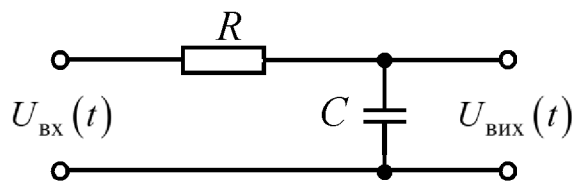


Рис. 2.1. Принципова схема інтегруючого RC -кола

Вираз (2.2) є рівнянням “вхід-вихід”, але не є оператором “вхід-вихід”, тому що для знаходження вихідної напруги необхідно розв’язати це диференціальне рівняння. Оператором “вхід-вихід” розглянутого фільтра буде розв’язок диференціального рівняння (2.2) при заданих початкових умовах. Можна показати, що він має такий вигляд:

$$U_{\text{ВИХ}}(t) = U_{\text{ВИХ}}(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{T}} + \frac{1}{T} \int_{t_0}^t U_{\text{ВХ}}(\tau) \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau. \quad (2.3)$$

Математичні моделі окремих функціональних блоків і САК у цілому мають однакові класифікацію та характеристики. Тому надалі розглянемо їх із застосуванням узагальнюючого поняття динамічної системи, тобто не звертаючи увагу на те, до якого конкретно об’єкта – окремого функціонального блока або САК у цілому – вони відносяться.

2.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ВИДАМИ ЇХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

2.2.1. Інерційні та безінерційні динамічні системи. Поняття стану системи

Динамічна система називається *безінерційною*, якщо поточне значення її реакції визначається лише поточним значенням вхідного діяння.

Відповідно до визначення, оператор “вхід-вихід” безінерційної динамічної системи в загальному випадку можна подати виразом

$$y(t) = A[x(t)]. \quad (2.4)$$

Наприклад, відповідно до виразу (2.1) вихідна напруга частотного дискримінатора $U_{\text{чд}}(t)$ залежить від неузгодження $\Delta f(t)$ у той самий момент часу. Тому можна вважати, що ЧД є безінерційним пристроєм.

Динамічна система називається *інерційною*, якщо поточне значення її реакції залежить не лише від поточного значення вхідного діяння, а й від процесів, що відбувались у системі до поточного моменту часу.

Наприклад, згідно з виразом (2.3) поточне значення напруги на виході інтегруючого RC -фільтра залежить від того, як змінювалася вхідна напруга на інтервалі часу $[t_0, t]$ і якою була вихідна напруга (точніше – напруга на конденсаторі C) у початковий момент часу t_0 . Нескладно також установити, що за наявності в складі електричної схеми декількох реактивних елементів (конденсаторів, котушок індуктивності) вихідна напруга буде залежати від усієї сукупності початкових значень напруг на конденсаторах та струмів у котушках індуктивності.

Сукупність внутрішніх змінних

$$\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t), \dots, z_k(t)]^T,$$

яка цілком характеризує процеси, що відбувались у системі до моменту часу t , називається *вектором стану*, а його компоненти $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$ – *координатами стану* системи. Знання цих величин у початковий момент часу $t=t_0$ є достатнім для знаходження реакції (руху¹) системи в майбутньому без додаткового звертання до попередніх значень.

Координати стану системи можуть вводитися не єдино можливим способом. Так, процеси, що відбувались в розглянутому RC -колі до моменту

¹ Зміну координат стану та вихідної величини з часом в теорії автоматичного керування часто називають *рухом системи*.

t_0 прикладання вхідної напруги, цілком характеризуються або зарядом конденсатора, або напругою на ньому. Однак завжди можна вказати мінімально необхідну кількість k координат, що визначають стан системи. Цю мінімально необхідну кількість координат називають **порядком системи**.

Відповідно до визначення, реакція інерційної системи залежить від початкового стану системи $\mathbf{z}(t_0)$ у момент часу t_0 і вхідного діяння $x(\tau)$ на інтервалі $[t_0, t]$. Тому оператор “вхід-вихід” інерційної системи має такий загальний вигляд:

$$y(t) = A\{\mathbf{z}(t_0), x(\tau)\}, \quad \tau \in [t_0, t]. \quad (2.5)$$

Усі реальні фізичні об’єкти є інерційними, що обумовлено кінцевою швидкістю протікання процесів у них. Безінерційні системи є математичною абстракцією, що розглядається як граничний випадок інерційних систем. На практиці допущення про безінерційність того чи іншого фізичного об’єкта можна прийняти в тому випадку, коли час протікання процесів у ньому нехтовно малий у порівнянні з часом перебігу процесів в інших об’єктах, з якими він пов’язаний, або з інтервалом часу, в межах якого розглядається функціонування системи у цілому.

2.2.2. Стаціонарні та нестаціонарні динамічні системи

Динамічна система називається *стаціонарною*, якщо характер її реакції не залежить від моменту прикладання вхідного діяння, а визначається лише видом діяння, що прикладається до неї, і початковим станом системи. Якщо ж характер реакції системи залежить від моменту прикладання вхідного діяння, то система називається *нестаціонарною*.

Нестаціонарність системи є наслідком зміни її параметрів з часом. Приклади реакцій стаціонарної і нестаціонарної систем, за умови, що до них у моменти часу t_0 і $t_0 + a$ прикладаються однакові діяння, зображені на рис. 2.2.

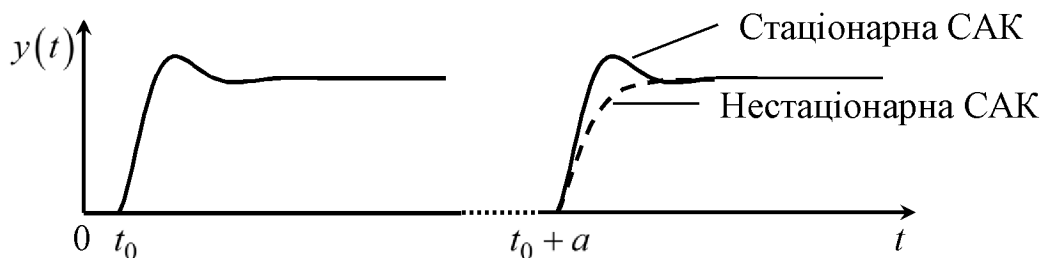


Рис. 2.2. Реакція стаціонарної і нестаціонарної систем за умови, що до них у різні моменти часу прикладаються однакові діяння

2.2.3. Лінійні та нелінійні динамічні системи. Властивості лінійних систем

Динамічна система називається *лінійною*, якщо її оператор має властивості однорідності й адитивності. Якщо хоча б одна з властивостей не виконується, система називається *нелінійною*.

Для формулювання властивостей адитивності та однорідності запишемо дві реакції $y_1(t)$, $y_2(t)$ деякої системи, що існують при різних початкових станах $z_1(t_0)$, $z_2(t_0)$ та різних вхідних діяннях $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= A\{z_1(t_0), x_1(\tau)\}, \quad \tau \in [t_0, t], \\y_2(t) &= A\{z_2(t_0), x_2(\tau)\}, \quad \tau \in [t_0, t].\end{aligned}$$

Властивість адитивності

Оператор системи називається адитивним, якщо для будь-яких початкових станів, вхідних діянь і t_0 справедливо

$$y(t) = A\{z_1(t_0) + z_2(t_0), x_1(\tau) + x_2(\tau)\} = y_1(t) + y_2(t). \quad (2.6)$$

Отже, реакція системи, оператор якої є адитивним, на суму будь-яких вхідних діянь та початкових станів дорівнює сумі її реакцій на окремі вхідні діяння та початкові стани.

Властивість однорідності

Оператор системи називається однорідним, якщо для будь-яких початкових станів, вхідних діянь, t_0 і коефіцієнта k справедливо

$$y(t) = A\{k \cdot z_1(t_0), k \cdot x_1(\tau)\} = k \cdot y_1(t). \quad (2.7)$$

Отже, при масштабній зміні будь-яких вхідних діянь та початкових станів реакція системи, оператор якої є однорідним, змінюється у такому ж масштабі.

Розглянемо дві важливі властивості лінійних САК, що впливають з властивостей адитивності й однорідності її оператора.

Властивість розкладності

У відповідності до властивості адитивності реакція лінійної системи може бути подана у вигляді

$$\begin{aligned}y(t) &= A\{z(t_0), x(\tau)\} = A\{z(t_0) + 0, 0 + x(\tau)\} = \\&= A\{z(t_0), 0\} + A\{0, x(\tau)\} = y_{\text{ввл}}(t) + y_{\text{ввм}_0}(t).\end{aligned} \quad (2.8)$$

Доданок $y_{\text{вільн}}(t)$ називається **вільною складовою** вихідної величини системи. Він є реакцією системи при заданому початковому стані за відсутності вхідного діяння. Доданок $y_{\text{вимуш}}(t)$ є **вимушеною складовою** вихідної величини системи при нульових початкових умовах, тобто реакцією системи на задане вхідне діяння з нульового початкового стану.

Таким чином, **вихідна величина лінійної системи завжди може бути подана у вигляді суми вільної складової і вимушеної складової при нульових початкових умовах.**

Таке розкладання зручне тим, що вільна складова визначається лише властивостями системи і не залежить від вхідного діяння, а тому може бути проаналізована заздалегідь. Вимушена ж складова залежить і від властивостей системи, і від вхідного діяння. Тому при аналізі системи основна увага повинна приділятися саме вимушеній складовій вихідної величини системи.

Властивість суперпозиції

Нехай до входу лінійної системи прикладене діяння $x(t)$, що являє собою лінійну комбінацію деяких елементарних функцій $x_i(t)$:

$$x(t) = \sum_i c_i x_i(t). \quad (2.9)$$

З урахуванням властивостей адитивності й однорідності реакція системи $y(t)$ на функцію $x(t)$ з нульового початкового стану визначається таким чином:

$$y(t) = A\{0, x(\tau)\} = A\left\{0, \sum_i c_i x_i(\tau)\right\} = \sum_i c_i A\{0, x_i(\tau)\}, \quad (2.10)$$

тобто являє собою таку ж лінійну комбінацію реакцій на елементарні функції $x_i(t)$.

Властивість суперпозиції узагальнюється на випадок, коли функція $x(t)$ являє собою інтегральну суперпозицію деяких елементарних функцій $\xi(t, \nu)$:

$$x(t) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} c(\nu) \xi(t, \nu) d\nu, \quad (2.11)$$

де v – параметр елементарних функцій, що набуває нескінченної множини значень з інтервалу $[v_1; v_2]$;

$c(v)$ – вагова параметрична функція, яка називається спектральною щільністю (спектром) розкладання функції $x(t)$ за елементарними функціями $\xi(t, v)$.

При такому вхідному діянні реакція системи являє собою таку ж інтегральну суперпозицію реакцій на елементарні функції $\xi(t, v)$:

$$y(t) = A\{\mathbf{0}, x(\tau)\} = A\left\{\mathbf{0}, \int_{v_1}^{v_2} c(v)\xi(\tau, v)dv\right\} = \int_{v_1}^{v_2} c(v)A\{\mathbf{0}, \xi(\tau, v)\}dv. \quad (2.12)$$

Таким чином, ***вимушений рух (реакція) лінійної системи на вхідне діяння у вигляді суперпозиції елементарних функцій дорівнює суперпозиції реакцій на ці елементарні функції.***

Властивість суперпозиції лінійних систем має винятково важливе значення завдяки таким обставинам: по-перше, багато вхідних діянь можна записати у вигляді розкладання на елементарні функції; по-друге, існують методи, що дозволяють досить просто знаходити реакції лінійної системи на елементарні функції.

З урахуванням указаних вище обставин, алгоритм знаходження реакції лінійної системи на довільне вхідне діяння із застосуванням властивості суперпозиції буде таким:

- 1) вхідне діяння записують у вигляді суперпозиції (2.9) або (2.11) елементарних функцій;
- 2) знаходять реакції системи на ці елементарні функції;
- 3) знаходять реакцію системи у вигляді суперпозиції (2.10) або (2.12) реакцій на елементарні функції.

Реальні САК в основному є нелінійними. У зв'язку зі складністю аналізу нелінійних систем завжди доцільно, якщо є така можливість, замінити нелінійну систему деякою еквівалентною (за істотними властивостями) лінійною системою.

Заміну нелінійної системи на еквівалентну за основними властивостями лінійну систему називають *лінеаризацією*. Зазвичай лінеаризація проводиться методом дотичної до нелінійної характеристики функціонального блока поблизу робочої точки – точки, де діяння мають номінальні значення. Наприклад, при малих неузгодженнях нелінійна статична характеристика частотного дискримінатора (див. рис. 1.11) може бути замінена на лінеаризовану поблизу робочої точки $\Delta f = 0$ згідно з виразом (1.14).

2.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ “ВХІД-ВИХІД” ТА ОПЕРАТОР ПЕРЕДАЧІ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ ІНЕРЦІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Процеси, що відбуваються в лінійних стаціонарних інерційних динамічних системах, описуються диференціальними рівняннями “вхід-вихід”, які мають такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} a_k \cdot y^{(k)}(t) + a_{k-1} \cdot y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot x'(t) + \dots + b_m \cdot x^{(m)}(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

де $m \leq k$ згідно з принципом причинності.

Рівняння (2.13) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням порядку k з постійними коефіцієнтами.

З метою спрощення виконання дій над рівняннями “вхід-вихід” окремих функціональних блоків при побудові математичної моделі системи їх записують у символічній формі за допомогою *оператора передачі*. Оператор передачі являє собою відношення сукупності дій, що виконуються над вхідною величиною, до сукупності дій, що виконуються над вихідною величиною.

Для отримання оператора передачі введемо в розгляд символ (оператор) диференціювання D , дія якого на довільну функцію $u(t)$ визначається за правилом

$$Du(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

тобто він виконує диференціювання тієї функції, на яку діє.

Оператор D має такі властивості:

$$D^i(D^k u(t)) = D^{i+k} u(t); D^i u(t) + D^k u(t) = (D^i + D^k) u(t).$$

Відзначимо, що оператор диференціювання D діє на функцію $u(t)$, яка записана за ним, тому вираз $u(t) \cdot D$ не має сенсу.

Оператор D може мати також від’ємний показник степеня. У такому випадку він стає оператором інтегрування:

$$D^{-1}u(t) = \frac{1}{D}u(t) = \int u(t) dt.$$

Отже, запишемо рівняння (2.13) із застосуванням оператора D :

$$a_k \cdot D^k y(t) + a_{k-1} \cdot D^{k-1} y(t) + \dots + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot Dx(t) + \dots + b_m \cdot D^m x(t).$$

Винесемо функції часу за дужки:

$$\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot D^i \right) y(t) = \left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot D^l \right) x(t). \quad (2.15)$$

Сукупності дій, що виконуються над вхідною та вихідною величинами, визначаються операторами у дужках:

$$M(D) = \left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot D^l \right); \quad N(D) = \left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot D^i \right).$$

Таким чином, оператор передачі системи дорівнює

$$K(D) = \frac{M(D)}{N(D)} = \frac{\left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot D^l \right)}{\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot D^i \right)}. \quad (2.16)$$

Формально розв'язуючи вираз (2.15) відносно $y(t)$, отримаємо такий запис диференціального рівняння “вхід-вихід” в операторній формі:

$$y(t) = K(D) \cdot x(t). \quad (2.17)$$

У теорії автоматичного керування операторна форма (2.17) запису диференціального рівняння “вхід-вихід” застосовується для графічного відображення у вигляді так званої схеми математичної моделі (структурної схеми) системи у часовій області (рис. 2.3).

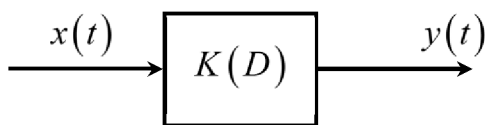


Рис. 2.3. Схема математичної моделі системи у часовій області

Приклад

Визначити диференціальний оператор передачі інтегруючого RC-кола (див. рис. 2.1).

Розв'язання

Запишемо рівняння “вхід-вихід” (2.2) інтегруючого RC-кола у

символьній (операторній) формі:

$$T \cdot DU_{\text{вих}}(t) + U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}}(t).$$

Винесемо змінну $U_{\text{вих}}(t)$ за дужки:

$$(T \cdot D + 1)U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}}(t).$$

Формально розв'яжемо отриманий вираз відносно вихідної величини:

$$U_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{T \cdot D + 1} U_{\text{вх}}(t).$$

Отже, шуканий оператор передачі

$$K(D) = \frac{1}{T \cdot D + 1}.$$

2.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.4.1. Поняття про характеристики динамічних систем

Під характеристиками динамічної системи розуміють функції, які є реакціями або визначають реакції системи на вхідні діяння, що описуються елементарними функціями.

Як елементарні функції, для яких визначаються характеристики системи, в теорії автоматичного керування застосовуються:

а) дельта-функція (δ -функція, функція Дірака)

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

причому

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1(t);$$

б) одинична функція (функція Хевісайда)

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases} \quad (2.19)$$

в) гармонічна функція, яка записується або у показниковій формі

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad (2.20)$$

або у тригонометричній формі

$$x(t) = \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] = \cos(\omega t), \quad (2.20a)$$

$$x(t) = \operatorname{Im}[e^{j\omega t}] = \sin(\omega t), \quad (2.20б)$$

де ω – дійсний параметр – кругова (циклічна) частота, що виражається в радіанах за секунду (рад/с). Вона пов'язана з частотою, що виражається в герцах, виразом $\omega = 2\pi \cdot f$;

г) показникова функція

$$x(t) = e^{p \cdot t}, \quad (2.21)$$

де $p = \sigma + j \cdot \omega$ – параметр, що являє собою комплексне число.

Характеристики знайшли надзвичайно широке застосування з таких причин.

По-перше, вони застосовуються безпосередньо для визначення властивостей системи шляхом аналізу її реакцій на вхідні діяння, що описуються елементарними функціями.

По-друге, вони застосовуються для знаходження реакції лінійної системи на довільне вхідне діяння. Для цього довільне вхідне діяння записується у вигляді суперпозиції елементарних функцій. Тоді реакція лінійної системи буде являти собою таку саму суперпозицію реакцій системи на елементарні функції, тобто суперпозицію відповідних характеристик системи.

Далі розглядаються характеристики лінійних стаціонарних динамічних систем, показано, як на їх основі скласти оператор “вхід-вихід”, а також встановлено зв'язок між характеристиками та оператором передачі системи.

2.4.2. Часові характеристики

До часових характеристик динамічної системи відносять імпульсну і перехідну характеристики.

Імпульсною характеристикою системи називається її реакція на вхідне діяння у вигляді δ -функції при нульових початкових умовах.

Імпульсну характеристику позначають $k(t)$.

Відповідно до визначення δ -функції (2.18) вона при $t < 0$ дорівнює нулю. Тому, згідно з принципом причинності, імпульсна характеристика дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу

$$k(t) = 0 \Big|_{t < 0}. \quad (2.22)$$

Отримаємо оператор “вхід-вихід” системи, використовуючи її імпульсну характеристику. Для цього запишемо довільне вхідне діяння $x(t)$ у вигляді інтегральної суперпозиції δ -функцій:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.23)$$

У виразі (2.23) функція $x(\tau)$ під знаком інтеграла виступає як ваговий коефіцієнт (спектральна щільність) розкладання виду (2.11) функції $x(t)$ за δ -функціями.

Відповідно до властивості суперпозиції (2.12) реакція системи на суперпозицію елементарних функцій дорівнює такій же суперпозиції реакцій на ці функції. За визначенням, реакцією системи на δ -функцію є імпульсна характеристика. Отже, реакція системи на вхідне діяння, що подано у вигляді (2.23), буде визначатися як суперпозиція її імпульсних характеристик:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot k(t - \tau) d\tau, \quad (2.24)$$

або, після заміни змінних $\theta = t - \tau$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) \cdot k(\theta) d\theta. \quad (2.25)$$

Вирази (2.24), (2.25) встановлюють зв'язок між вхідним і вихідним діяннями системи, а отже, є її операторами “вхід-вихід”. Інтеграл, що фігурує в цих виразах, називається *інтегралом згортки*. Згідно з цими виразами реакція системи на довільне вхідне діяння може бути знайдена як інтеграл згортки цього діяння та імпульсної характеристики системи.

Враховуючи властивості підінтегральних функцій, оператори “вхід-вихід” (2.24), (2.25) можуть бути записані з іншими межами інтегрування. Так, якщо вхідне діяння подається на вхід системи з моменту t_0 , то $x(t - \theta)$ у виразі (2.25) дорівнює нулю при $t - \theta < t_0$ (або $\theta > t - t_0$), отже, значення інтеграла не зміниться при заміні верхньої межі інтегрування на $t - t_0$. Крім того, згідно з виразом (2.22) нижня межа інтегрування може бути замінена на нуль. Отже, якщо $x(t) = 0$ при $t < t_0$, то справедливо

$$y(t) = \int_0^{t-t_0} x(t-\theta) \cdot k(\theta) d\theta, \quad (2.26)$$

або

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) \cdot k(t-\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

У стаціонарних системах зазвичай приймають $t_0 = 0$, тоді

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot k(t-\tau) d\tau = \int_0^t x(t-\theta) \cdot k(\theta) d\theta. \quad (2.28)$$

Перехідною характеристикою системи називається її реакція на вхідне діяння у вигляді одиничної функції при нульових початкових умовах.

Перехідну характеристику позначають $h(t)$.

Відповідно до визначення одинична функція дорівнює нулю при $t < 0$. Тому, згідно з принципом причинності, перехідна характеристика, як і імпульсна, дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу:

$$h(t) = 0 \Big|_{t < 0}.$$

Знайдемо зв'язок між імпульсною і перехідною характеристиками системи. Відповідно до виразу (2.28) перехідна характеристика системи може бути знайдена як інтеграл згортки одиничної функції та імпульсної характеристики системи:

$$h(t) = \int_0^t 1(t-\theta) \cdot k(\theta) d\theta.$$

Враховуючи, що $1(t-\theta) = 1$ при $t-\theta \geq 0$, маємо

$$h(t) = \int_0^t k(\theta) d\theta. \quad (2.29)$$

Після диференціювання виразу (2.29) отримаємо, що імпульсна характеристика є похідною перехідної характеристики:

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.30)$$

Вирази (2.29), (2.30) в операторній формі мають такий вигляд:

$$k(t) = Dh(t), \quad h(t) = \frac{1}{D}k(t). \quad (2.31)$$

Приклад

Імпульсна характеристика інтегруючого RC -кола (рис. 2.1) дорівнює

$$k(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t),$$

де $T = RC$ – стала часу кола. Визначити його перехідну характеристику.

Розв'язання

Відповідно до виразу (2.29) маємо

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t k(\theta) d\theta = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\frac{\theta}{T}} \cdot 1(\theta) d\theta = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{\theta}{T}} d\theta \cdot 1(t) = \\ &= \frac{1}{T} (-T) e^{-\frac{\theta}{T}} \Big|_0^t \cdot 1(t) = -\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^0\right) \cdot 1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t). \end{aligned}$$

Графіки імпульсної (Impulse Response) та перехідної (Step Response) характеристик інтегруючого RC -кола при $T = 1$ с, отримані за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab, наведені на рис. 2.4.

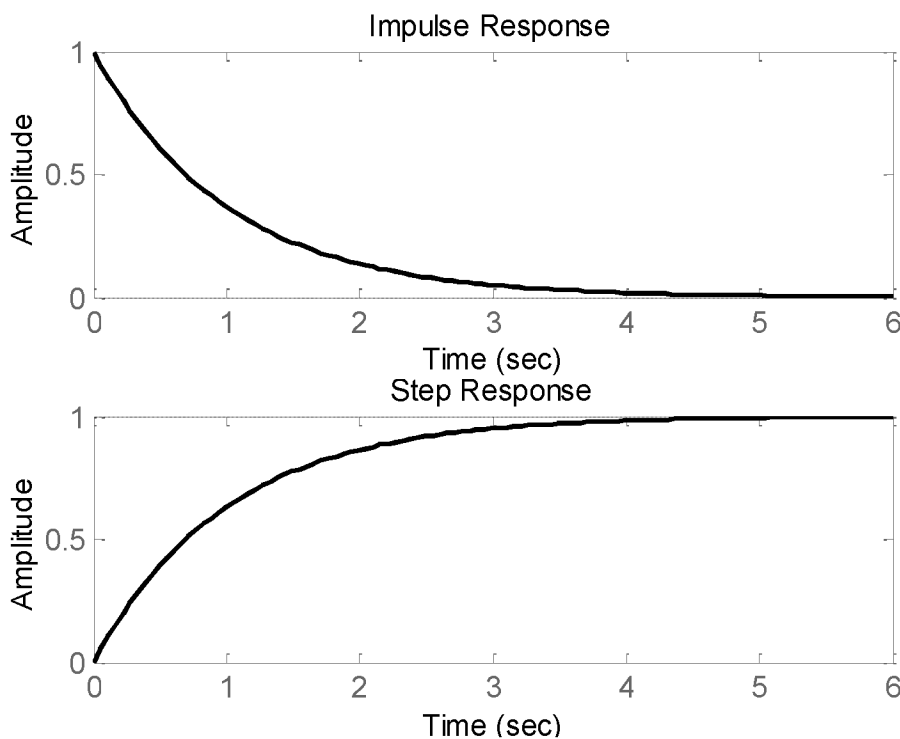


Рис. 2.4. Графіки імпульсної (Impulse Response) та перехідної (Step Response) характеристик інтегруючого RC -кола

2.4.3. Передавальна функція

Для аналізу динамічних систем широко застосовуються алгебраїчні методи, засновані на перетворенні Лапласа.

Перетворенням Лапласа функції $u(t)$ називається функція $U(p)$, яка визначається виразом

$$U(p) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

де p – змінна (змінна Лапласа), що є комплексною величиною:

$$p = \sigma + j\omega.$$

Перетворення Лапласа замінює функцію часу $u(t)$ (**оригінал**) на функцію нової комплексної змінної $U(p)$ (**зображення** за Лапласом), причому між оригіналом та його зображенням існує взаємно однозначний зв'язок.

Основні властивості перетворення Лапласа та таблиця зображень деяких функцій часу наведені у дод. 1. Відзначимо, що всі функції-оригінали дорівнюють нулю при $t < 0$.

Передавальною функцією системи називається перетворення Лапласа її імпульсної характеристики

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(t) \cdot e^{-pt} dt = L\{k(t)\}. \quad (2.32)$$

Тут і далі $L\{\cdot\}$ – скорочене позначення оператора Лапласа.

Відповідно імпульсна характеристика є оберненим перетворенням Лапласа передавальної функції:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} K(p) \cdot e^{pt} dp = L^{-1}\{K(p)\}. \quad (2.33)$$

Передавальна функція є такою характеристикою системи, що визначає її реакцію на показникову функцію. Дійсно, нехай вхідне діяння $x(t) = e^{pt}$. Тоді згідно з (2.25) реакція системи буде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{p(t-\theta)} \cdot k(\theta) d\theta = e^{pt} \cdot \int_{-\infty(0)}^{\infty} e^{-p\theta} \cdot k(\theta) d\theta = K(p) \cdot e^{pt}.$$

Отже, на виході системи також буде показникова функція, змінена з масштабним коефіцієнтом, який дорівнює передавальній функції.

Передавальна функція широко застосовується для знаходження реакції системи на задане вхідне діяння при нульових початкових умовах. Нехай для вхідного діяння, заданого функцією часу $x(t)$, існує перетворення Лапласа $X(p) = L\{x(t)\}$. Тоді на підставі властивості перетворення Лапласа від інтеграла згортки (дод. 1) справедливо

$$Y(p) = L\{y(t)\} = K(p) \cdot X(p). \quad (2.34)$$

Виразу (2.34) відповідає схема математичної моделі системи в області перетворень Лапласа, що наведена на рис. 2.5.

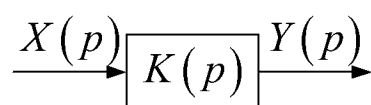


Рис. 2.5. Схема математичної моделі системи в області перетворень Лапласа

Для знаходження реакції системи на вхідне діяння за відомою передавальною функцією необхідно виконати такі дії:

1) перейти від функції часу $x(t)$ до перетворення Лапласа $X(p) = L\{x(t)\}$ (дод. 1);

2) знайти перетворення Лапласа $Y(p)$ вихідної величини $y(t)$ як добуток (2.34) передавальної функції системи і перетворення Лапласа $X(p)$;

3) перейти від перетворення Лапласа $Y(p)$ до оригіналу, виконавши обернене перетворення Лапласа: $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}$.

Сукупність трьох зазначених дій являє собою оператор “вхід-вихід” системи, побудований на основі її передавальної функції. Він може бути записаний у такій скороченій формі:

$$y(t) = L^{-1}\{K(p) \cdot L\{x(t)\}\}. \quad (2.35)$$

З виразу (2.34) також випливає, що передавальна функція лінійної стаціонарної САК може бути знайдена як відношення перетворень Лапласа вихідної і вхідної величин системи при нульових початкових умовах¹:

¹ У деяких джерелах це подається як визначення передавальної функції.

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (2.36)$$

Передавальна функція може бути знайдена безпосередньо з диференціального рівняння “вхід-вихід” лінійної стаціонарної динамічної системи без його розв’язання. Для цього здійснимо перетворення Лапласа диференціального рівняння “вхід-вихід” (2.13). Цей перехід заснований на властивостях лінійності перетворення Лапласа та диференціювання оригіналу. Оскільки передавальна функція визначається при нульових початкових умовах, між похідною n -го порядку функції часу $u(t)$ та її перетворенням Лапласа $U(p)$ існує таке співвідношення:

$$u^{(n)}(t) = D^n u(t) \longleftrightarrow p^n \cdot U(p). \quad (2.37)$$

Застосовуючи відповідність (2.37) до кожного доданка виразу (2.13), перейдемо від диференціального рівняння “вхід-вихід” до алгебраїчного рівняння для зображень вхідної та вихідної величин:

$$\begin{aligned} a_k \cdot p^k \cdot Y(p) + a_{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot Y(p) + \dots + a_0 \cdot Y(p) = \\ = b_0 \cdot X(p) + b_1 \cdot p \cdot X(p) + \dots + b_m \cdot p^m \cdot X(p). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Винесемо перетворення Лапласа вхідної та вихідної величин за дужки:

$$\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot p^i \right) Y(p) = \left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot p^l \right) X(p).$$

Розв’яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно перетворення Лапласа вихідної величини $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{\left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot p^l \right)}{\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot p^i \right)} X(p). \quad (2.39)$$

Порівнюючи вирази (2.39) і (2.34), доходимо висновку, що шукана передавальна функція дорівнює

$$K(p) = \frac{\left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot p^l \right)}{\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot p^i \right)}. \quad (2.40)$$

Вона являє собою дробово-раціональну функцію відносно комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$.

З порівняння виразів (2.16) і (2.40) випливає, що

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p}, \quad (2.41)$$

тобто передавальна функція системи може бути знайдена безпосередньо за її оператором передачі $K(D)$ шляхом формальної заміни символу диференціювання D на змінну Лапласа p і навпаки

$$K(D) = K(p) \Big|_{p=D}. \quad (2.42)$$

Приклад

Записати передавальну функцію інтегруючого RC -кола та розрахувати за її допомогою перехідну характеристику.

Розв'язання

З виразу (2.41) випливає, що передавальна функція інтегруючого RC -кола дорівнює

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p} = \frac{1}{1 + T \cdot p}.$$

Для відшукування перехідної характеристики виконуємо таке:

1) переходимо від одиничної функції $x(t) = 1(t)$ до її перетворення Лапласа $X(p) = L\{x(t)\} = 1/p$ (дод. 1);

2) знаходимо перетворення Лапласа $H(p)$ вихідної величини – перехідної характеристики $h(t)$ як добуток (2.34) передавальної функції системи і перетворення Лапласа одиничної функції:

$$H(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1 + T \cdot p)};$$

3) переходимо від перетворення Лапласа $H(p)$ до оригіналу, виконавши обернене перетворення Лапласа (див. дод. 1):

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p(1+T \cdot p)}\right\} = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t) .$$

Як бачимо, тут викладення дещо простіше, ніж при розрахунку за допомогою інтеграла згортки.

2.4.4. Частотні характеристики

Для аналізу динамічних систем застосовуються графоаналітичні методи, засновані на перетворенні Фур'є.

Перетворенням Фур'є функції $u(t)$ називається функція $U(j\omega)$, яка визначається виразом

$$U(j\omega) = F\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

де ω – аргумент, що називається круговою (циклічною) частотою та має розмірність радіан за секунду.

Перетворення Фур'є замінює функцію часу $u(t)$ на функцію $U(j\omega)$ дійсної змінної ω (зображення за Фур'є або *спектр*).

Відзначимо, що функції-оригінали дорівнюють нулю при $t < 0$. Тому для них нижня межа інтегрування у виразі для перетворення Фур'є дорівнює нулю. Для таких функцій між зображеннями за Фур'є та за Лапласом існує такий простий зв'язок:

$$U(j\omega) = U(p) \Big|_{p=j\omega} . \quad (2.43)$$

Указаний зв'язок дозволяє користуватись таблицями перетворення Лапласа для відшукування перетворення Фур'є функцій часу, що дорівнюють нулю при $t < 0$.

Комплексною частотною характеристикою (КЧХ) системи називається перетворення Фур'є її імпульсної характеристики:

$$K(j\omega) = F\{k(t)\} = \int_0^{\infty} k(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad (2.44)$$

де ω – аргумент, що називається круговою (циклічною) частотою та має розмірність радіан за секунду.

Тут нижня межа інтегрування обрана рівною нулю, тому що, на підставі принципу причинності, імпульсна характеристика $k(t)$ дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу.

Відповідно імпульсна характеристика є оберненим перетворенням Фур'є комплексної частотної характеристики системи:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{K(j\omega)\}.$$

КЧХ є такою характеристикою системи, що визначає її реакцію на вхідне діяння у вигляді гармонічної функції. Дійсно, нехай $x(t) = e^{j\omega t}$. Тоді згідно з (2.25) реакція системи буде

$$y(t) = \int_{-\infty(0)}^{\infty} e^{j\omega(t-\theta)} \cdot k(\theta) d\theta = e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty(0)}^{\infty} e^{-j\omega\theta} \cdot k(\theta) d\theta = K(j\omega) \cdot e^{j\omega t}. \quad (2.45)$$

Отже, на виході системи також буде гармонічна функція, яка змінена з масштабним коефіцієнтом, що дорівнює значенню КЧХ на частоті ω вхідного гармонічного коливання.

Якщо для вхідного діяння, представленого функцією часу $x(t)$, існує перетворення Фур'є (спектр) $X(j\omega) = F\{x(t)\}$, то, як випливає з властивостей перетворення Фур'є, справедливо

$$Y(j\omega) = K(j\omega) \cdot X(j\omega), \quad (2.46)$$

де $Y(j\omega) = F\{y(t)\}$ – перетворення Фур'є (спектр) вихідної величини.

Виразу (2.46) відповідає схема математичної моделі динамічної системи в частотній області, що наведена на рис. 2.6.

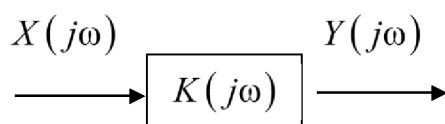


Рис. 2.6. Схема математичної моделі динамічної системи в частотній області

З виразу (2.46) маємо, що КЧХ є відношенням перетворень Фур'є вихідної і вхідної функцій при нульових початкових умовах¹:

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \quad (2.47)$$

¹ У деяких джерелах це подається як визначення КЧХ.

З виразу (2.43) випливає, що між КЧХ та передавальною функцією системи існує такий простий зв'язок:

$$K(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (2.48)$$

З виразів (2.48) і (2.41), (2.42) робимо висновок, що КЧХ та оператор передачі $K(D)$ системи мають такий зв'язок:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= K(D) \Big|_{D=j\omega}, \\ K(D) &= K(j\omega) \Big|_{j\omega=D}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

З урахуванням виразів (2.40), (2.48), нескладно встановити, що КЧХ лінійної стаціонарної неперервної динамічної системи являє собою дробово-раціональну комплекснозначну функцію відносно змінної ω (частоти), яка визначається виразом

$$K(j\omega) = \frac{\left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot (j\omega)^l \right)}{\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot (j\omega)^i \right)} = \frac{b_0 + j\omega \cdot b_1 + (j\omega)^2 \cdot b_2 + \dots + (j\omega)^m \cdot b_m}{a_0 + j\omega \cdot a_1 + (j\omega)^2 \cdot a_2 + \dots + (j\omega)^k \cdot a_k}. \quad (2.50)$$

Оскільки КЧХ системи є комплекснозначною функцією, її можна подати в алгебраїчній формі

$$K(j\omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega), \quad (2.51)$$

або у показниковій формі

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.52)$$

де $P(\omega) = \text{Re}[K(j\omega)]$ – дійсна частина КЧХ, яка називається **дійсною частотною характеристикою** системи;

$Q(\omega) = \text{Im}[K(j\omega)]$ – уявна частина КЧХ, яка називається **уявною частотною характеристикою** системи;

$K(\omega) = |K(j\omega)|$ – модуль КЧХ, який називається **амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)** системи;

$\varphi(\omega) = \text{arg}[K(j\omega)]$ – аргумент КЧХ, який називається **фазочастотною характеристикою (ФЧХ)** системи.

Нескладно встановити зв'язок між частотними характеристиками (рис. 2.7):

$$K(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}, \quad (2.53)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, & \text{якщо } P(\omega) > 0; \\ \pi + \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, & \text{якщо } P(\omega) < 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

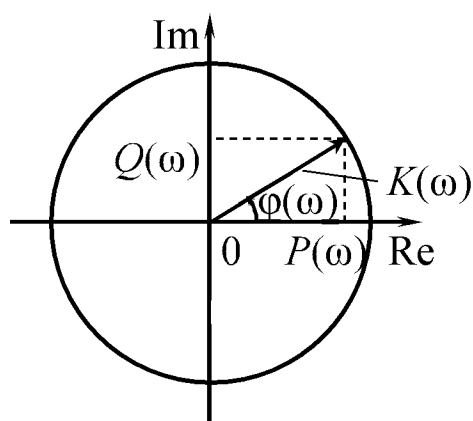


Рис. 2.7. Зображення АЧХ на комплексній площині

Графіки АЧХ та ФЧХ широко застосовуються для аналізу властивостей системи внаслідок того, що вони мають просту фізичну сутність. Для пояснення фізичної сутності АЧХ та ФЧХ наведемо реакцію (2.45) системи на вхідне діяння у вигляді гармонічної функції $x(t) = e^{j\omega t}$ з урахуванням запису КЧХ у показниковій формі (2.51):

$$y(t) = K(j\omega) \cdot e^{j\omega t} = K(\omega) \cdot e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}.$$

Отже, АЧХ характеризує залежність коефіцієнта підсилення системи від частоти вхідного коливання, а ФЧХ – залежність фазового зсуву вихідного гармонічного коливання щодо вхідного гармонічного коливання від частоти.

У більшості випадків частотні методи аналізу і синтезу неперервних САК є графоаналітичними, і тому для їх застосування необхідно будувати частотні характеристики системи. Побудова частотних характеристик істотно спрощується при використанні логарифмічного масштабу. У зв'язку з цим вводяться логарифмічні частотні характеристики.

При побудові логарифмічних частотних характеристик по осі абсцис відкладається частота ω у логарифмічному масштабі ($\lg \omega$ у лінійному

масштабі), а тому відстань між частотами вимірюється логарифмічними одиницями – октавою та декадою (рис. 2.8).

Інтервал між частотами, значення яких відрізняються в десять разів ($\omega_2 / \omega_1 = 10$), називається **декадою**. Інтервал між частотами, значення яких відрізняються у два рази ($\omega_2 / \omega_1 = 2$), називається **октавою**. Декада має протяжність $\lg(\omega_2 / \omega_1) = \lg 10 = 1$, а октава $\lg(\omega_2 / \omega_1) = \lg 2 \cong 0,301$. Отже, у декаді розміщуються приблизно 3,3 октави.

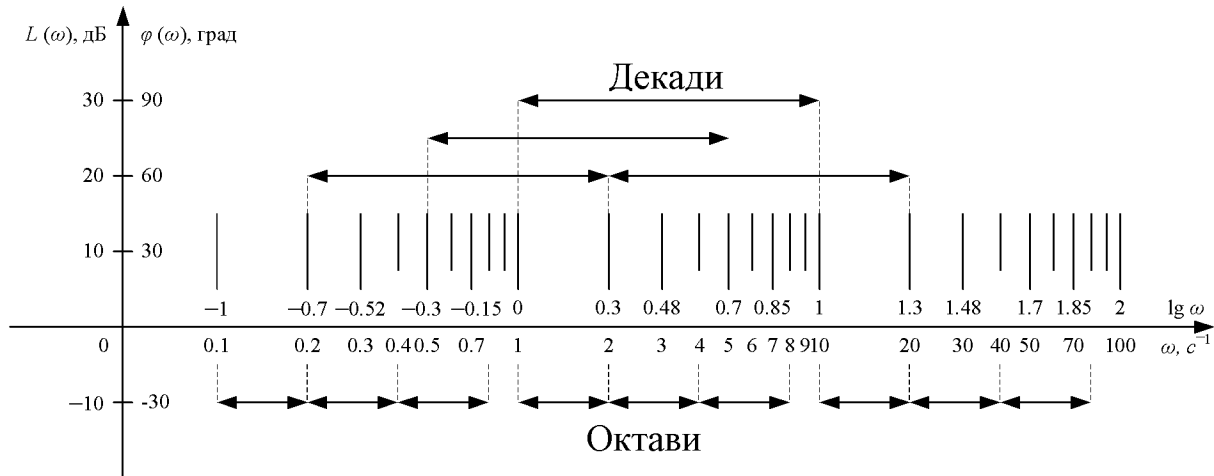


Рис. 2.8. Масштаб для побудови логарифмічних частотних характеристик

Завдяки застосуванню логарифмічного масштабу можна будувати частотні характеристики, які добре спостерігаються у надзвичайно широкому діапазоні частот. Так, якщо $\omega_{\min} = 0,01 \text{ c}^{-1}$, $\omega_{\max} = 1000 \text{ c}^{-1}$, то загальна протяжність осі абсцис становитиме 5 декад. При застосуванні лінійного масштабу “ціна” одного такого інтервалу буде дорівнювати $\omega_{\max} / 5 = 200 \text{ c}^{-1}$, тому графік АЧХ при малих частотах буде надзвичайно стиснутий.

Оскільки при $\omega = 0$ величина $\lg \omega = -\infty$, то шкала ординат проводиться через довільну точку осі абсцис, виходячи з розумінь зручності побудови логарифмічних частотних характеристик.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) визначається з АЧХ системи за таким співвідношенням:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K(\omega). \quad (2.55)$$

Тут величина коефіцієнта підсилення L також виражається в логарифмічних одиницях – **децибелах** (дБ). Зв’язок між деякими значеннями коефіцієнта підсилення у K разів та у $L = 20 \cdot \lg K$ децибел наведений у табл. 2.1.

Використовуюючи дані, наведені у табл. 2.1, та властивості логарифма, можна достатньо точно перейти від багатьох значень коефіцієнта підсилення K до значень у децибелах і навпаки. Наприклад, $K_1 = 2,5$, $K_2 = 1000$. Тоді

$$L_1 = 20 \cdot \lg 2,5 = 20 \cdot \lg(5/2) = 20 \cdot \lg 5 - 20 \cdot \lg 2 = 14 - 6 = 8 \text{ дБ};$$

$$L_2 = 20 \cdot \lg 1000 = 20 \cdot \lg(10^3) = 20 \cdot 3 \cdot \lg 10 = 60 \text{ дБ}.$$

Таблиця 2.1

Значення коефіцієнта підсилення в разях та децибелах

K	0,1	0,2	0,5	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	5	10
$L, \text{ дБ}$	-20	-14	-6	-3	0	3	6	10	14	20

Логарифмічна фазочастотна характеристика системи (ЛФЧХ) являє собою фазочастотну характеристику $\varphi(\omega)$, що будується як функція логарифма частоти.

Приклад

Визначити частотні характеристики інтегруючого RC -кола. Побудувати графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ.

Розв'язання

Комплексна частотна характеристика інтегруючого RC -кола може бути записана за його оператором передачі $K(D)$ на підставі виразу (2.49):

$$K(j\omega) = K(D) \Big|_{D=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T}.$$

Для відшукування АЧХ, ЛАЧХ та ФЧХ виділимо у виразі для КЧХ дійсну та уявну частини:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T} \cdot \frac{1 - j\omega \cdot T}{1 - j\omega \cdot T} = \frac{1}{1 + (\omega \cdot T)^2} - j \frac{\omega \cdot T}{1 + (\omega \cdot T)^2}.$$

Отже, дійсна та уявна частини КЧХ дорівнюють

$$P(\omega) = \text{Re}[K(j\omega)] = \frac{1}{1 + (\omega \cdot T)^2};$$

$$Q(\omega) = \text{Im}[K(j\omega)] = \frac{-\omega \cdot T}{1 + (\omega \cdot T)^2}.$$

Тоді АЧХ, ЛАЧХ та ФЧХ інтегруючого RC -кола визначаються виразами

$$K(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}};$$

$$L(\omega) = 20 \lg K(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\text{arctg}(\omega \cdot T).$$

Графіки ЛАЧХ (Magnitude) та ЛФЧХ (Phase) характеристик інтегруючого RC -кола при значенні сталої часу $T = 1$ с, отримані за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab, наведені на рис. 2.9.

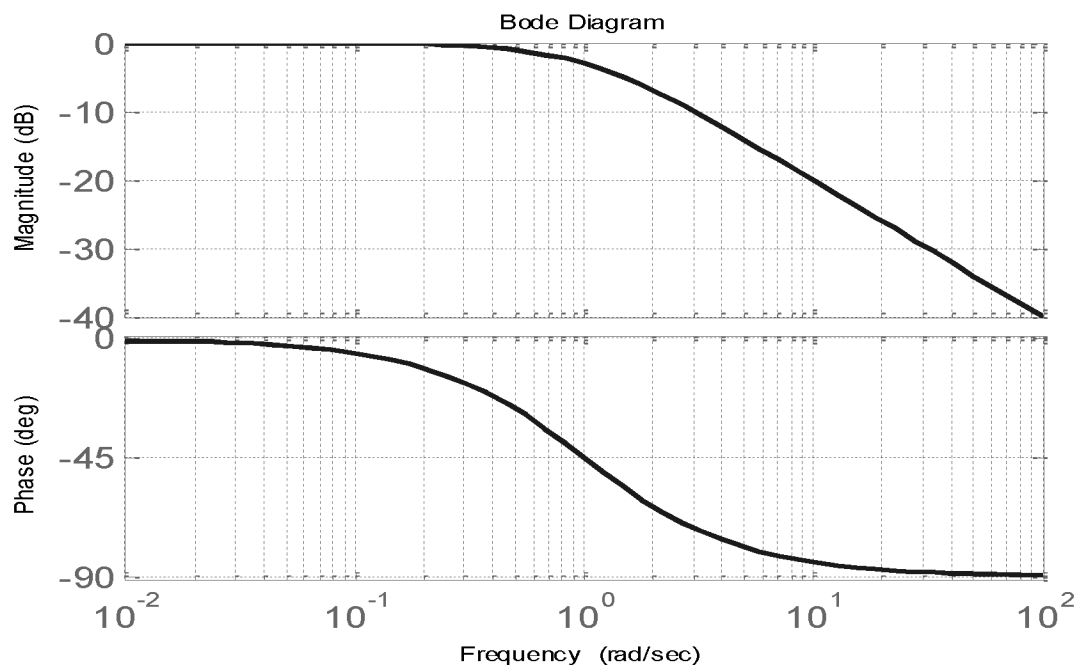


Рис. 2.9. Графіки ЛАЧХ (Magnitude) та ЛФЧХ (Phase) характеристик інтегруючого RC -кола при значенні сталої часу $T = 1$ с

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення математичної моделі САК.
2. Які способи задання математичної моделі існують?

3. Дайте визначення безінерційної динамічної системи. Запишіть загальний вигляд її оператора “вхід-вихід”.
4. Дайте визначення інерційної динамічної системи. Запишіть загальний вигляд її оператора “вхід-вихід”.
5. Дайте визначення поняття стану системи.
6. Яку САК називають стаціонарною?
7. Яку САК називають нестаціонарною?
8. Яку САК називають лінійною?
9. Яку САК називають нелінійною?
10. Сформулюйте властивість адитивності.
11. Сформулюйте властивість однорідності.
12. Сформулюйте властивість розкладності.
13. Сформулюйте властивість суперпозиції.
14. Наведіть алгоритм знаходження реакції системи, що впливає з властивості суперпозиції.
15. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння “вхід-вихід” лінійної стаціонарної неперервної динамічної системи.
16. Наведіть методику знаходження диференціального оператора передачі за диференціальним рівнянням “вхід-вихід”.
17. Дайте визначення імпульсної характеристики системи.
18. Запишіть оператор “вхід-вихід”, побудований на основі імпульсної характеристики системи.
19. Дайте визначення перехідної характеристики системи.
20. Як пов’язані між собою імпульсна та перехідна характеристики системи?
21. Дайте визначення передавальної функції системи.
22. Запишіть оператор “вхід-вихід”, побудований на основі передавальної функції системи.
23. Як пов’язані між собою передавальна функція та імпульсна характеристика системи?
24. Як пов’язані між собою передавальна функція та диференціальний оператор передачі системи?
25. Дайте визначення комплексної частотної характеристики системи.
26. Як пов’язані між собою комплексна частотна характеристика та імпульсна характеристика системи?
27. Як пов’язані між собою комплексна частотна характеристика та передавальна функція системи?
28. Як пов’язані між собою комплексна частотна характеристика та диференціальний оператор передачі системи?
29. Дайте визначення амплітудно-частотної характеристики системи.
30. Дайте визначення фазочастотної характеристики системи.
31. Дайте визначення логарифмічної амплітудно-частотної характеристики системи.

32. Визначте поняття “декада” та “октава”.

33. Переведіть коефіцієнт підсилення системи з натуральних у логарифмічні одиниці

K	100	2000	0,2	8	0,001	0,05	50
L , дБ							

34. Переведіть коефіцієнт підсилення системи з логарифмічних одиниць у натуральні

L , дБ	26	20	9	-20	-40	40	3
K							

35. Диференціальне рівняння “вхід-вихід” динамічної системи має вигляд

$$y'(t) + 2y(t) = 5x(t).$$

Виконайте таке:

а) знайдіть оператор передачі та побудуйте схему математичної моделі в часовій області;

в) знайдіть передавальну функцію та побудуйте схему математичної моделі в області зображень за Лапласом;

г) користуючись передавальною функцією, знайдіть імпульсну характеристику та побудуйте її графік;

д) знайдіть комплексну частотну характеристику та побудуйте схему математичної моделі в частотній області;

е) знайдіть амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

36. Передавальна функція динамічної системи визначається виразом

$$K(p) = \frac{2p}{p+4}.$$

Знайдіть:

а) імпульсну характеристику системи;

б) перехідну характеристику системи;

в) комплексну частотну характеристику системи.

3. ЕЛЕМЕНТАРНІ ЛАНКИ

3.1. ПОНЯТТЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЛАНОК

Відповідно до виразу (2.40), передавальна функція лінійної неперервної стаціонарної динамічної системи є відношенням многочленів відносно змінної Лапласа p :

$$K(p) = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_k \cdot p^k} = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad k \geq m. \quad (3.1)$$

Згідно з теоремою Безу многочлени $M(p)$ і $N(p)$ можуть бути подані у вигляді розкладання на прості множники:

$$M(p) = b_m \prod_{r=1}^m (p - q_r), \quad N(p) = a_k \prod_{i=1}^k (p - p_i), \quad (3.2)$$

де q_r, p_i – корені рівнянь $M(p) = 0$ та $N(p) = 0$ відповідно.

Корені рівнянь можуть бути нульовими, дійсними (відмітними від нуля) і комплексними спряженими. Тому в кожному многочлені можна виділити по три групи співмножників, що відповідають характеру коренів, причому нульовим та дійсним кореням відповідають множники першого порядку, а парі комплексних спряжених – множники другого порядку з дійсними коефіцієнтами.

З урахуванням цього передавальну функцію лінійної неперервної стаціонарної динамічної системи завжди можна подати у вигляді добутку компонентів семи типів: масштабного коефіцієнта, трьох видів простих множників та трьох видів простих дробів. Указані сім типів компонентів, з яких складається передавальна функція будь-якої лінійної стаціонарної неперервної динамічної системи, отримали назву *елементарних ланок*.

У табл. 3.1 наведені назви елементарних ланок та стандартний запис їх передавальних функцій. Якщо їх параметри задовольняють нерівності $\tau > 0$, $T > 0$, $\tau_0 > 0$, $T_0 > 0$, $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$, вони називаються *мінімально-фазовими*. Надалі ми обмежимося розглядом лише мінімально-фазових елементарних ланок.

Елементарні ланки можна розглядати як “будівельні блоки”, з яких складається структура будь-якої САК. Розгляд структури системи у вигляді добутку сукупності елементарних ланок дозволяє аналізувати її властивості, спираючись на характеристики елементарних ланок, з яких вона складається. Такий підхід знайшов широке застосування, тому що знання обмеженої кількості характеристик елементарних ланок дозволяє суттєво спростити дослідження системи будь-якої структури та ступеня складності.

Елементарні ланки

Назва ланки	Передавальна функція
Підсилювальна	$K(p) = k$
Диференціююча	$K(p) = p$
Інтегруюча	$K(p) = 1/p$
Форсуюча	$K(p) = 1 + \tau \cdot p$
Аперіодична (інерційна)	$K(p) = \frac{1}{1 + T \cdot p}$
Коливальна	$K(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + T_0^2 \cdot p^2}$
Форсуюча 2-го порядку	$K(p) = 1 + 2\eta \cdot \tau_0 \cdot p + \tau_0^2 \cdot p^2$

Приклад 1

Запишемо передавальну функцію системи

$$K(p) = \frac{2}{0,2p^2 + 5p}$$

у вигляді добутку передавальних функцій елементарних ланок.

Виділимо у передавальній функції системи окремі множники:

$$K(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{0,2p + 5}$$

У передавальних функціях елементарних ланок вільний коефіцієнт дорівнює одиниці, тому для приведення отриманого виразу до необхідного вигляду винесемо зі знаменника коефіцієнт 5:

$$K(p) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(0,2/5)p + 1} = 0,4 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{0,4p + 1}$$

Порівнюючи отриманий результат з виразами для передавальних функцій елементарних ланок (табл. 3.1), доходимо висновку, що

$$K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p),$$

де $K_1(p) = k$ – передавальна функція підсилювальної ланки з коефіцієнтом підсилення $k = 0,4$;

$K_2(p) = 1/p$ – передавальна функція інтегруючої ланки;

$K_3(p) = \frac{1}{Tp+1}$ – передавальна функція інерційної ланки зі сталою часу

$T = 0,4$ с.

Приклад 2

Запишемо передавальну функцію системи

$$K(p) = \frac{2+p}{1+1,2 \cdot p + 0,2 \cdot p^2}$$

у вигляді добутку передавальних функцій елементарних ланок.

Перетворимо чисельник з урахуванням того, що вільний коефіцієнт передавальних функцій елементарних ланок завжди дорівнює одиниці. Для цього винесемо із чисельника коефіцієнт 2:

$$M(p) = 2 + p = 2(1 + 0,5p) = k(1 + \tau \cdot p),$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилювальної ланки, $k = 2$;

τ – стала часу форсуючої ланки, $\tau = 0,5$ с (табл. 3.1).

Знаменник має другий порядок відносно змінної p . Установимо, які корені має характеристичне рівняння знаменника

$$N(p) = 1 + 1,2 \cdot p + 0,2 \cdot p^2 = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 = 0.$$

Його дискримінант

$$d = a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 = 0,64 > 0.$$

Отже, корені характеристичного рівняння знаменника дійсні. У цьому випадку знаменник записуємо у вигляді, що відповідає добутку знаменників двох інерційних ланок (табл. 3.1):

$$N(p) = a_0 \cdot (1 + T_1 p)(1 + T_2 p),$$

де T_1, T_2 – сталі часу, що визначаються за виразом

$$T_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{d}}{2a_0}.$$

Після підрахунку маємо $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0,2$ с.

Таким чином, передавальна функція системи приводиться до такого вигляду:

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = k \cdot (\tau p + 1) \cdot \frac{1}{1 + T_1 p} \cdot \frac{1}{1 + T_2 p},$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилувальної ланки, $k = 2$;
 τ – стала часу форсуючої ланки, $\tau = 0,5$ с;
 T_1, T_2 – сталі часу інерційних ланок, $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0,2$ с.

Приклад 3

Запишемо передавальну функцію системи

$$K(p) = \frac{p + 2}{p^2 + p + 1}$$

у вигляді добутку передавальних функцій елементарних ланок.

Тут чисельник збігається з попереднім прикладом, тому звернемось лише до знаменника. Знаменник має також другий порядок відносно змінної p . З'ясуємо, дійсні чи комплексно-спряжені корені має характеристичне рівняння знаменника. За умовами $a_2 = 1, a_1 = 1, a_0 = 1$, тому його дискримінант $d = -3 < 0$. Отже, корені характеристичного рівняння знаменника комплексно-спряжені. У цьому випадку знаменник записуємо у вигляді, що відповідає знаменнику коливальної ланки (табл. 3.1):

$$N(p) = a_0 \cdot (1 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + T_0^2 \cdot p^2),$$

де ξ – відносний коефіцієнт згасання, $0 < \xi < 1$;
 T_0 – стала часу, с.

$$T_0 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}; \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}.$$

Після підрахунку маємо $T_0 = 1$ с, $\xi = 0,5$.

Таким чином, передавальна функція приводиться до такого вигляду:

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = k \cdot (\tau p + 1) \cdot \frac{1}{1 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + T_0^2 \cdot p^2},$$

де k – коефіцієнт підсилення підсилувальної ланки, $k = 2$;
 τ – стала часу форсуючої ланки, $\tau = 0,5$ с;
 ξ – відносний коефіцієнт згасання коливальної ланки, $\xi = 0,5$;
 T_0 – стала часу коливальної ланки, $T_0 = 1$ с.

3.2. ПІДСИЛЮВАЛЬНА ЛАНКА

Підсилювальною називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = k. \quad (3.3)$$

Ця ланка має один параметр k , який називається **коефіцієнтом підсилення**.

За передавальною функцією підсилювальної ланки запишемо її оператор передачі

$$K(D) = K(p) \Big|_{p=D} = k,$$

користуючись яким отримаємо рівняння “вхід-вихід”:

$$y(t) = K(D) \cdot x(t) = k \cdot x(t). \quad (3.4)$$

З виразу (3.4) випливає, що підсилювальна ланка є безінерційною, оскільки поточне значення її реакції визначається лише значенням коефіцієнта підсилення та поточним значенням вхідного діяння.

Коефіцієнт підсилення має розмірність $[k] = [y] / [x]$, яка залежить від фізичної природи вхідної та вихідної величин.

Після безпосередньої підстановки відповідних вхідних діянь у рівняння (3.4) отримаємо імпульсну і перехідну характеристики підсилювальної ланки:

$$k(t) = k \cdot \delta(t), \quad h(t) = k \cdot 1(t). \quad (3.5)$$

Отже, їх графіки повторюють відповідні вхідні діяння з масштабним коефіцієнтом k . Тому ця ланка має другу назву – масштабна ланка.

Запишемо частотні характеристики підсилювальної ланки:

– КЧХ

$$K(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega} = k;$$

– АЧХ

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = |k|; \quad (3.6)$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arg [K(j\omega)] = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geq 0, \\ -\pi & \text{при } k < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

– ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K(\omega) = 20 \cdot \lg |k|. \quad (3.8)$$

Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ підсилювальної ланки зображені на рис. 3.1. ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить паралельно осі абсцис на рівні $20 \cdot \lg |k|$.

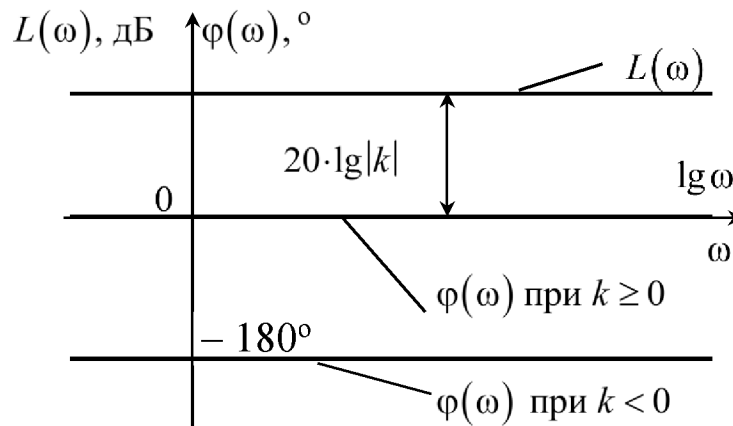


Рис. 3.1. Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ підсилювальної ланки

3.3. ДИФЕРЕНЦІЮЮЧА ЛАНКА

Диференціюючою називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = p. \quad (3.9)$$

За передавальною функцією диференціюючої ланки запишемо її оператор передачі:

$$K(D) = K(p) \Big|_{p=D} = D.$$

За допомогою оператора передачі отримаємо диференціальне рівняння “вхід-вихід”:

$$y(t) = K(D) \cdot x(t) = D \cdot x(t) = x'(t). \quad (3.10)$$

Отже, вихідне діяння диференціюючої ланки дорівнює першій похідній (швидкості зміни) вхідного діяння. Вираз (3.10) пояснює назву ланки – диференціююча.

Внаслідок того, що порядок правої частини диференціального рівняння “вхід-вихід” перевищує порядок лівої частини, ця ланка в самостійному вигляді не може бути фізично реалізована, тому її часові характеристики не розглядаються.

Запишемо частотні характеристики диференціюючої ланки:

– КЧХ

$$K(j\omega) = j \cdot \omega = \omega \cdot e^{j\pi/2};$$

– АЧХ

$$K(\omega) = \omega, \tag{3.11}$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \tag{3.12}$$

– ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \omega. \tag{3.13}$$

Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ диференціюючої ланки зображені на рис. 3.2.

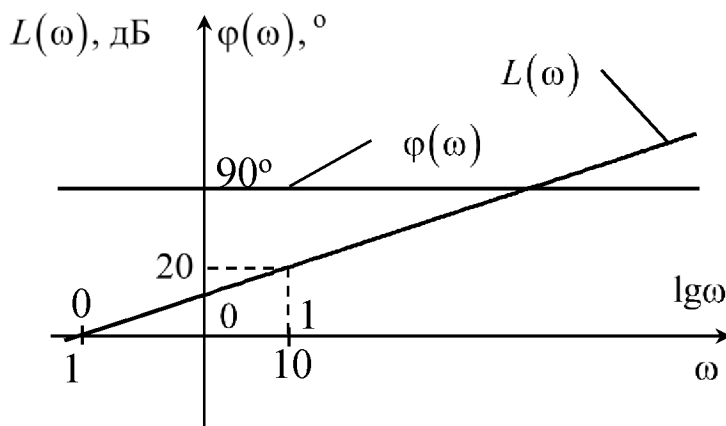


Рис. 3.2. Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ диференціюючої ланки

Оскільки аргументом ЛАЧХ є $\lg \omega$, то ЛАЧХ являє собою пряму виду $y = b \cdot x$, де $b = dL(\omega) / d(\lg \omega) = 20 \text{ дБ/дек}$. При $\lg \omega = 0$ (або $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$) вона проходить через точку з ординатою $L(1) = 0 \text{ дБ}$ та має коефіцієнт нахилу 20 дБ/дек .

3.4. ІНТЕГРУЮЧА ЛАНКА

Інтегруючою називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = \frac{1}{p}. \quad (3.14)$$

За передавальною функцією інтегруючої ланки запишемо її оператор передачі:

$$K(D) = K(p) \Big|_{p=D} = \frac{1}{D}.$$

Звідси нескладно встановити, що інтегруюча ланка описується таким диференціальним рівнянням “вхід-вихід”:

$$y'(t) = x(t). \quad (3.15)$$

Таким чином, швидкість зміни вихідного діяння інтегруючої ланки пропорційна вхідному діянню.

Після інтегрування виразу (3.15) отримаємо, що вихідне діяння інтегруючої ланки являє собою інтеграл від вхідного діяння:

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau + y(t_0), \quad (3.16)$$

де $y(t_0)$ – початкова умова при інтегруванні.

Вираз (3.16) пояснює назву ланки – інтегруюча. З нього також випливає, що після припинення вхідного діяння вихідна величина інтегруючої ланки фіксується на тому рівні, на якому вона була в момент закінчення вхідного діяння. Ця властивість інтегруючої ланки називається властивістю “пам’яті”.

За передавальною функцією інтегруючої ланки знайдемо її імпульсну і перехідну характеристики:

$$k(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1(t), \quad (3.17)$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t \cdot 1(t). \quad (3.18)$$

Графіки часових характеристик інтегруючої ланки зображені на рис. 3.3, 3.4.

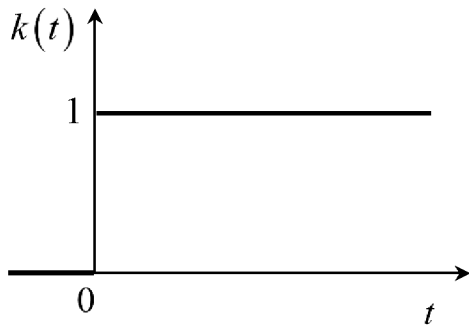


Рис. 3.3. Імпульсна характеристика інтегруючої ланки

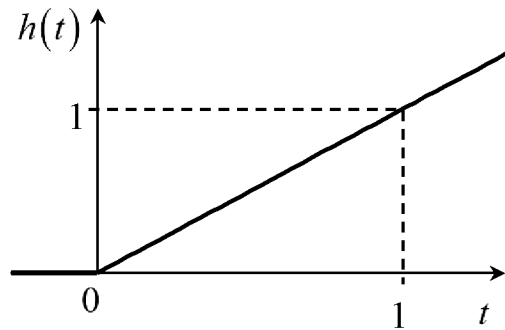


Рис. 3.4. Перехідна характеристика інтегруючої ланки

Частотні характеристики інтегруючої ланки:

– КЧХ

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2};$$

– АЧХ та ФЧХ

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \quad (3.19)$$

– ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{1}{\omega} = -20 \cdot \lg \omega. \quad (3.20)$$

Оскільки аргументом ЛАЧХ є $\lg \omega$, то ЛАЧХ являє собою пряму виду $y = b \cdot x$, де $b = dL(\omega) / d(\lg \omega) = -20$ дБ/дек. При $\lg \omega = 0$ (або $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$) вона проходить через точку з ординатою $L(1) = 0$ дБ та має коефіцієнт нахилу -20 дБ/дек.

Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ інтегруючої ланки зображені на рис. 3.5.

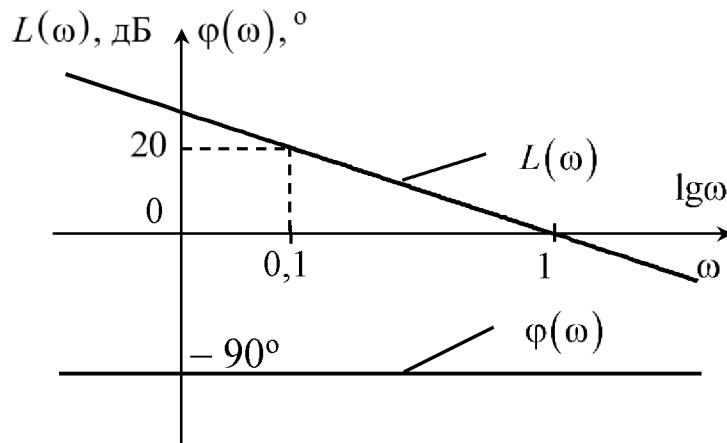


Рис. 3.5. Графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ інтегруючої ланки

3.5. ІНЕРЦІЙНА (АПЕРІОДИЧНА) ЛАНКА

Інерційною (аперіодичною) називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1}. \quad (3.21)$$

Ця ланка має параметр T , який називається сталою часу ($T > 0$, $[T] = \text{с}$).

За передавальною функцією інерційної ланки знайдемо її імпульсну і перехідну характеристики:

$$k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{T \cdot p + 1} \right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t), \quad (3.22)$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(T \cdot p + 1)} \right\} = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t). \quad (3.23)$$

Графіки часових характеристик інерційної ланки зображені на рис. 3.6, 3.7.

На практиці є багато реальних функціональних блоків, що описуються рівнянням інерційної ланки. Тому для з'ясування динаміки їх роботи

проведемо більш детальний аналіз графіка перехідної характеристики інерційної ланки.

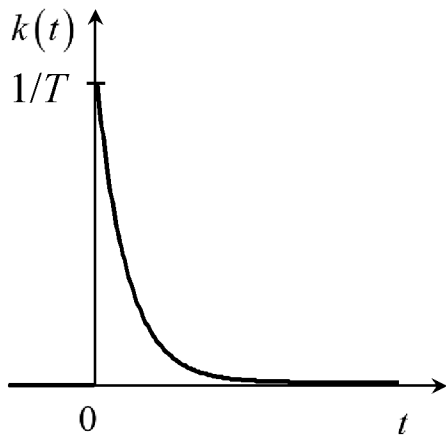


Рис. 3.6. Імпульсна характеристика інерційної ланки

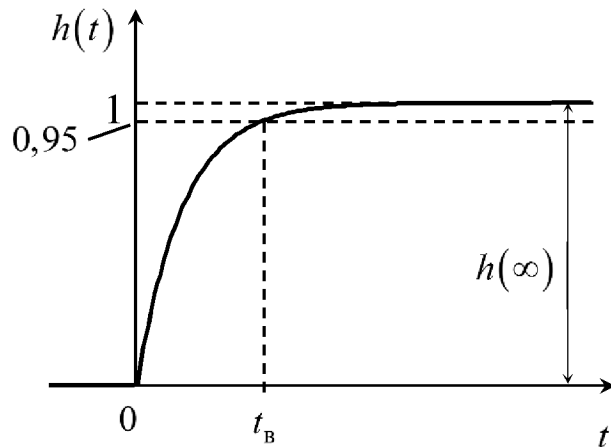


Рис. 3.7. Перехідна характеристика інерційної ланки

На початковій ділянці часу, коли $t \ll T$, можна вважати, що $\exp(-t/T) \cong 1 - t/T$, і вираз (3.23) набуває вигляду

$$h(t) = \frac{1}{T} t \cdot 1(t),$$

що практично збігається з виразом (3.18) для перехідної характеристики інтегруючої ланки. Якщо ж $t \gg T$, то $\exp(-t/T) \cong 0$, тоді

$$h(t) \rightarrow h_{уст} = 1,$$

що збігається з виразом для перехідної характеристики підсилювальної ланки. Отже, безпосередньо після прикладання вхідного діяння інерційна ланка спочатку має властивості інтегруючої, а з часом наближається за своїми властивостями до підсилювальної ланки.

Важливим кількісним показником перехідної характеристики інерційної ланки є час її встановлення t_B . Під ним розуміється інтервал часу, протягом якого перехідна характеристика досягає рівня 0,95 від усталеного значення:

$$h(t_B) = 0,95 \cdot h(\infty). \quad (3.24)$$

З виразів (3.23) і (3.24) випливає, що

$$\frac{h(t_B)}{h(\infty)} = 1 - e^{-\frac{t_B}{T}} = 0,95,$$

звідки маємо

$$t_B = -T \cdot \ln(0,05) \approx 3 \cdot T. \quad (3.25)$$

Отже, час встановлення перехідної характеристики інерційної ланки дорівнює трьом її сталим часу.

Комплексна частотна характеристика інерційної ланки –

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot T + 1}. \quad (3.26)$$

Для визначення АЧХ і ФЧХ перетворимо вираз (3.26) таким чином, щоб у ньому фігурували дійсна й уявна частини КЧХ:

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot T + 1} \cdot \frac{1 - j\omega \cdot T}{1 - j\omega \cdot T} = \frac{1}{1 + (\omega \cdot T)^2} - j \frac{\omega \cdot T}{1 + (\omega \cdot T)^2}.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ інерційної ланки визначаються виразами

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}, \quad (3.27)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\omega \cdot T) = -\arctg(\omega \cdot T). \quad (3.28)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ зображені на рис. 3.8. Як бачимо, інерційна ланка являє собою фільтр низьких частот (ФНЧ). На частотах $\omega \ll 1/T$ коефіцієнт підсилення вхідного сигналу максимальний та дорівнює одиниці, а на частотах $\omega \gg 1/T$ $K(\omega) \cong 1/(\omega \cdot T)$. Частота $\omega_c = 1/T$, на якій амплітуда вихідного гармонічного коливання дорівнює $1/\sqrt{2} \cong 0,707$ від максимального значення, називається частотою зрізу фільтра. Вона визначає ширину смуги пропускання ФНЧ.

З ФЧХ видно, що вихідний сигнал запізнюється за фазою по відношенню до вхідного на всіх частотах, причому на малих частотах фазове запізнення невелике, а на частотах $\omega \gg \omega_c$ досягає -90° . На частоті зрізу $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$.

ЛАЧХ інерційної ланки описується таким виразом:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}} = -20 \cdot \lg \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}. \quad (3.29)$$

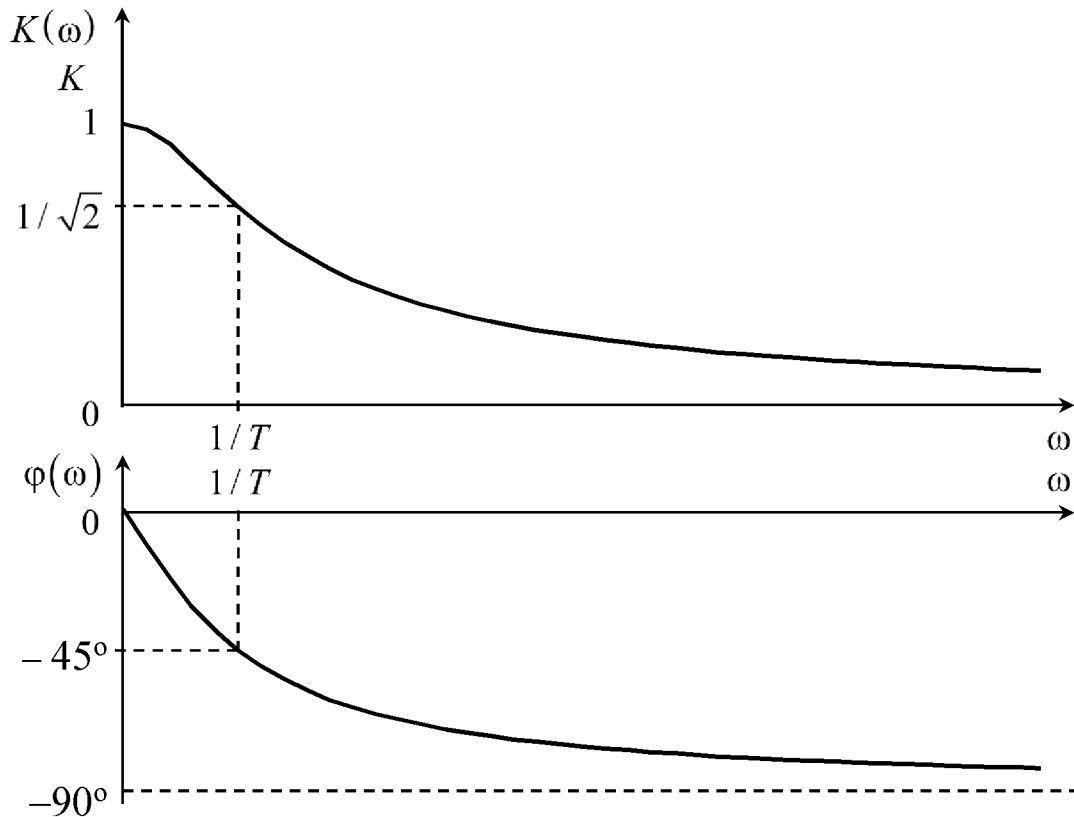


Рис. 3.8. Графіки АЧХ і ФЧХ інерційної ланки

Вона є нелінійною функцією $\lg \omega$. Для спрощення побудови зазвичай користуються асимптотичною ЛАЧХ інерційної ланки. Вона визначається двома асимптотичними наближеннями ЛАЧХ при $\omega \rightarrow 0$ і $\omega \rightarrow \infty$. Як впливає з виразу (3.29),

$$L_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} L(\omega) = 0, \quad (3.30)$$

$$L_\infty(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} L(\omega) = -20 \cdot \lg T - 20 \cdot \lg \omega. \quad (3.31)$$

Низькочастотна асимптота $L_0(\omega)$ являє собою пряму, що проходить по осі абсцис. Високочастотна асимптота $L_\infty(\omega)$ являє собою пряму, що

проходить з нахилом -20 дБ/дек. У точці спряження (з'єднання) асимптот виконується умова

$$L_0(\omega_c) = L_\infty(\omega_c).$$

Прирівнюючи вирази (3.30) та (3.31), отримуємо, що частота спряження асимптот $\omega_c = 1/T$. Отже, значення частоти спряження одночасно дорівнює значенню частоти зрізу (смуги пропускання) інерційної ланки.

Графіки асимптотичної ЛАЧХ і ЛФЧХ інерційної ланки зображені на рис. 3.9.

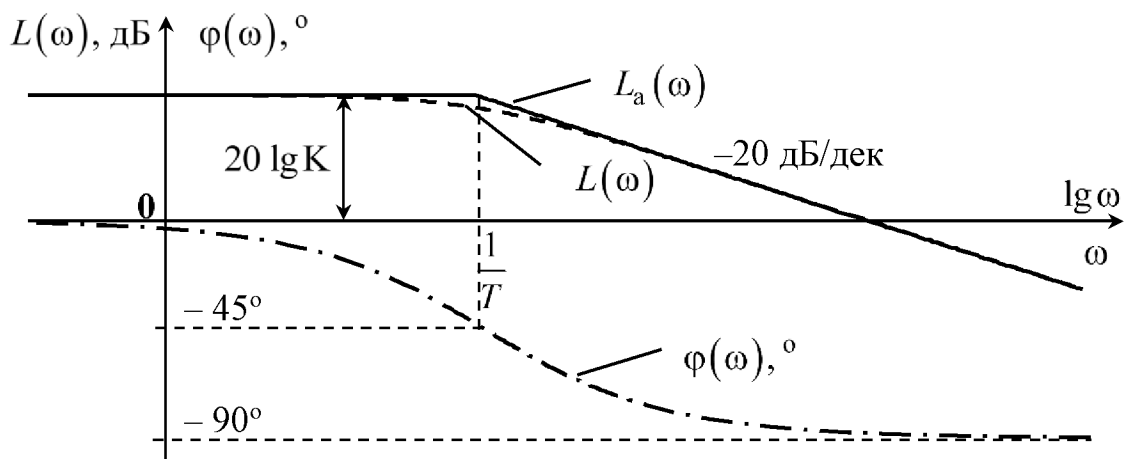


Рис. 3.9. Графіки асимптотичної ЛАЧХ і ЛФЧХ інерційної ланки

Там же пунктирною лінією показана фактична ЛАЧХ інерційної ланки. Вона добре збігається з асимптотичною ЛАЧХ при $\omega < (0,2 \dots 0,3) \cdot \omega_c$ та $\omega > (3 \dots 5) \cdot \omega_c$. На частоті $\omega_c = 1/T$ існує найбільша відмітність між фактичною та асимптотичною ЛАЧХ, яка дорівнює $20 \cdot \lg(1/\sqrt{2}) = -3$ дБ.

3.6. ФОРСУЮЧА ЛАНКА

Форсуючою називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = \tau \cdot p + 1. \quad (3.32)$$

Параметр τ називається сталою часу ланки ($[\tau] = \text{с}, \tau > 0$).

За передавальною функцією форсуючої ланки запишемо її оператор передачі:

$$K(D) = \tau \cdot D + 1.$$

Отже, форсуюча ланка описується таким диференціальним рівнянням “вхід-вихід”:

$$y(t) = (\tau \cdot D + 1)x(t) = \tau \cdot x'(t) + x(t). \quad (3.33)$$

Права частина виразу (3.33) містить першу похідну вхідної величини, а ліва не містить похідних, що не відповідає принципу причинності. Тому форсуюча ланка окремо фізично не реалізується і її часові характеристики не розглядаються.

КЧХ форсуючої ланки дорівнює

$$K(j\omega) = K(p)|_{p=j\omega} = 1 + j\omega \cdot \tau.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ форсуючої ланки визначаються виразами

$$K(\omega) = \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}, \quad (3.34)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega \cdot \tau). \quad (3.35)$$

При збільшенні частоти вхідного гармонічного коливання вихідне коливання форсуючої ланки зростає за амплітудою та випереджає за фазою вхідний сигнал.

ЛАЧХ форсуючої ланки –

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}. \quad (3.36)$$

Вона є нелінійною функцією $\lg \omega$. Тому більше практичне використання знайшла асимптотична ЛАЧХ форсуючої ланки:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq \frac{1}{\tau}, \\ 20 \cdot \lg \frac{1}{\tau} + 20 \cdot \lg \omega & \text{при } \omega \geq \frac{1}{\tau}, \end{cases} \quad (3.37)$$

яку вводять аналогічно асимптотичній ЛАЧХ інерційної ланки.

Відповідно до виразу (3.37) асимптотична ЛАЧХ форсуючої ланки складається з відрізків двох прямих, що з'єднуються в точці з частотою, оберненою сталій часу ланки $\omega_c = 1/\tau$. Ліворуч від частоти спряження вона

йде по осі абсцис, а праворуч від частоти спряження вона йде з додатним нахилом 20 дБ/дек.

Графіки асимптотичної ЛАЧХ і ЛФЧХ форсуючої ланки зображені на рис. 3.10.

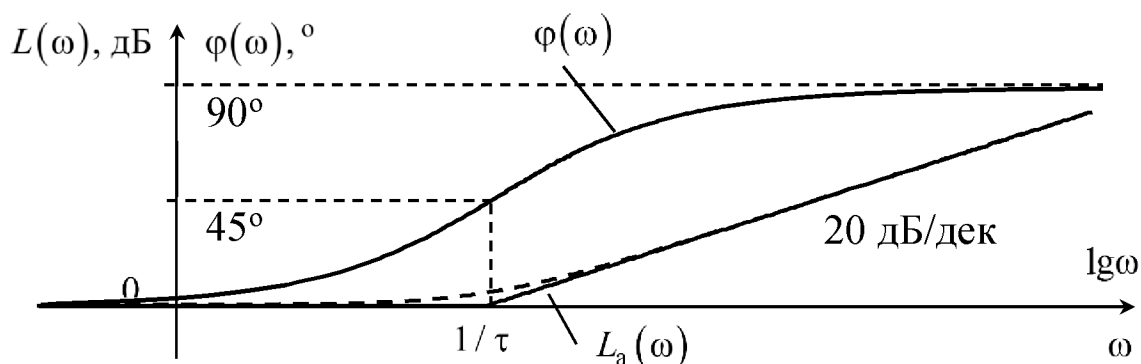


Рис. 3.10. Графіки асимптотичної ЛАЧХ і ЛФЧХ форсуючої ланки

Пунктирною лінією на рис. 3.10 зображена фактична ЛАЧХ форсуючої ланки. Вона збігається з асимптотичною ЛАЧХ при $\omega \rightarrow 0$ і $\omega \rightarrow \infty$. Найбільша відмітність між ними виникає на частоті спряження асимптот, де

$$|L(\omega_c) - L_a(\omega_c)| = 20 \cdot \lg \sqrt{2} = 3 \text{ дБ}.$$

3.7. КОЛИВАЛЬНА ЛАНКА

Коливальною називається ланка, яка має таку передавальну функцію:

$$K(p) = \frac{1}{T_0^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T_0 \cdot p + 1} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}. \quad (3.38)$$

Параметр T_0 називається сталою часу ($[T_0] = \text{с}$, $T_0 > 0$), а параметр ξ – відносним коефіцієнтом згасання, $0 < \xi < 1$. В іншому варіанті запису замість сталої часу T_0 використовується параметр $\omega_0 = 1/T_0$, який називається частотою власних незгасаючих коливань.

Знайдемо корені характеристичного рівняння коливальної ланки:

$$N(p) = p^2 + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = 0;$$

$$p_{1,2} = -\xi \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi \cdot \omega_0 \pm j\omega_B, \quad (3.39)$$

де $\omega_B = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ – власна частота коливань ланки.

Отже, при $0 < \xi < 1$ корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими. Відзначимо, що при $\xi \geq 1$ корені стають дійсними і коливальна ланка перетворюється на дві інерційні ланки.

Для відшукування перехідної характеристики скористаємось теоремою розкладання Хевісайда:

$$h(t) = \left[\frac{M(0)}{N(0)} + \frac{M(p_1)}{p_1 \cdot N'(p_1)} e^{p_1 \cdot t} + \frac{M(p_2)}{p_2 \cdot N'(p_2)} e^{p_2 \cdot t} \right] \cdot 1(t),$$

де $M(0) = M(p_i) = N(0) = 1$; $N'(p_i) = \left. \frac{dN(p)}{dp} \right|_{p=p_i} = 2\xi \cdot \omega_0 + 2p_i$.

Після підстановки значень коренів та проведення алгебраїчних перетворень отримаємо такий кінцевий результат:

$$h(t) = \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_B \cdot t + \theta) \right] \cdot 1(t), \quad (3.40)$$

де $\theta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}$ – початковий фазовий зсув.

Перехідна характеристика коливальної ланки має вигляд згасаючих коливань, які з часом устанавлюються на рівні усталеного значення $h(\infty) = 1$ (рис. 3.11).

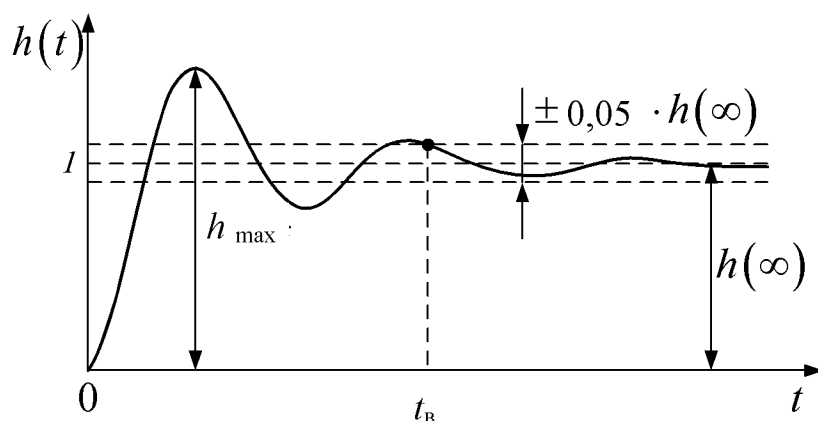


Рис. 3.11. Перехідна характеристика коливальної ланки

На практиці є багато реальних функціональних блоків, що описуються рівнянням коливальної ланки. Тому для з'ясування динаміки їх роботи проведемо більш детальний аналіз графіка її перехідної характеристики.

Основними показниками, що кількісно характеризують перехідну характеристику коливальної ланки, є час встановлення t_B та величина відносного максимального викиду σ .

Для коливальної ланки час встановлення t_B визначається за моментом, коли перехідна характеристика входить до меж смуги $\pm 0,05 \cdot h(\infty)$ відносно усталеного значення (рис. 3.11).

Величина відносного максимального викиду характеризує ступінь коливальності перехідної характеристики і визначається виразом

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100, \quad (3.41)$$

де h_{\max} – максимальне значення перехідної характеристики.

В інженерній практиці широке застосування знайшла нормована перехідна характеристика коливальної ланки, яку отримують з перехідної характеристики шляхом введення нормованого (безрозмірного) часу $\tau = t / T_0$:

$$h_H(\tau) = h(t / T_0) = \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \tau}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin\left(\tau \sqrt{1 - \xi^2} + \theta\right) \right] \cdot 1(\tau). \quad (3.42)$$

З виразу для нормованої перехідної характеристики випливає, що вона не залежить від сталої часу T_0 . Перехід від нормованого часу до абсолютного здійснюється за правилом $t = \tau \cdot T_0$, тому абсолютний час встановлення є прямо пропорційним сталій часу ланки:

$$t_B = \tau_B \cdot T_0, \quad (3.43)$$

де τ_B – безрозмірний час встановлення, що визначається за моментом входу нормованої перехідної характеристики в межах $0,95 \dots 1,05$.

Сімейство нормованих перехідних характеристик коливальної ланки для різних значень відносного коефіцієнта згасання ξ зображено на рис. 3.12. Користуючись ним, проведемо аналіз впливу відносного коефіцієнта згасання на перехідну характеристику.

Залежність нормованого часу встановлення $\tau_B = f_1(\xi)$ зображена на рис. 3.13. Зі збільшенням відносного коефіцієнта згасання ξ час встановлення спочатку зменшується у зв'язку зі зменшенням ступеня коливальності перехідної характеристики, а потім починає зростати, що обумовлено зменшенням коливальної складової перехідної характеристики. Мінімальне значення часу встановлення спостерігається при $\xi \approx 0,7 \dots 0,8$.

Залежність відносного максимального викиду $\sigma = f_2(\xi)$ зображена на рис. 3.14. Зі збільшенням відносного коефіцієнта згасання ξ зменшується ступінь коливальності перехідної характеристики, і тому відносний максимальний викид також монотонно зменшується від 100 до 0 %.

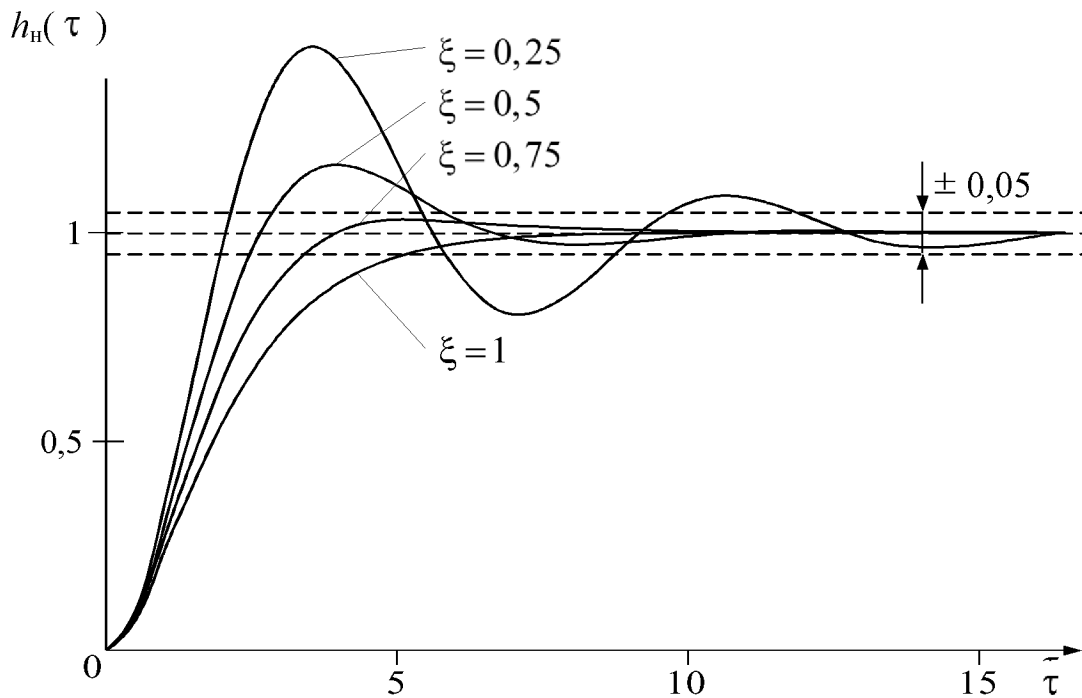


Рис. 3.12. Сімейство нормованих перехідних характеристик коливальної ланки для різних значень відносного коефіцієнта згасання ξ

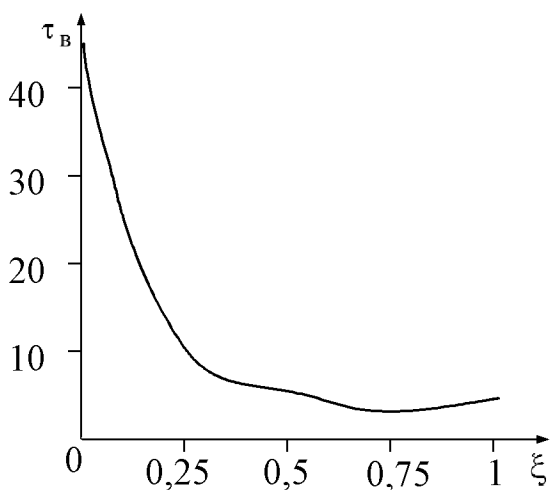


Рис. 3.13. Залежність нормованого часу встановлення від коефіцієнта згасання ξ

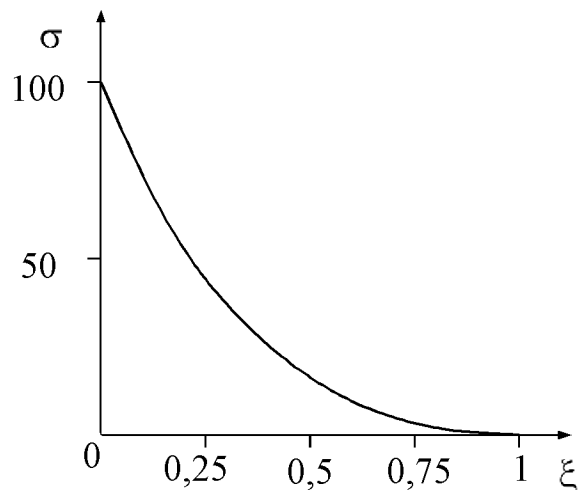


Рис. 3.14. Залежність відносного максимального викиду від коефіцієнта згасання ξ

Залежність $\sigma = f_2(\xi)$, що зображена на рис. 3.14, можна отримати аналітично. Для цього знайдемо максимальне значення нормованої перехідної характеристики h_{\max} , якого вона досягає в момент першого максимуму τ_1 .

Точки, в яких нормована перехідна характеристика має екстремум, визначаються з виразу

$$\frac{dh_H(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Після диференціювання виразу (3.42) отримуємо, що в цих точках

$$\sin\left(\tau\sqrt{1-\xi^2}\right) = 0.$$

Точка першого максимуму існує при

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.44)$$

Підставляючи (3.44) у вираз (3.42), отримуємо максимальне значення нормованої перехідної характеристики:

$$h_{H\max} = 1 + e^{-\pi/\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.45)$$

Тоді з урахуванням того, що усталене значення нормованої перехідної характеристики дорівнює одиниці, маємо такий кінцевий результат:

$$\sigma = e^{-\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \cdot 100\%. \quad (3.46)$$

Комплексна частотна характеристика коливальної ланки може бути знайдена за передавальною функцією (3.38) шляхом відповідної формальної заміни

$$K(j\omega) = K(p)\Big|_{p=j\omega} = \frac{1}{1 - (\omega \cdot T_0)^2 + j\omega \cdot 2 \cdot \xi \cdot T_0}.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ коливальної ланки визначаються виразами

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega \cdot T_0)^2\right)^2 + (2\xi \cdot T_0 \cdot \omega)^2}}; \quad (3.47)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\xi \cdot T_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot T_0)^2} & \text{при } \omega < \frac{1}{T_0}; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \omega = \frac{1}{T_0}; \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\xi \cdot T_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot T_0)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T_0}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Частотні характеристики коливальної ланки істотно залежать від значення відносного коефіцієнта згасання ξ : при $0,707 < \xi < 1$ вона має властивості фільтра нижніх частот, а при $\xi < 0,707$ – властивості резонансного фільтра. В останньому випадку АЧХ має максимум

$$K_{\max} = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3.49)$$

на резонансній частоті

$$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}}{T_0}. \quad (3.50)$$

ЛАЧХ коливальної ланки впливає з виразу (3.47):

$$L(\omega) = -20 \cdot \lg \sqrt{\left(1 - (\omega \cdot T_0)^2\right)^2 + (2\xi \cdot T_0 \cdot \omega)^2}. \quad (3.51)$$

Вона є нелінійною функцією $\lg \omega$. Для спрощення побудови зазвичай користуються асимптотичною ЛАЧХ коливальної ланки:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_0}, \\ 40 \cdot \lg \frac{1}{T_0} - 40 \cdot \lg \omega & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T_0}, \end{cases} \quad (3.52)$$

яку вводять аналогічно асимптотичній ЛАЧХ інерційної ланки.

Відповідно до виразу (3.52) асимптотична ЛАЧХ коливальної ланки складається з відрізків двох прямих, що з'єднуються (спряжуються) в точці з частотою

$$\omega_0 = 1/T_0. \quad (3.53)$$

Ліворуч від частоти спряження вона йде по осі абсцис, а праворуч від частоти спряження вона йде з нахилом -40 дБ/дек.

Графік асимптотичної ЛАЧХ коливальної ланки зображений на рис. 3.15 суцільною лінією, а графіки фактичних ЛАЧХ для двох значень відносного коефіцієнта згасання ξ – пунктирною лінією.

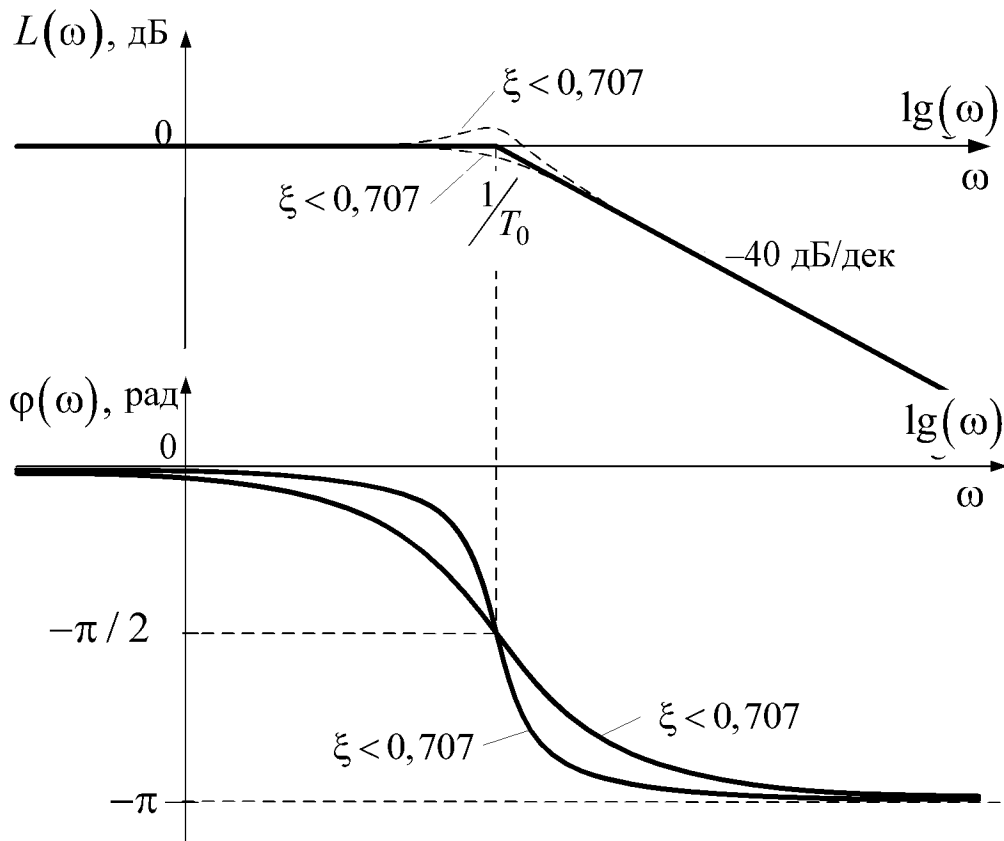


Рис. 3.15. Графіки асимптотичної ЛАЧХ та ФЧХ коливальної ланки

Асимптотична ЛАЧХ добре збігається з фактичними при $\omega < (0.1 \dots 0.5) \cdot \omega_0$ і $\omega > (2 \dots 10) \cdot \omega_0$. Найбільша відмітність між ними спостерігається поблизу частот резонансу ω_p та спряження асимптот ω_0 . На цих частотах значення фактичних ЛАЧХ суттєво залежать від величини

відносного коефіцієнта згасання ξ . Як випливає з виразів (3.49), (3.51) та (3.53), на частоті резонансу ω_p фактична ЛАЧХ має максимальне значення:

$$L_{\max} = 20 \cdot \lg K_{\max} = 20 \cdot \lg \left(\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right), \quad (3.54)$$

а на частоті спряження асимптот ω_0 вона дорівнює

$$L(\omega_0) = 20 \cdot \lg(1/(2\xi)). \quad (3.55)$$

На рис. 3.15 також наведені графіки ЛФЧХ коливальної ланки для двох значень відносного коефіцієнта згасання ξ .

3.8. ФОРСУЮЧА ЛАНКА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Форсуюча ланка другого порядку має таку передавальну функцію:

$$K(p) = \tau_0^2 \cdot p^2 + 2\eta \cdot \tau_0 \cdot p + 1. \quad (3.56)$$

Параметр τ_0 називається сталою часу ($[\tau_0] = \text{с}$, $\tau_0 > 0$), а параметр η , $0 < \eta < 1$, спеціальної назви не має.

Відповідно до виразу (3.56) вихідна величина форсуючої ланки другого порядку залежить від першої та другої похідних вхідної, що не відповідає принципу причинності. Тому форсуюча ланка другого порядку окремо фізично не реалізується та її часові характеристики не розглядаються.

Запишемо КЧХ форсуючої ланки другого порядку:

$$K(j\omega) = K(p)|_{p=j\omega} = 1 - (\omega \cdot \tau_0)^2 + j2\eta \cdot \tau_0 \cdot \omega. \quad (3.57)$$

З виразу (3.57) випливає, що АЧХ і ФЧХ форсуючої ланки другого порядку визначаються виразами

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - (\omega \cdot \tau_0)^2\right)^2 + (2\eta \cdot \tau_0 \cdot \omega)^2}; \quad (3.58)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2\eta \cdot \tau_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot \tau_0)^2} & \text{при } \omega < \frac{1}{\tau_0}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } \omega = \frac{1}{\tau_0}, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\eta \cdot \tau_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot \tau_0)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{\tau_0}. \end{cases} \quad (3.59)$$

ЛАЧХ форсуючої ланки другого порядку –

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \sqrt{(1 - (\omega \cdot \tau_0)^2)^2 + (2\eta \cdot \tau_0 \cdot \omega)^2}. \quad (3.60)$$

Асимптотична ЛАЧХ форсуючої ланки другого порядку визначається виразами

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq \frac{1}{\tau_0}, \\ 40 \cdot \lg \tau_0 + 40 \cdot \lg \omega & \text{при } \omega \geq \frac{1}{\tau_0}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Вона складається з відрізків двох прямих, що з'єднуються в точці з частотою, оберненою сталій часу ланки $\omega_0 = 1/\tau_0$. Ліворуч від частоти спряження вона йде по осі абсцис, а праворуч від частоти спряження вона йде з нахилом 40 дБ/дек. Графік асимптотичної ЛАЧХ форсуючої ланки другого порядку зображений на рис. 3.16 суцільною лінією, а фактичних ЛАЧХ для двох значень параметра η – пунктирними лініями. Асимптотична ЛАЧХ добре збігається з фактичними ЛАЧХ при $\omega < (0,1 \dots 0,5) \cdot \omega_0$ і $\omega > (2 \dots 10) \cdot \omega_0$. Найбільша відмітність між ними спостерігається поблизу частоти спряження асимптот ω_0 . На цих частотах значення фактичних ЛАЧХ суттєво залежать від величини параметра η .

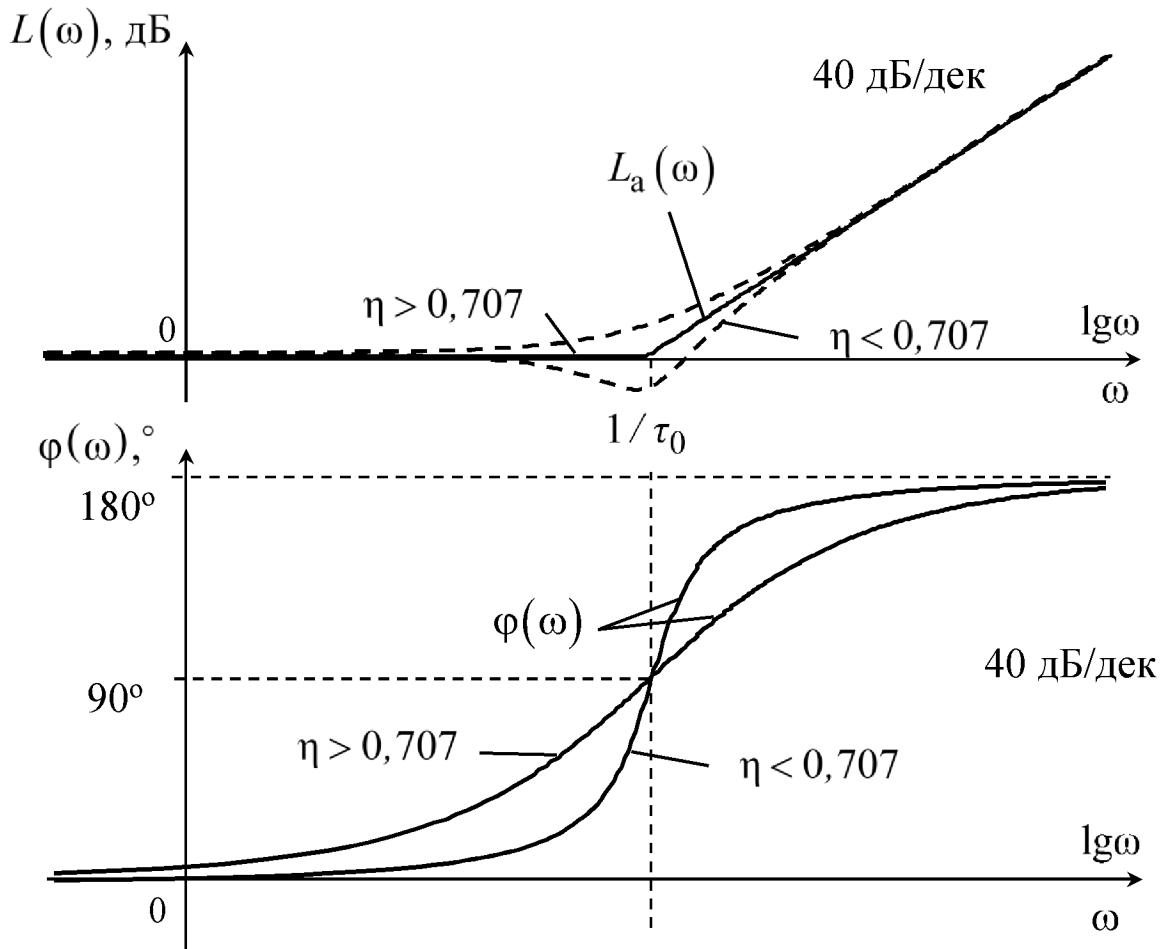


Рис. 3.16. Графіки ЛАЧХ та ФЧХ форсуючої ланки другого порядку

3.9. ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ

До типових динамічних ланок належать комбінації з добуток передавальних функцій елементарних ланок, які мають порядок не більше другого та можуть бути фізично реалізовані (тобто порядок чисельника не перевищує порядку знаменника).

Наприклад, типовими динамічними ланками є добуток підсилювальної ланки з інтегруючою, інерційною та коливальною ланками:

$$K(p) = \frac{k}{p}; \quad K(p) = \frac{k}{1+T \cdot p}; \quad K(p) = \frac{k}{1+2\xi \cdot T_0 \cdot p + T_0^2 \cdot p^2}.$$

Вони називаються типовими інтегруючою, інерційною та коливальною ланками. Вихідна величина таких типових ланок відрізняється у k разів по відношенню до вихідної величини відповідних елементарних ланок:

$$y_{\text{тип}}(t) = k \cdot y_{\text{ел}}(t). \quad (3.62)$$

Тому їх характеристики також змінюються з масштабом k . АЧХ, ЛАЧХ та ФЧХ таких типових ланок будуть визначатись виразами

$$K_{\text{тип}}(\omega) = |k| \cdot K_{\text{ел}}(\omega);$$

$$L_{\text{тип}}(\omega) = 20 \cdot \lg K_{\text{тип}}(\omega) = 20 \cdot \lg |k| + L_{\text{ел}}(\omega); \quad (3.63)$$

$$\varphi_{\text{тип}}(\omega) = \begin{cases} \varphi_{\text{ел}}(\omega) & \text{при } k \geq 0, \\ -\pi + \varphi_{\text{ел}}(\omega) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Спеціальні назви отримали типові ланки з такими передавальними функціями:

– інерційна ланка другого порядку –

$$K(p) = \frac{k}{(1+T_1 \cdot p)(1+T_2 \cdot p)} = \frac{k}{1+2\xi \cdot T_0 \cdot p + T_0^2 \cdot p^2}, \quad (3.64)$$

де

$$T_0 = \sqrt{T_1 \cdot T_2}, \quad \xi = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 \cdot T_2}}, \quad (3.65)$$

причому тут на відміну від коливальної ланки $\xi \geq 1$;

– реальна диференціююча ланка –

$$K(p) = \frac{k \cdot p}{1+T \cdot p}, \quad (3.66)$$

яка є комбінацією підсилювальної, диференціюючої та інерційної елементарних ланок;

– ізодромна ланка –

$$K(p) = k \frac{1+\tau \cdot p}{p}, \quad (3.67)$$

яка є комбінацією підсилювальної, форсуючої та інтегруючої елементарних ланок.

Широке застосування у коректуючих пристроях САК також знайшли типові ланки з такими передавальними функціями:

$$K(p) = k \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + T \cdot p}; \quad (3.68)$$

$$K(p) = k \frac{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p)}. \quad (3.69)$$

3.10. НЕМІНІМАЛЬНО-ФАЗОВІ ЛАНКИ

Усі розглянуті вище елементарні ланки відносяться до мінімально-фазових. Корені характеристичного рівняння мінімально-фазових ланок мають нульові або від'ємні значення.

Ланка називається немінимально-фазовою, якщо корінь її характеристичного рівняння є додатним.

Прикладами немінимально-фазових ланок є ланки з такими передавальними функціями:

$$K(p) = \frac{1}{T \cdot p - 1}; \quad (3.70)$$

$$K(p) = \frac{1}{T_0^2 \cdot p^2 - 2\xi \cdot T_0 \cdot p + 1}. \quad (3.71)$$

Для немінимально-фазової ланки характерним є те, що її ФЧХ має абсолютне значення більше, ніж мінімально-фазова ланка з такою самою АЧХ. Наприклад, на рис. 3.17 наведені ЛАЧХ (Magnitude) та ЛФЧХ (Phase) інерційної ланки (пунктир) та ланки з передавальною функцією (3.70) (суцільна лінія), розраховані у пакеті Matlab. Як бачимо, немінимально-фазова ланка (3.70) має ФЧХ, абсолютне значення якої досягає 180° .

До немінимально-фазових також відноситься так звана ланка запізнення, яка відображає ефект “чистого” (без спотворень) запізнення вихідної величини відносно вхідної. Ланка запізнення описується таким рівнянням “вхід-вихід”:

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (3.72)$$

де τ – час запізнення, $\tau > 0$.

Підставляючи у вираз (3.72) вхідне діяння у вигляді δ -функції, отримаємо імпульсну характеристику ланки запізнення –

$$k(t) = \delta(t - \tau). \quad (3.73)$$

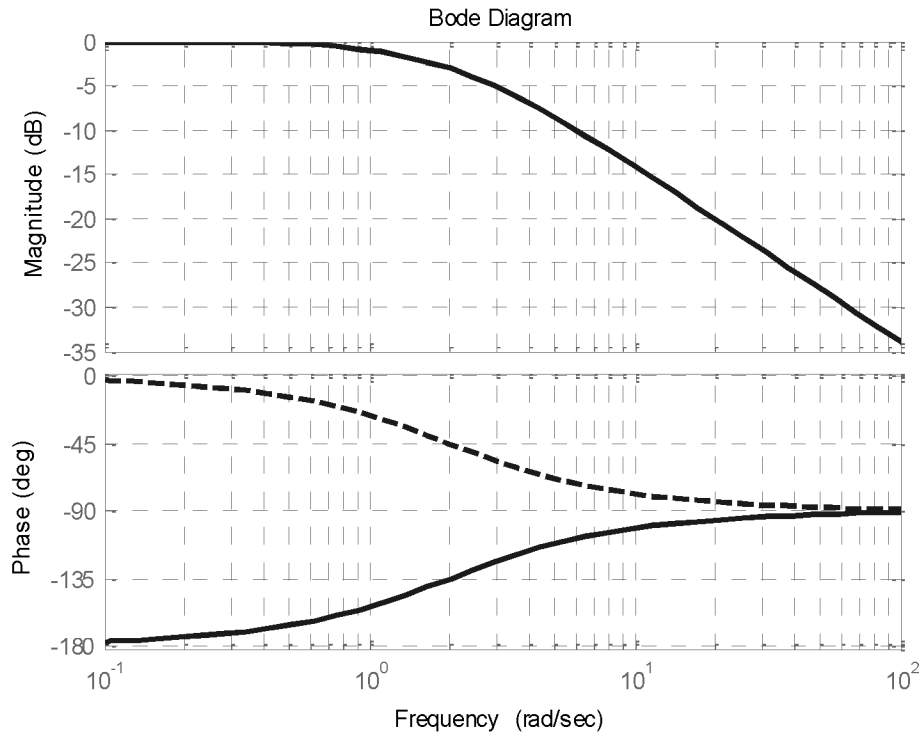


Рис. 3.17. ЛАЧХ (Magnitude) та ЛФЧХ (Phase) інерційної ланки (пунктир) та ланки з передавальною функцією (3.70) (суцільна лінія), розраховані у пакеті Matlab

На основі теореми про запізнення оригіналу (дод. 1) отримаємо передавальну функцію ланки запізнення

$$K(p) = L\{k(t)\} = e^{-p\tau}. \quad (3.74)$$

Відповідно частотні характеристики ланки запізнення –

$$K(j\omega) = K(p)\Big|_{p=j\omega} = e^{-j\omega\tau}, \quad (3.75)$$

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = 1, \quad (3.76)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[K(j\omega)] = -\omega \cdot \tau. \quad (3.77)$$

Отже, ланка запізнення не змінює амплітуду сигналу, проте здійснює його від'ємний фазовий зсув (запізнення), величина якого пропорційна частоті вхідного сигналу (рис. 3.18).

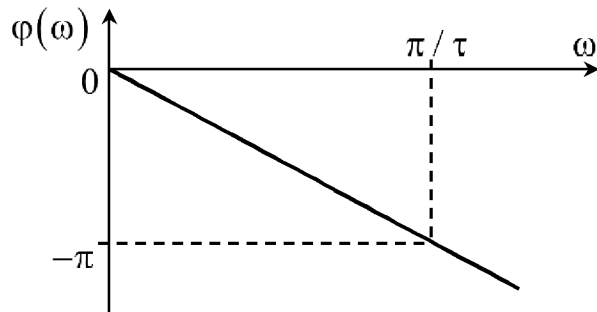


Рис. 3.18. ФЧХ ланки запізнення

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення поняття “елементарна ланка”.
2. Запишіть передавальні функції елементарних ланок і вкажіть їх параметри.
3. У заданих передавальних функціях виділіть елементарні ланки і вкажіть їх параметри:

$$\text{а) } K(p) = \frac{(0,4p+1) \cdot (p+1)}{2p}; \quad \text{б) } K(p) = \frac{10(0,02p+1)}{p \cdot (50p+5)};$$

$$\text{в) } K(p) = \frac{2p \cdot (10p+10)}{4p+1}; \quad \text{г) } K(p) = \frac{0,5p+1}{p^2 \cdot (2p+4)}.$$

4. Побудуйте ЛАЧХ та ЛФЧХ:
 - а) підсилювальної ланки;
 - б) інтегруючої ланки;
 - в) диференціюючої ланки.
5. Побудуйте асимптотичну ЛАЧХ та ЛФЧХ:
 - а) інерційної ланки;
 - б) форсуючої ланки;
 - в) коливальної ланки;
 - г) форсуючої ланки другого порядку.
6. В області яких частот фактична ЛАЧХ інерційної ланки відрізняється від асимптотичної ЛАЧХ? Поясніть твердження.
7. Знайдіть аналітичний вираз та побудуйте графік перехідної характеристики інерційної ланки зі сталою часу $T = 2$ с.
8. На рис. 3.19. наведена перехідна характеристика інерційної ланки. Визначте її параметри та запишіть передавальну функцію.

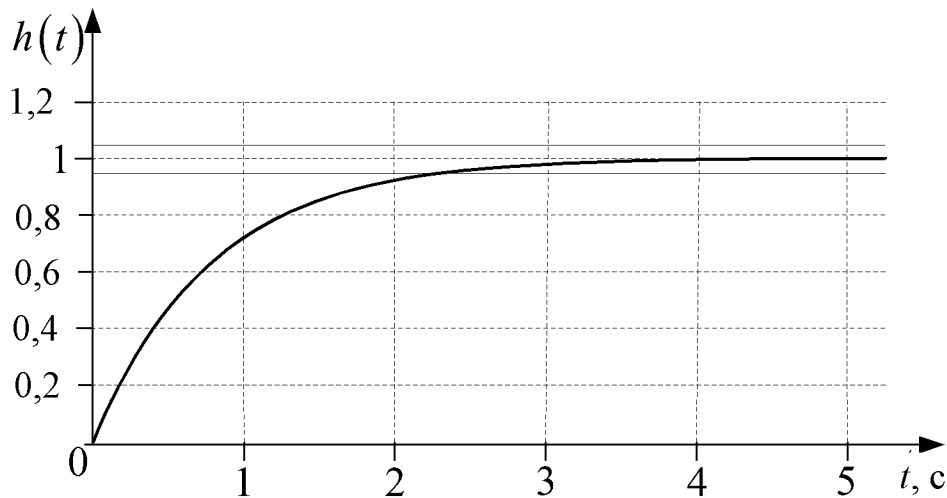


Рис. 3.19. Перехідна характеристика інерційної ланки

9. Яким буде усталене значення $h(\infty)$ та час встановлення $t_{\text{в}}$ перехідної характеристики ланки, якщо її передавальна функція

$$K(p) = \frac{2}{p+2}.$$

10. Нарисуйте загальний вигляд перехідної характеристики коливальної ланки і поясніть, як визначається час встановлення та відносний максимальний викид.

11. Поясніть, як впливає відносний коефіцієнт згасання ξ на хід ЛАЧХ коливальної ланки.

12. Диференціальне рівняння “вхід-вихід” динамічної системи має вигляд

$$5 \cdot y'(t) + 2 \cdot y(t) = 10 \cdot x(t).$$

Для наведеного рівняння:

1) визначте оператор передачі системи $K(D)$;

2) визначте передавальну функцію $K(p)$;

3) побудуйте асимптотичну ЛАЧХ системи.

13. На рис. 3.20 наведена ЛАЧХ елементарної ланки. Запишіть її передавальну функцію та визначте параметри.

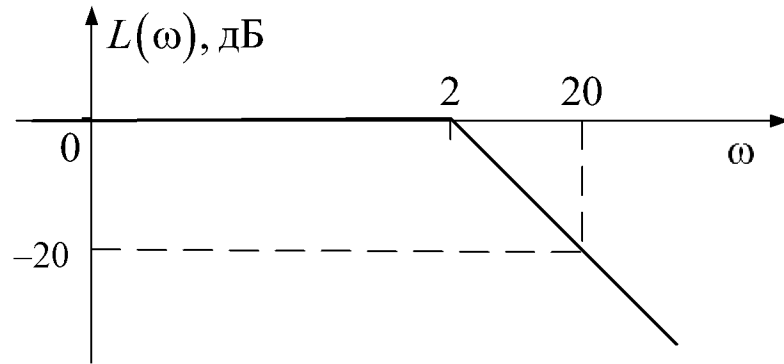


Рис. 3.20. ЛАЧХ елементарної ланки

14. Для значень сімейства нормованих перехідних характеристик коливальної ланки (рис. 3.12), поясніть залежність:

а) відносного максимального викиду σ від відносного коефіцієнта згасання ξ ;

б) часу встановлення $t_{\text{в}}$ від відносного коефіцієнта згасання ξ ;

в) відносного максимального викиду σ від сталої часу T_0 при фіксованому значенні відносного коефіцієнта згасання ξ ;

г) часу встановлення $t_{\text{в}}$ від сталої часу T_0 при фіксованому значенні відносного коефіцієнта згасання ξ .

15. Визначте час встановлення та відносний максимальний викид перехідної характеристики коливальної ланки (рис. 3.21).

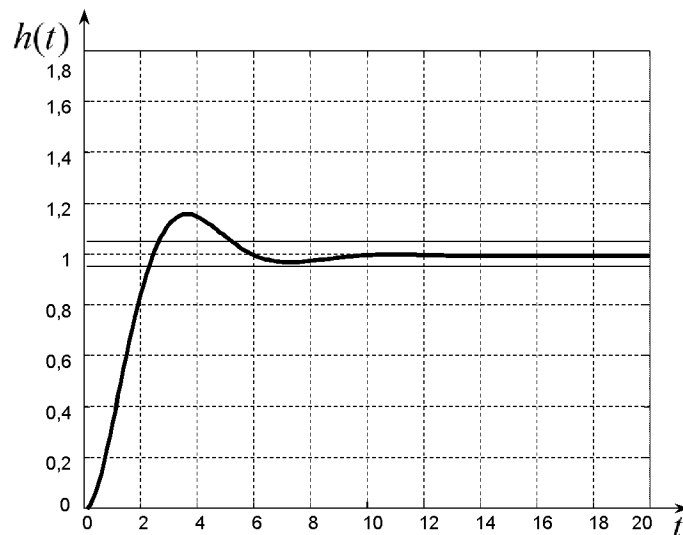


Рис. 3.21. Перехідна характеристика коливальної ланки

4. СХЕМИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ І ОСНОВНІ РІВНЯННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

4.1. ПОНЯТТЯ СХЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ САК

Під час вивчення систем автоматичного керування, які мають складну функціональну структуру, одержати загальне рівняння, що описує систему в цілому, достатньо складно. Тому систему спочатку поділяють на окремі частини, знаходять математичні моделі цих частин, а потім, поєднуючи їх, отримують повну математичну модель системи.

Розподіл системи на окремі частини доцільно здійснювати таким чином, щоб математичний опис процесів у цих частинах не змінювався під час подальшого об'єднання рівнянь їх руху з рівняннями інших частин системи. Окремі частини системи, які задовольняють вказану умову, називають *ланками спрямованої дії*.

Відзначимо, що розподіл системи на ланки спрямованої дії не завжди збігається з розподілом її на функціональні блоки. Так, у рівняннях динаміки виконавчого двигуна постійного струму фігурують вихідний опір джерела живлення і моменти сил опору та інерції навантаження, тому математична модель двигуна як ланки спрямованої дії буде мати у своєму складі відповідні параметри джерела живлення та навантаження [1, 12, 14].

Для відшукування рівнянь і операторів передачі систем, що мають складну структуру, застосовують методи, засновані на побудові та перетвореннях схеми математичної моделі системи. *Схема математичної моделі системи* являє собою графічне відображення сукупності схем математичних моделей окремих динамічних ланок (ланок спрямованої дії, на які була розподілена система) та зв'язків між ними.

Залежно від обраного способу математичного опису схема математичної моделі системи може бути побудована в часовій області, в області зображень за Лапласом або в частотній області.

При побудові схеми математичної моделі в часовій області всі діяння розглядаються як функції часу, а лінійні динамічні ланки – як оператор передачі (рис. 4.1, *a*). Нелінійні безінерційні ланки позначаються видом функціонального перетворення $F[\square]$, якому піддається вхідна величина (рис. 4.1, *б*). Безінерційні ланки, в яких здійснюється операція додавання або віднімання двох величин, позначаються кружком з двома входами та одним виходом (рис. 4.1, *в*). При відніманні біля стрілки з від'ємником ставлять знак “–”, а при додаванні знаків можна не ставити. Поширення однієї величини у декількох напрямках на схемі позначається точкою розгалуження (рис. 4.1, *г*). Її особливістю є те, що значення величини не залежить від наявності та кількості розгалужень (така властивість обумовлена розподілом системи на ланки спрямованої дії).

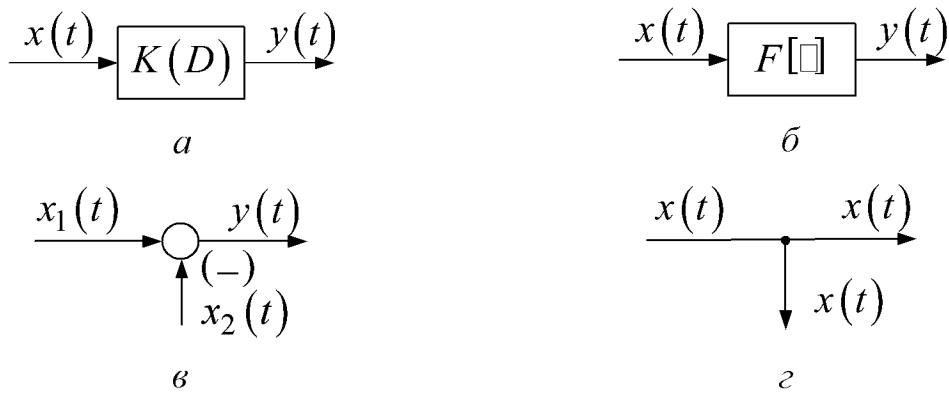


Рис. 4.1. Схеми математичних моделей представлені: *a* – оператором передачі; *б* – функціональним перетворенням; *в* – у вигляді функціонального з’єднання; *г* – у вигляді розгалуження

При побудові схеми математичної моделі в частотній області всі діяння подаються за допомогою спектрів (перетворень Фур’є), а лінійні інерційні ланки – за допомогою комплексних частотних характеристик (рис. 4.2, *a*). При побудові схеми математичної моделі в області зображень всі діяння подаються за допомогою перетворень Лапласа, а лінійні інерційні ланки – за допомогою передавальних функцій (рис. 4.2, *б*).



Рис. 4.2. Схеми математичних моделей представлені: *a* – у частотній області; *б* – в області зображень

Відзначимо, що оператори передачі, передавальні функції і КЧХ лінійних стаціонарних динамічних систем мають властивості лінійності та комутативності. Тому всі співвідношення, отримані для будь-якої моделі, мають цілком аналогічний запис і для інших моделей із відповідною заміною змінних та характеристик. З урахуванням цього надалі обмежимося розглядом лише схем математичних моделей у часовій області.

4.2. ВИДИ З’ЄДНАНЬ ДИНАМІЧНИХ ЛАНОК

На схемі математичної моделі всі ланки з’єднані між собою. Виділяють такі види їх з’єднань: послідовне, паралельне та зустрічно-паралельне. Розглянемо схеми з’єднань та основні співвідношення, що їх характеризують.

При послідовному з'єднанні ланок вихідне діяння попередньої ланки є вхідним діянням наступної (рис. 4.3).

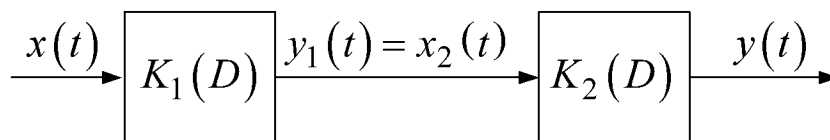


Рис. 4.3. Математична модель послідовного з'єднання ланок

Замінімо послідовне з'єднання ланок однією еквівалентною ланкою (див. рис. 4.1, а). Відповідно до схеми (рис. 4.3) маємо

$$y(t) = K_2(D)x_2(t) = K_2(D)y_1(t) = K_2(D) \cdot K_1(D)x(t).$$

Отже, оператор передачі ланки, еквівалентної послідовно з'єднаним ланкам, дорівнює добутку їх операторів передачі:

$$K(D) = K_1(D) \cdot K_2(D). \quad (4.1)$$

При паралельному з'єднанні ланок на їх входи подається одне загальне діяння, а вихідні діяння ланок додаються або віднімаються (рис. 4.4).

Замінімо паралельне з'єднання ланок однією еквівалентною ланкою. Відповідно до схеми (рис. 4.4) маємо

$$y(t) = K_1(D)x(t) \pm K_2(D)x(t) = [K_1(D) \pm K_2(D)]x(t).$$

Отже, оператор передачі ланки, еквівалентної паралельно з'єднаним ланкам, дорівнює сумі або різниці їх операторів передачі:

$$K(D) = K_1(D) \pm K_2(D). \quad (4.2)$$

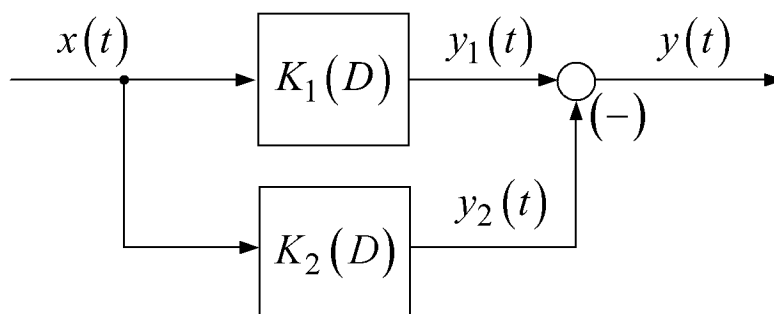


Рис. 4.4. Паралельне з'єднання ланок

Зустрічно-паралельне з'єднання ланок являє собою охоплення однієї ланки зворотним зв'язком, що містить іншу ланку (рис. 4.5).

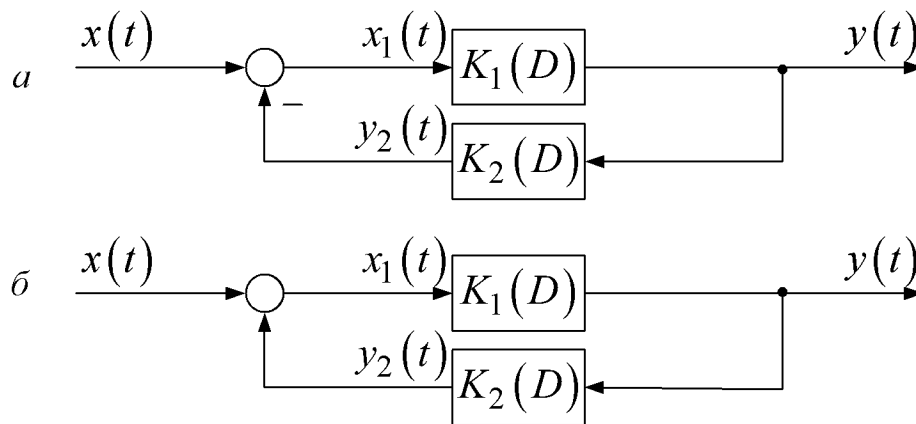


Рис. 4.5. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок:
a – негативний зворотний зв'язок; *б* – позитивний зворотний зв'язок

Замінімо зустрічно-паралельне з'єднання ланок однією еквівалентною ланкою. Відповідно до схеми (рис. 4.5) маємо

$$\begin{aligned}
 y(t) &= K_1(D)x_1(t) = K_1(D)[x(t) \pm y_2(t)] = \\
 &= K_1(D)[x(t) \pm K_2(D)y(t)] = \\
 &= K_1(D)x(t) \pm K_1(D) \cdot K_2(D)y(t),
 \end{aligned}$$

де знак “+” відповідає позитивному, а знак “-” – негативному зворотному зв'язку. Звідси отримаємо, що вихідна величина пов'язана з вхідною таким операторним виразом:

$$y(t) = \frac{K_1(D)}{1 \mp K_1(D) \cdot K_2(D)} x(t),$$

де знак “-” відповідає позитивному, а знак “+” – негативному зворотному зв'язку.

Отже, оператор передачі ланки, еквівалентної зустрічно-паралельному з'єднанню ланок, дорівнює

$$K(D) = \frac{K_1(D)}{1 \mp K_1(D) \cdot K_2(D)}, \quad (4.3)$$

де $K_1(D)$ – оператор передачі кола прямої передачі діянь;

$K_2(D)$ – оператор передачі кола зворотного зв'язку.

Знаки “-” і “+” у виразі (4.3) відповідають позитивному і негативному зворотному зв'язку відповідно.

4.3. ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ САК ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ДО ТИПОВОГО ОДНОКОНТУРНОГО ВИГЛЯДУ

Для розв'язання задач аналізу застосовують основні рівняння системи, що пов'язують її вхідні діяння – задавальне $g(t)$ та заважаюче $f(t)$ – з вихідним діянням $y(t)$ або з помилкою системи $\varepsilon(t)$. Оскільки схеми математичних моделей різних САК мають різноманітну конфігурацію зі з'єднань динамічних ланок, процес отримання основних рівнянь системи безпосередньо з початкової схеми математичної моделі може виявитися досить складним. Тому початкову схему математичної моделі САК перетворюють до деякого типового вигляду, після чого знаходять її основні рівняння, використовуючи заздалегідь відомі правила.

У більшості випадків для САК, що побудовані за принципом зворотного зв'язку, як типову використовують одноконтурну схему математичної моделі, зображену на рис. 4.6. Її головні риси – наявність мінімальної кількості динамічних ланок та основних діянь: задавального $g(t)$, заважаючого $f(t)$ (якщо воно є), вихідного $y(t)$ та помилки системи $\varepsilon(t)$, а також одиничного головного зворотного зв'язку (завжди негативного).

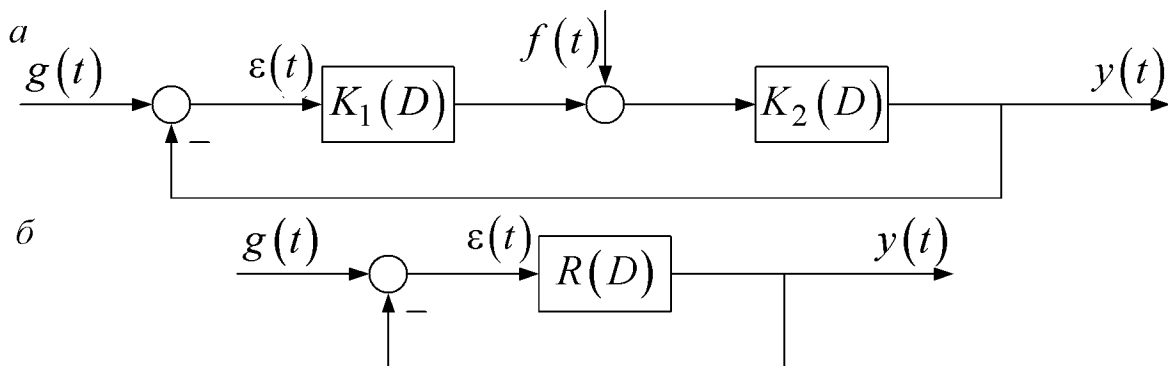


Рис. 4.6. Типова одноконтурна математична модель САК:
a – за наявності заважаючого діяння; *б* – за відсутності заважаючого діяння

Для перетворення схеми математичної моделі САК довільної конфігурації до типового одноконтурного вигляду виконують (у тій чи іншій послідовності) такі операції:

- заміну з'єднань ланок (послідовного, паралельного і зустрічно-паралельного) еквівалентними ланками;
- зміну порядку підсумовування;
- переміщення суматора чи точки розгалуження з виходу ланки на вхід або зворотне переміщення.

Усі перетворення повинні відповідати принципу еквівалентності – кінцевий результат, отриманий після перетворень, повинен збігатися з початковим.

Правила заміни з'єднань ланок еквівалентними ланками розглянуті в підрозд. 4.2 (вирази (4.1) – (4.3)).

Правила зміни порядку підсумовування засновані на сполучній і переставній властивостях додавання. Це твердження пояснюється рис. 4.7.

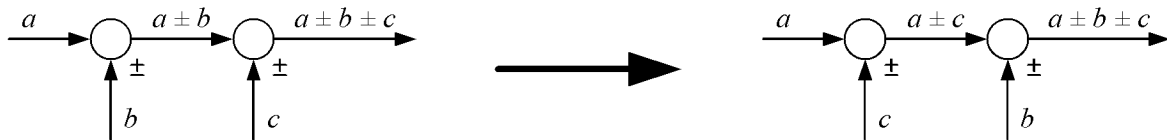


Рис. 4.7. Зміна порядку підсумовування

Основні види та правила переміщень суматора та точки розгалуження наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Правила переміщення суматора та точки розгалуження

Операція	Вихідна схема	Еквівалентна схема
1. Переміщення суматора з виходу ланки на вхід		
2. Переміщення суматора з входу ланки на вихід		
3. Переміщення точки розгалуження з виходу ланки на вхід		
4. Переміщення точки розгалуження з входу ланки на вихід		

Зазначимо, що залежно від схеми математичної моделі САК, яка перетворюється до типового одноконтурного вигляду, вказані операції

можуть виконуватися в різній послідовності, деякі з них можуть виконуватися декілька разів, а деякі – не виконуватися взагалі.

Приклад

Перетворити схему математичної моделі САК, що зображена на рис. 4.8, до типового одноконтурного вигляду.

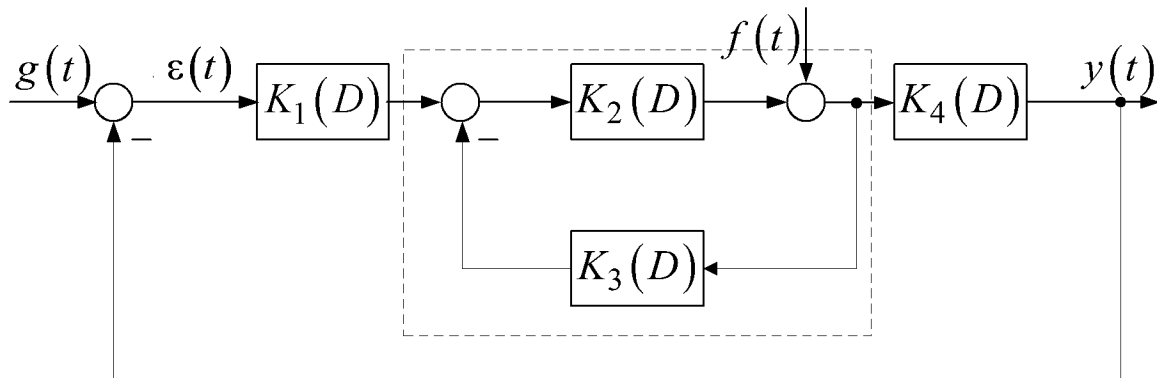


Рис. 4.8. Схема математичної моделі САК

Розв'язання

Найбільш складною для перетворення є частина, обведена на рис. 4.8 пунктирною лінією. У ній ланка з оператором передачі $K_2(D)$ та суматор, на який подається заважаюче діяння $f(t)$, охоплені негативним зворотним зв'язком через ланку $K_3(D)$.

Для того щоб спростити вказану частину, необхідно спочатку перенести суматор, на який подається заважаюче діяння, на вхід ланки з оператором передачі $K_2(D)$, використовуючи правило 1 (табл. 4.1). Після проведеного перетворення необхідно змінити порядок підсумовування. Тоді схема математичної моделі набуває вигляду, зображеного на рис. 4.9.

Тепер з'єднання у вигляді охоплення ланки з оператором передачі $K_2(D)$ негативним зворотним зв'язком через ланку $K_3(D)$ може бути замінено еквівалентною ланкою з оператором передачі, що визначається за правилом (4.3):

$$K_{23}(D) = \frac{K_2(D)}{1 + K_2(D) \cdot K_3(D)}.$$

З урахуванням проведених перетворень вихідна схема математичної моделі САК набуває вигляду, що зображений на рис. 4.10.

Для остаточного приведення отриманої схеми математичної моделі до типового одноконтурного вигляду (див. рис. 4.6, а) необхідно замінити

послідовне з'єднання ланок з операторами передачі $K_{23}(D)$ та $K_4(D)$, що виділені на рис. 4.10 пунктирною лінією, еквівалентною ланкою за правилом (4.1):

$$K_{234}(D) = K_{23}(D) \cdot K_4(D).$$

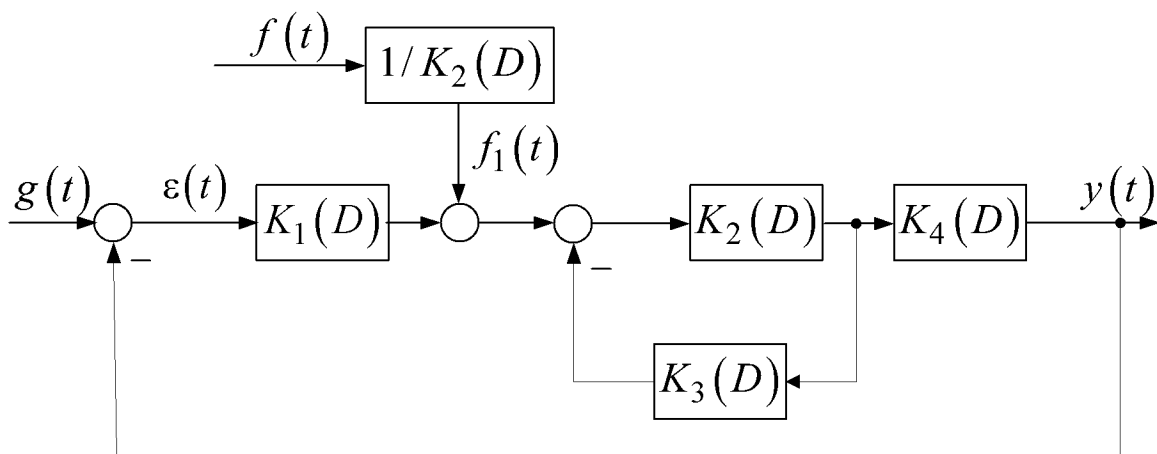


Рис. 4.9. Схема математичної моделі САК

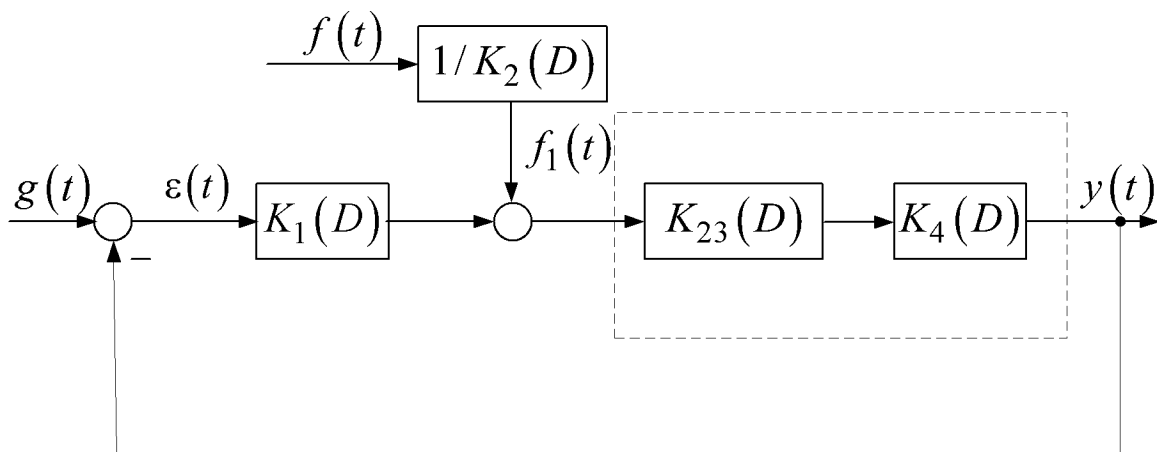


Рис. 4.10. Схема математичної моделі САК

Слід зазначити, що наявність ланки з оператором передачі $1/K_2(D)$ не дозволяє повністю привести схему математичної моделі до типового одноконтурного вигляду. Однак цю проблему можна вирішити, якщо як заважаюче діяння системи розглядати не $f(t)$, а діяння

$$f_1(t) = \frac{1}{K_2(D)} f(t),$$

що існує на виході ланки з оператором передачі $1/K_2(D)$.

4.4. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ САК

Для проведення аналізу якості функціонування САК користуються такими рівняннями системи:

1) рівнянням замкненої системи, що пов'язує вхідні діяння (задавальне $g(t)$ та заважаюче $f(t)$) з вихідною величиною системи $y(t)$;

2) рівнянням помилки (похибки) системи, що пов'язує вхідні діяння (задавальне $g(t)$ та заважаюче $f(t)$) з помилкою системи $\varepsilon(t)$.

Указані рівняння називають основними рівняннями САК. Перше рівняння застосовується для дослідження реакції системи на зовнішні діяння, а друге – для аналізу впливу зовнішніх діянь на точність її функціонування.

Основні рівняння лінійних стаціонарних САК є диференціальними рівняннями “вхід-вихід”. У розгорнутій формі вони мають вигляд, аналогічний рівнянню (2.13). У лівій частині рівняння замкненої системи фігурує вихідна величина $y(t)$ та її похідні, а в лівій частині рівняння помилки – помилка системи $\varepsilon(t)$ та її похідні. У правих частинах обох рівнянь наявні вхідні величини (задавальна $g(t)$ та заважаюча $f(t)$) та їх похідні. У скороченій операторній формі (див. підрозд. 2.3, вирази (2.14) – (2.17)) вони мають такий вигляд:

– *рівняння замкненої системи* –

$$y(t) = W(D) \cdot g(t) + W_f(D) \cdot f(t), \quad (4.4)$$

де $W(D)$ – оператор передачі замкненої системи;

$W_f(D)$ – оператор передачі замкненої системи за заважаючим діянням;

– *рівняння помилки системи* –

$$\varepsilon(t) = E(D) \cdot g(t) + E_f(D) \cdot f(t), \quad (4.5)$$

де $E(D)$ – оператор передачі системи за динамічною помилкою – помилкою, що обумовлена неточністю відпрацювання задавального діяння;

$E_f(D)$ – оператор передачі системи за помилкою, що обумовлена заважаючим діянням.

Рівнянням замкненої системи та помилки системи відповідають схеми математичної моделі САК, що зображені на рис. 4.11, а, б відповідно.

Між операторами передачі замкненої САК та операторами помилки існує зв'язок. Його нескладно встановити, якщо скористатись виразом, за яким визначається помилка системи:

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t). \quad (4.6)$$

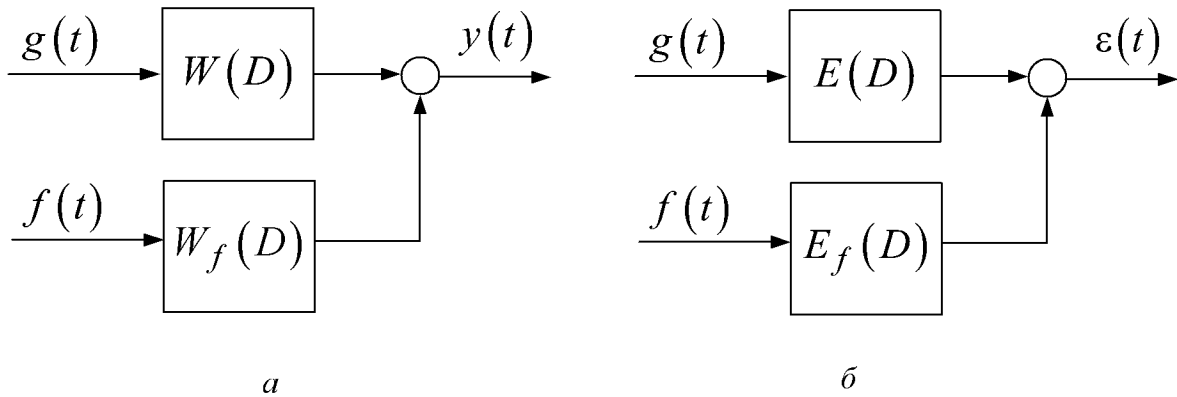


Рис. 4.11. Схеми математичних моделей САК, що відповідають рівнянням:
a – замкненої системи; *б* – помилки системи

Після його підстановки у вираз (4.5) та нескладних перетворень маємо

$$y(t) = [1 - E(D)] \cdot g(t) - E_f(D) \cdot f(t).$$

З порівняння цього виразу з (4.4) отримаємо такі операторні тотожності:

$$W(D) = 1 - E(D), \quad W_f(D) = -E_f(D). \quad (4.7)$$

У системах зі зворотним зв'язком користуються також **рівнянням розімкненої системи**. Його отримують виходячи з типової одноконтурної схеми математичної моделі системи (див. рис. 4.6, *a*) за умови, що зв'язок між виходом першого суматора та входом ланки з оператором передачі $K_1(D)$ розімкнений.

Користуючись рис. 4.6, *a*, запишемо рівняння розімкненої системи:

$$y(t) = K_2(D) \cdot [f(t) + K_1(D) \cdot \varepsilon(t)] = K_1(D) \cdot K_2(D) \cdot \varepsilon(t) + K_2(D) \cdot f(t). \quad (4.8)$$

Його прийнято записувати у таких позначеннях:

$$y(t) = R(D) \cdot \varepsilon(t) + R_f(D) \cdot f(t), \quad (4.9)$$

де

$$R(D) = K_1(D) \cdot K_2(D) \quad (4.10)$$

– оператор передачі розімкненої системи;

$$R_f(D) = K_2(D) \quad (4.11)$$

– оператор передачі розімкненої системи за заважаючим діянням.

Знайдемо зв'язок між операторами передачі розімкненої і замкненої системи. Для цього у рівняння розімкненої системи (4.9) підставимо рівняння (4.6), з урахуванням якого система буде замкненою:

$$y(t) = R(D) \cdot [g(t) - y(t)] + R_f(D) \cdot f(t).$$

Звідси після нескладних перетворень отримаємо, що

$$y(t) = \frac{R(D)}{1 + R(D)} g(t) + \frac{R_f(D)}{1 + R(D)} f(t). \quad (4.12)$$

З порівняння виразів (4.4) і (4.12) випливає, що оператори передачі замкненої системи $W(D)$, $W_f(D)$ пов'язані з операторами передачі розімкненої системи виразами

$$W(D) = \frac{R(D)}{1 + R(D)}, \quad W_f(D) = \frac{R_f(D)}{1 + R(D)}. \quad (4.13)$$

Аналогічно, користуючись виразами (4.5) та (4.6), нескладно отримати, що оператори передачі системи за помилкою пов'язані з операторами передачі розімкненої системи виразами

$$E(D) = \frac{1}{1 + R(D)}, \quad E_f(D) = -\frac{R_f(D)}{1 + R(D)}. \quad (4.14)$$

Зауваження: за відсутності заважаючого діяння (схема рис. 4.6, б) відповідні складові у рівняннях (4.4), (4.5), (4.9) відсутні, а оператори передачі системи за заважаючим діянням не розраховуються.

4.5. МЕТОДИКА ОТРИМАННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ САК З ОДИНИЧНИМ НЕГАТИВНИМ ГОЛОВНИМ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

Розглянемо методику отримання основних рівнянь лінійної стаціонарної САК з одиничним негативним головним зворотним зв'язком стосовно до схеми математичної моделі системи, наведеної на рис. 4.6, а.

Спочатку зі схеми математичної моделі визначають оператори передачі $K_1(D)$ та $K_2(D)$, після чого можна провести розрахунок операторів передачі розімкненої системи за виразами (4.10), (4.11), а потім операторів замкненої системи та помилки за виразами (4.13), (4.14).

Недоліком розглянутої методики є те, що згідно з виразом (2.17) оператори передачі $K_1(D)$ та $K_2(D)$ являють собою відношення операторів, тобто вони мають такий “двоповерховий” вигляд:

$$K_1(D) = \frac{M_1(D)}{N_1(D)}, \quad K_2(D) = \frac{M_2(D)}{N_2(D)}. \quad (4.15)$$

Тому при проведенні розрахунків за виразами (4.10), (4.11), (4.13), (4.14) виникають “чотириповерхові” дроби, які надалі необхідно багатократно знов перетворювати до “двоповерхових”.

Для того щоб уникнути цієї процедури, застосовують таку методику.

На першому етапі, користуючись виразами (4.15), складають характеристичні оператори:

– характеристичний оператор розімкненої системи –

$$A(D) = N_1(D)N_2(D); \quad (4.16)$$

– характеристичний оператор задавального діяння –

$$B(D) = M_1(D)M_2(D); \quad (4.17)$$

– характеристичний оператор заважаючого діяння –

$$B_f(D) = M_2(D)N_1(D); \quad (4.18)$$

– характеристичний оператор замкненої системи –

$$C(D) = A(D) + B(D). \quad (4.19)$$

На другому етапі, користуючись отриманими характеристичними операторами, записують всі оператори передачі системи за такими виразами:

– оператори передачі розімкненої системи –

$$R(D) = \frac{B(D)}{A(D)}, \quad R_f(D) = \frac{B_f(D)}{A(D)}; \quad (4.20)$$

– оператори передачі замкненої системи –

$$W(D) = \frac{B(D)}{C(D)}, \quad W_f(D) = \frac{B_f(D)}{C(D)}, \quad (4.21)$$

– оператори передачі системи за помилкою –

$$E(D) = \frac{A(D)}{C(D)}, \quad E_f(D) = -\frac{B_f(D)}{C(D)}. \quad (4.22)$$

Отримані оператори передачі застосовують для запису рівнянь системи (4.4), (4.5), (4.9) в операторній формі. Крім того, від операторів передачі за правилами (2.41), (2.49) можна перейти до відповідних передавальних функцій та до частотних характеристик системи, а за правилами (2.33), (2.44) – до імпульсних характеристик системи.

На третьому етапі, також користуючись характеристичними операторами, записують рівняння системи в частково розгорнутому вигляді:

– рівняння розімкненої системи –

$$A(D) \cdot y(t) = B(D) \cdot \varepsilon(t) + B_f(D) \cdot f(t); \quad (4.23)$$

– рівняння замкненої системи –

$$C(D) \cdot y(t) = B(D) \cdot g(t) + B_f(D) \cdot f(t); \quad (4.24)$$

– рівняння помилки системи –

$$C(D) \cdot \varepsilon(t) = A(D) \cdot g(t) - B_f(D) \cdot f(t). \quad (4.25)$$

За необхідності далі від операторної форми запису можна перейти до запису диференціальних рівнянь системи у звичайній формі рівнянь “вхід-вихід”. Для цього спочатку розкривають дужки у виразах (4.23) – (4.25), після чого переходять від запису рівняння у символній формі виду (2.15) до запису у звичайній формі (див. вирази (2.14), (2.13)).

Співвідношення (4.20) – (4.22) просто доводяться шляхом підстановки виразів (4.16) – (4.19) до виразів (4.10) – (4.14), а рівняння (4.23) – (4.25) отримують з операторних рівнянь (4.4), (4.5) та (4.9) після підстановки до них операторів передачі (4.20) – (4.22) та множення їх на характеристичні оператори, що стоять у знаменниках відповідних операторних рівнянь.

Зуваження: за відсутності заважаючого діяння (схема рис. 4.6, б) маємо $R(D) = K_1(D)$. Тому $A(D) = N_1(D)$, $B(D) = M_1(D)$, а оператори передачі системи за заважаючим діянням не розраховуються.

Приклад

Скласти основні рівняння САК, одноконтурна схема математичної моделі якої зображена на рис. 4.6, а, якщо

$$K_1(D) = \frac{K_1}{TD+1}, \quad K_2(D) = \frac{K_2}{D}.$$

Розв'язання

Як впливає зі схеми математичної моделі (див. рис. 4.6, а) та виразів (4.16) – (4.19), характеристичні оператори системи дорівнюють

$$A(D) = D(TD+1); \quad B(D) = K_1K_2;$$

$$B_f(D) = K_2(TD+1); \quad C(D) = K_1K_2 + D(TD+1).$$

Тоді згідно з виразами (4.20) – (4.22) оператори передачі системи дорівнюють

$$R(D) = \frac{K_1 \cdot K_2}{D(TD+1)}; \quad R_f(D) = \frac{K_2(TD+1)}{D(TD+1)} = \frac{K_2}{D};$$

$$W(D) = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 \cdot K_2 + D(TD+1)}; \quad W_f(D) = \frac{K_2(TD+1)}{K_1 \cdot K_2 + D(TD+1)};$$

$$E(D) = \frac{D(TD+1)}{K_1 \cdot K_2 + D(TD+1)}; \quad E_f(D) = -\frac{K_2(TD+1)}{K_1 \cdot K_2 + D(TD+1)}.$$

Підставляючи ці вирази у (4.4), (4.5), отримаємо основні рівняння в операторній формі:

– рівняння замкненої системи –

$$y(t) = \frac{K_1 \cdot K_2}{D(TD+1) + K_1 \cdot K_2} g(t) + \frac{K_2(TD+1)}{D(TD+1) + K_1 \cdot K_2} f(t);$$

– рівняння помилки системи –

$$\varepsilon(t) = \frac{D(TD+1)}{D(TD+1) + K_1 \cdot K_2} g(t) - \frac{K_2(TD+1)}{D(TD+1) + K_1 \cdot K_2} f(t).$$

Основні рівняння у розгорнутому вигляді отримаємо шляхом підстановки характеристичних операторів у (4.24), (4.25):

– рівняння замкненої системи –

$$(D(TD+1) + K_1 \cdot K_2)y(t) = K_1 \cdot K_2 \cdot g(t) + K_2(TD+1)f(t),$$

або після розкриття дужок та заміни $D = (\cdot)'$

$$T \cdot y''(t) + y'(t) + K_1 \cdot K_2 \cdot y(t) = K_1 \cdot K_2 \cdot g(t) + K_2 \cdot T \cdot f'(t) + f(t);$$

– рівняння помилки системи –

$$(D(TD + 1) + K_1 K_2) \varepsilon(t) = D(TD + 1)g(t) - K_2(TD + 1)f(t),$$

або після розкриття дужок та заміни $D = (\cdot)'$ –

$$T \cdot \varepsilon''(t) + \varepsilon'(t) + K_1 \cdot K_2 \cdot \varepsilon(t) = T \cdot g''(t) + g'(t) - K_2 \cdot T \cdot f'(t) - K_2 \cdot f(t).$$

4.6. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ САК

Користуючись основними операторами передачі системи, нескладно отримати її основні характеристики. Для цього застосовують відомі зв'язки між оператором передачі та характеристиками динамічної системи.

Спочатку доцільно, користуючись правилом (2.41) переходу від оператора передачі до передавальної функції

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p},$$

записати передавальні функції розімкненої системи $R(p)$, $R_f(p)$, замкненої системи $W(p)$, $W_f(p)$ та помилки $E(p)$, $E_f(p)$ шляхом формальної заміни символу диференціювання D на змінну Лапласа p у відповідних операторах передачі.

Комплексні частотні характеристики розімкненої системи $R(j\omega)$, $R_f(j\omega)$, замкненої системи $W(j\omega)$, $W_f(j\omega)$ та помилки $E(j\omega)$, $E_f(j\omega)$ можна отримати або з відповідних операторів передачі, або з передавальних функцій на основі виразів (2.48), (2.49). Далі з отриманих КЧХ можна виділити всі інші частотні характеристики системи (АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ).

Як відомо, імпульсна характеристика є оберненим перетворенням Лапласа передавальної функції. Тому для отримання імпульсних характеристик замкненої системи $w(t)$, $w_f(t)$ та помилки $e(t)$, $e_f(t)$ необхідно знайти обернені перетворення Лапласа відповідних передавальних функцій:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}; w_f(t) = L^{-1}\{W_f(p)\};$$

$$e(t) = L^{-1}\{E(p)\}; e_f(t) = L^{-1}\{E_f(p)\}.$$

Характеристики застосовуються як для безпосереднього аналізу САК, так і для відшукування вихідних реакцій або помилок системи на задані вхідні діяння. Наприклад, реакція системи на задані вхідні діяння $g(t)$ та $f(t)$ при нульових початкових умовах може бути визначена за допомогою оператора “вхід-вихід”, побудованого на основі передавальних функцій $W(p)$, $W_f(p)$ замкненої системи (див. вираз (2.35)):

$$y(t) = L^{-1}\{W(p) \cdot L\{g(t)\} + W_f(p) \cdot L\{f(t)\}\}. \quad (4.26)$$

Реакцію САК також можна знайти за допомогою оператора “вхід-вихід” (вирази (3.27), (3.28)), побудованого на основі імпульсних характеристик $w(t)$, $w_f(t)$ замкненої системи (див. вирази (2.26), (2.27)):

$$y(t) = \int_0^{t-t_0} g(t-\theta) \cdot w(\theta) d\theta + \int_0^{t-t_0} f(t-\theta) \cdot w_f(\theta) d\theta =$$

$$= \int_{t_0}^t g(\tau) \cdot w(t-\tau) d\tau + \int_{t_0}^t f(\tau) \cdot w_f(t-\tau) d\tau. \quad (4.27)$$

Аналогічно може бути визначена помилка САК.

4.7. ПОБУДОВА ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗІМКНЕНОЇ СИСТЕМИ

Для аналізу САК частотними методами частіше застосовують логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи – логарифмічну амплітудно-частотну характеристику (ЛАЧХ)

$$L_R(\omega) = 20 \cdot \lg R(\omega)$$

та логарифмічну фазочастотну характеристику (ЛФЧХ) $\varphi_R(\omega)$. Тут $R(\omega)$, $\varphi_R(\omega)$ – модуль та аргумент комплексної частотної характеристики розімкненої системи

$$R(j\omega) = R(\omega) \cdot \exp(j\varphi_R(\omega)).$$

Як відомо, комплексна частотна характеристика розімкненої системи пов'язана з її оператором передачі та передавальною функцією виразом

$$R(j\omega) = R(D) \Big|_{D=j\omega} = R(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Побудову логарифмічних частотних характеристик зручно виконувати, попередньо розклавши передавальну функцію розімкненої системи на добуток передавальних функцій елементарних ланок:

$$R(p) = \prod_i K_i(p), \quad (4.28)$$

де $K_i(p)$ – передавальна функція i -ї елементарної ланки.

Тоді нескладно встановити, що ЛАЧХ та ФЧХ розімкненої системи визначаються з ЛАЧХ та ФЧХ елементарних ланок такими виразами:

$$\begin{aligned} L_R(\omega) &= \sum_i L_i(\omega); \\ \varphi_R(\omega) &= \sum_i \varphi_i(\omega), \end{aligned} \quad (4.29)$$

де $L_i(\omega)$, $\varphi_i(\omega)$ – ЛАЧХ та ФЧХ i -ї елементарної ланки.

На практиці зазвичай обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи. Її будують на бланку з логарифмічним масштабом шляхом послідовного підсумовування асимптотичних ЛАЧХ елементарних ланок за таким алгоритмом:

1. За відомим оператором передачі $R(D)$ визначають передавальну функцію розімкненої системи

$$R(p) = R(D) \Big|_{D=p},$$

після чого записують її у вигляді добутку (4.28) передавальних функцій елементарних ланок.

Розраховують загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи

$$K = \prod_i K_i,$$

де K_i – коефіцієнти підсилення окремих ланок.

Визначають вид та параметри всіх елементарних ланок.

2. Розраховують та пронумеровують у порядку зростання частоти спряження $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ асимптот елементарних ланок (аперіодичних, форсуючих та коливальних).

Розмічають вісь абсцис (частот) таким чином, щоб можна було побудувати ЛАЧХ лівіше найменшої ω_1 та правіше найбільшої ω_n з частот спряження асимптот: $\omega_{\min} < \omega_1, \omega_{\max} > \omega_n$.

3. Загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи переводять у логарифмічні одиниці – децибели (дБ):

$$L = 20 \cdot \lg K .$$

З урахуванням отриманого значення загального коефіцієнта підсилення системи L та частотного діапазону, в якому будується ЛАЧХ, визначають масштаб по осі ординат (у децибелах). На частоті $\omega = 1$ відкладають величину L .

4. На ділянці частот $(0, \omega_1)$ будують першу (низькочастотну) асимптоту. Її хід визначається загальним коефіцієнтом підсилення системи L , інтегруючими та диференціюючими ланками. Вона являє собою пряму, що проходить через відкладену точку з координатами $(1, L)$ та має коефіцієнт нахилу, дБ/дек:

$$b = 20 \cdot \nu, \quad (4.30)$$

де $\nu = \nu_{\text{диф}} - \nu_{\text{інт}}$ – різниця між кількістю диференціюючих та інтегруючих ланок у передавальній функції розімкненої системи.

5. Починаючи з першої частоти спряження ω_1 послідовно прибудовують наступні відрізки асимптот результуючої ЛАЧХ на інтервалах частот $(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), \dots, (\omega_n, \infty)$, змінюючи нахил ЛАЧХ на кожній частоті спряження на:

мінус 20 дБ/дек, якщо це частота спряження інерційної (аперіодичної) ланки;

20 дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки;

мінус 40 дБ/дек, якщо це частота спряження коливальної ланки або двох інерційних ланок з однаковими сталими часу;

40 дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки другого порядку або двох форсуючих ланок з однаковими сталими часу.

У результаті побудови, згідно з цим алгоритмом, отримують асимптотичну ЛАЧХ розімкненої системи. Вона являє собою ламану лінію з відрізків прямих, злами якої відбуваються на частотах спряження асимптот. Фактична ЛАЧХ буде відрізнятися від асимптотичної лише поблизу частот спряження асимптот.

Для побудови ЛФЧХ розімкненої системи спочатку заповнюють таблицю, в якій записують розраховані значення ФЧХ окремих ланок $\varphi_i(\omega)$ та результуючої ФЧХ $\varphi_R(\omega)$ для множини точок на осі частот. Для розрахунку зазвичай обирають частоти, значення яких дорівнюють 1, 2, 5 та менше або більше їх на цілу кількість декад. ЛФЧХ будують за точками на тому ж бланку з логарифмічним масштабом по осі частот, де побудована ЛАЧХ.

За наведеною методикою будують ЛАЧХ та ЛФЧХ не лише розімкненої системи, а й будь-якої динамічної системи.

Відзначимо, що між всіма характеристиками мінімально-фазової динамічної системи – системи, яка складається з елементарних ланок, – існує взаємно однозначний зв'язок. Тому за заданою ЛАЧХ мінімально-фазової динамічної системи можна відновити її передавальну функцію, тобто визначити склад та параметри всіх елементарних ланок, що входять до неї. Розв'язання задачі відновлення проводиться у тому самому порядку, що і побудова ЛАЧХ, однак у цьому випадку за параметрами фрагментів побудованої ЛАЧХ послідовно, починаючи з низькочастотної ділянки, встановлюють типи ланок та визначають їх параметри:

1) за значенням коефіцієнта підсилення L у децибелах, який має низькочастотна асимптота (або її продовження) на частоті $\omega=1$, розраховують загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи:

$$K = 10^{L/20}; \quad (4.31)$$

2) за коефіцієнтом нахилу b низькочастотної асимптоти, що вимірюється у децибелах на декаду, визначають наявність та кількість інтегруючих або диференціюючих ланок:

$$v = b / 20. \quad (4.32)$$

Якщо результат є додатним, це свідчить про наявність у системі відповідної кількості диференціюючих ланок, при від'ємному результаті – про наявність інтегруючої ланки, при $v = 0$ є лише підсилюючі ланки;

3) починаючи з першої частоти спряження послідовно підраховують величину зміни коефіцієнта нахилу ЛАЧХ, на основі чого визначають тип наступної елементарної ланки (див. п. 5 методики побудови ЛАЧХ) та додають її передавальну функцію. Сталі часу інерційних, форсуючих та коливальних ланок розраховують за значеннями відповідних частот спряження.

Приклад

Побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК з передавальною функцією

$$R(p) = \frac{100(p+10)}{p(2p+1)}. \quad (4.33)$$

Розв'язання

Побудова ЛАЧХ

1. Наведемо передавальну функцію розімкненої САК у вигляді добутку передавальних функцій елементарних ланок. Порівнюючи чисельник та знаменник передавальної функції $R(p)$ з передавальними функціями елементарних ланок (див. табл. 3.1), доходимо висновку, що для їх тотожності необхідно число 10, яке стоїть у дужках виразу чисельника, винести за дужки:

$$R(p) = \frac{1000(0,1p+1)}{p(2p+1)} = 1000 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2p+1} \cdot (0,1p+1).$$

Отже, розімкнена система складається з послідовно з'єднаних підсилювальної ланки (загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K = 1000 \text{ с}^{-1}$), інтегруючої ланки $1/p$, інерційної ланки $\frac{1}{2p+1}$ зі сталою часу $T = 2 \text{ с}$ та форсуючої ланки $(0,1p+1)$ зі сталою часу $\tau = 0,1 \text{ с}$.

2. Знаходимо частоти спряження асимптот як величини, обернені сталим часу елементарних ланок:

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Вони пронумеровані за порядком зростання.

Розмічаємо вісь абсцис таким чином, щоб можна було побудувати графік лівіше меншої та правіше більшої з частот спряження асимптот: обираємо $\omega_{\min} = 0,01 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{\max} = 1000 \text{ с}^{-1}$ та відмічаємо частоти спряження $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ (рис. 4.12).

3. Визначаємо загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи у децибелах. Згідно з умовами задачі

$$L = 20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 1000 = 60 \text{ дБ}.$$

З урахуванням отриманого значення обираємо масштаб по осі ординат. Відмічаємо на бланку з логарифмічним масштабом точку з координатами $(1; 60)$ (точка A_1 на рис. 4.12).

4. Будуємо низькочастотну асимптоту. Першою точкою для її побудови є точка A_1 . Нахил низькочастотної асимптоти відповідно до виразу (4.30)

визначається нахилом ЛАЧХ однієї інтегруючої ланки, отже, становить -20 дБ/дек. Для забезпечення такого нахилу прямої від точки A_1 з координатами $(1; 60)$ рухаємось праворуч на одну декаду (до частоти 10 c^{-1}) та вниз на 20 дБ, де й отримуємо другу точку A_2 з координатами $(10; 40)$.

Через точки A_1 і A_2 пунктирною лінією проводимо низькочастотну асимптоту. Вона закінчується на першій частоті спряження асимптот $\omega_1 = 0,5 \text{ c}^{-1}$ (точка A_3). Тому на ділянці частот $(0, \omega_1)$ її виділяємо суцільною лінією.

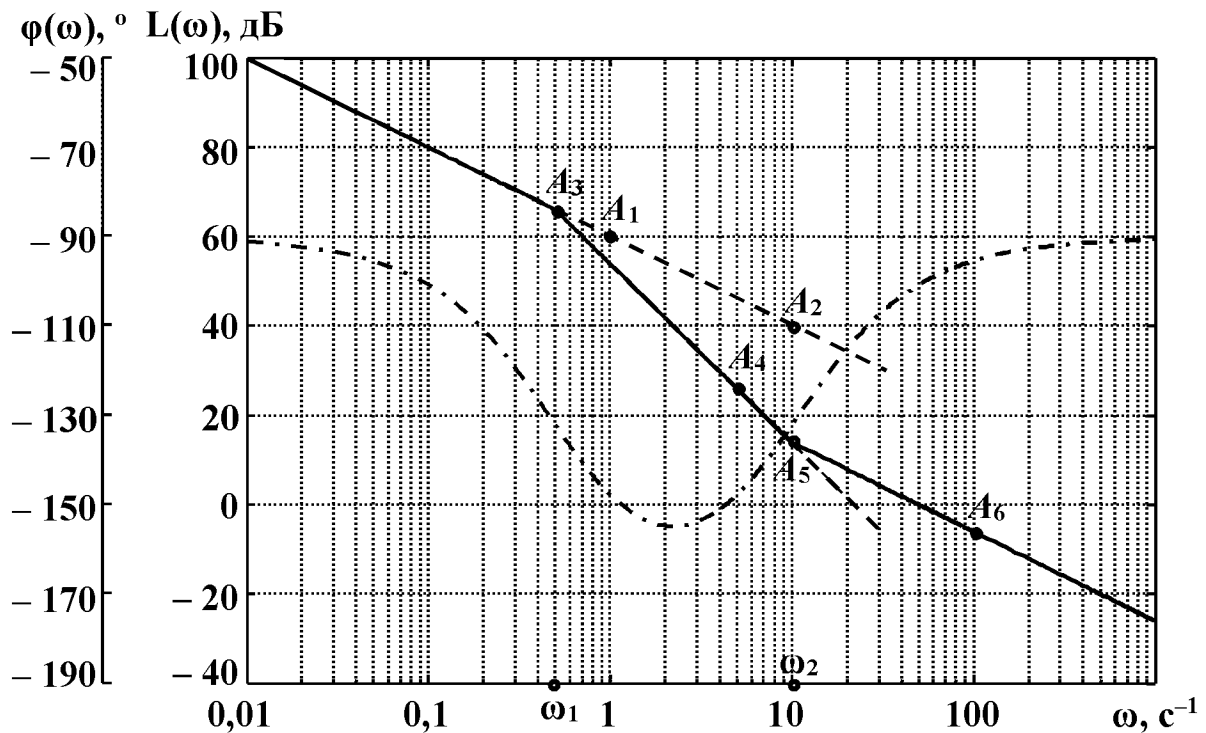


Рис. 4.12. ЛАЧХ САК з передавальною функцією (4.33)

5. Проводимо побудову ЛАЧХ після першої частоти спряження асимптот (точка A_3).

Частота спряження ω_1 відповідає інерційній ланці, тому після точки A_3 нахил ЛАЧХ змінюється на -20 дБ/дек і буде дорівнювати: $-20 \text{ дБ/дек} + (-20 \text{ дБ/дек}) = -40 \text{ дБ/дек}$. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки A_3 рухаємось праворуч на одну декаду та вниз на 40 дБ, де й отримуємо точку A_4 , яка визначає напрям руху ЛАЧХ на ділянці (ω_1, ω_2) . З точки A_3 через точку A_4 проводимо другу асимптоту ЛАЧХ. Вона закінчується на другій частоті спряження $\omega_2 = 10 \text{ c}^{-1}$ (точка A_5).

Після точки A_5 нахил ЛАЧХ змінюється на 20 дБ/дек, оскільки частота спряження ω_2 відповідає форсуючій ланці зі сталою часу $\tau = 0,1 \text{ c}$. Таким чином, після точки A_5 нахил ЛАЧХ буде дорівнювати:

$-40 \text{ дБ/дек} + 20 \text{ дБ/дек} = -20 \text{ дБ/дек}$. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки A_5 рухаємось праворуч на одну декаду та вниз на 20 дБ, де й отримуємо точку A_6 . З точки A_5 через точку A_6 проводимо третю асимптоту ЛАЧХ.

Оскільки при побудові ЛАЧХ враховані всі елементарні ланки, які можна виділити в передавальній функції розімкненої системи, нахил ЛАЧХ при збільшенні частоти далі не змінюватиметься. Тому останню асимптоту ЛАЧХ наводимо суцільною лінією до меж бланка з логарифмічним масштабом.

Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК зображена на рис. 4.12 суцільною лінією.

Побудова ЛФЧХ

Відповідно до виразу (4.29) та заданої передавальної функції ФЧХ розімкненої САК визначається виразом

$$\varphi_R(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega),$$

де ФЧХ окремих ланок дорівнюють:

– ФЧХ інтегруючої ланки –

$$\varphi_1(\omega) = -90^\circ;$$

– ФЧХ інерційної ланки –

$$\varphi_2(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T) = -\arctg(\omega \cdot 2);$$

– ФЧХ форсуючої ланки –

$$\varphi_3(\omega) = \arctg(\omega \cdot \tau) = \arctg(\omega \cdot 0,1).$$

Для побудови ЛФЧХ заповнюємо табл. 4.2, до якої заносимо значення ФЧХ елементарних ланок $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$ та результуючої ФЧХ для різних значень частоти.

ЛФЧХ розімкненої САК зображена на рис. 4.12 штрих-пунктирною лінією.

Таблиця 4.2

Розрахунок ЛФЧХ розімкненої САК

$\omega, \text{с}^{-1}$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	100
$\varphi_1(\omega), ^\circ$	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
$\varphi_2(\omega), ^\circ$	-2	-6	-11	-22	-45	-63	-76	-84	-87	-89	-90	-90

$\varphi_3(\omega), ^\circ$	0	0	0	1	3	5	11	26	45	64	79	84
$\varphi_R(\omega), ^\circ$	-92	-96	-101	-111	-132	-148	-155	-148	-132	-115	-101	-96

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть, чому при побудові схеми математичної моделі САК її розподіляють по ланках спрямованої дії?
2. Які види з'єднань динамічних ланок існують?
3. Наведіть схему математичної моделі послідовно з'єднаних ланок. Як визначається оператор передачі ланки, еквівалентної послідовному з'єднанню ланок?
4. Наведіть схему математичної моделі паралельно з'єднаних ланок. Як визначається оператор передачі ланки, еквівалентної паралельному з'єднанню ланок?
5. Наведіть схему математичної моделі зустрічно-паралельного з'єднання ланок. Як визначається оператор передачі ланки, еквівалентної зустрічно-паралельному з'єднанню ланок?
6. Нарисуйте схему типової одноконтурної математичної моделі САК.
7. Які дії виконуються при перетворенні схеми математичної моделі САК довільної конфігурації до типового одноконтурного вигляду?
8. Сформулюйте правило зміни порядку підсумовування. Сформулюйте правило переміщення суматора з виходу ланки на вхід.
9. Сформулюйте правило переміщення суматора з входу ланки на вихід.
10. Сформулюйте правило переміщення точки розгалуження з виходу ланки на вхід.
11. Сформулюйте правило переміщення точки розгалуження з входу ланки на вихід.
12. Які основні рівняння САК існують?
13. Запишіть загальний вигляд рівняння замкненої системи та вкажіть оператори передачі, що фігурують у цьому рівнянні.
14. Нарисуйте схему математичної моделі САК у часовій області, яка відповідає рівнянню замкненої системи.
15. Запишіть загальний вигляд рівняння помилки системи та вкажіть оператори передачі, що фігурують у цьому рівнянні.
16. Нарисуйте схему математичної моделі САК у часовій області, яка відповідає рівнянню помилки системи.
17. Як пов'язані ЛАЧХ розімкненої системи і ЛАЧХ елементарних ланок, з яких вона складається?
18. Як пов'язані ЛФЧХ розімкненої системи і ЛФЧХ елементарних ланок, з яких вона складається?

19. Викладіть методику побудови асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи.

20. Перетворіть з'єднання динамічних ланок, що зображене на рис. 4.13, до вигляду послідовного з'єднання елементарних ланок.

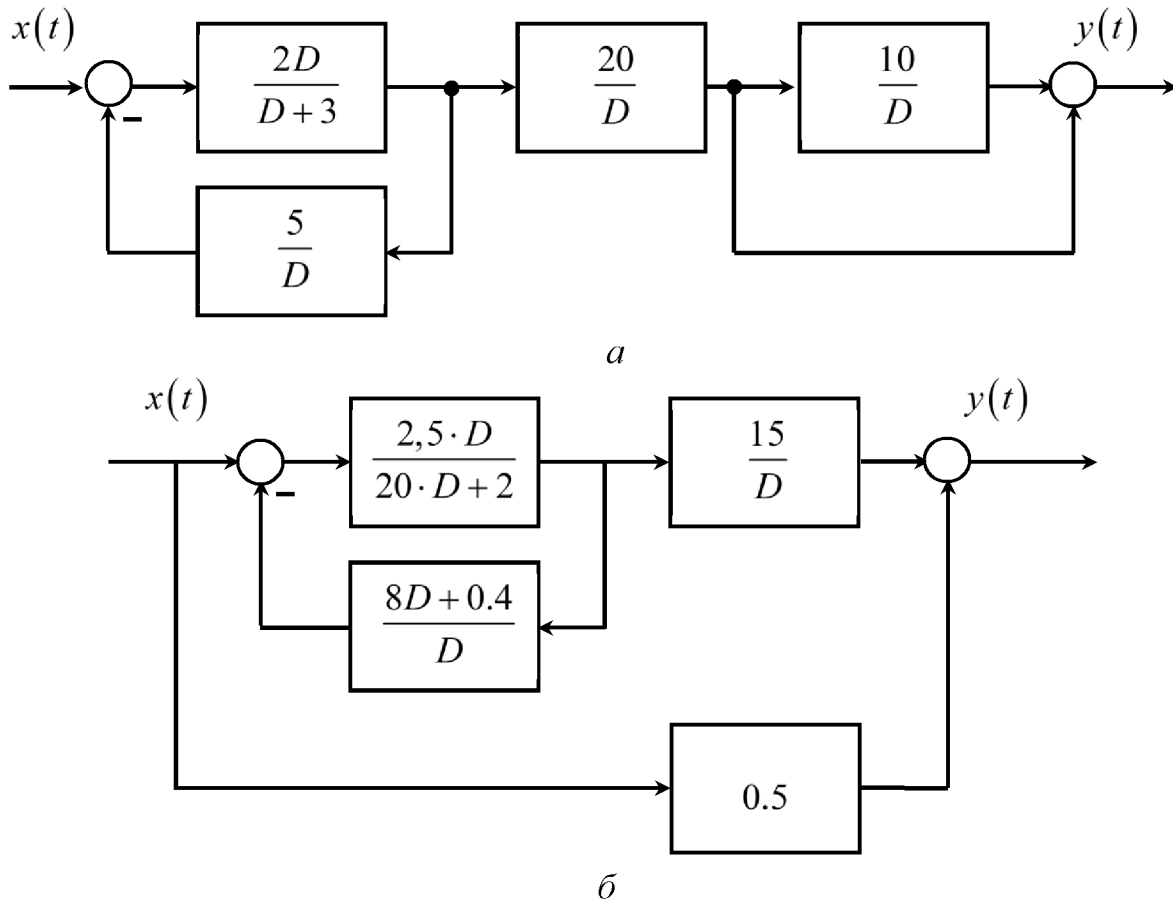


Рис. 4.13. З'єднання динамічних ланок

21. Побудуйте асимптотичну ЛАЧХ послідовного з'єднання елементарних ланок, якщо його передавальна функція визначається виразом

а) $K(p) = \frac{0,1 \cdot p(10 \cdot p + 1)}{2 \cdot p + 1};$

б) $K(p) = \frac{(10 \cdot p + 1)}{p};$

в) $K(p) = \frac{10 \cdot (0,2 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$

г) $K(p) = \frac{0,01 \cdot (2 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (0,1 \cdot p + 1)};$

д) $K(p) = \frac{5 \cdot p + 1}{p \cdot (20 \cdot p + 1)};$

е) $K(p) = \frac{10 \cdot (0,5 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01p + 1)^2}.$

22. На рис. 4.14, *a*, *б* наведені типові одноконтурні схеми математичних моделей САК. Складіть основні рівняння систем.

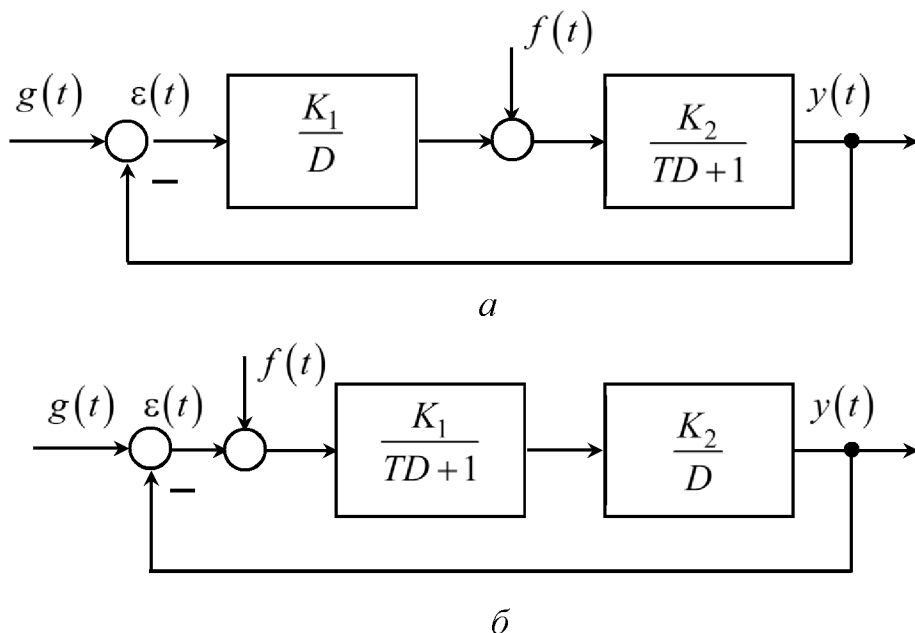


Рис. 4.14. Типові одноконтурні схеми математичних моделей САК

23. Схема математичної моделі САК зображена на рис. 4.15. Перетворіть її до стандартного одноконтурного вигляду та складіть основні рівняння системи.

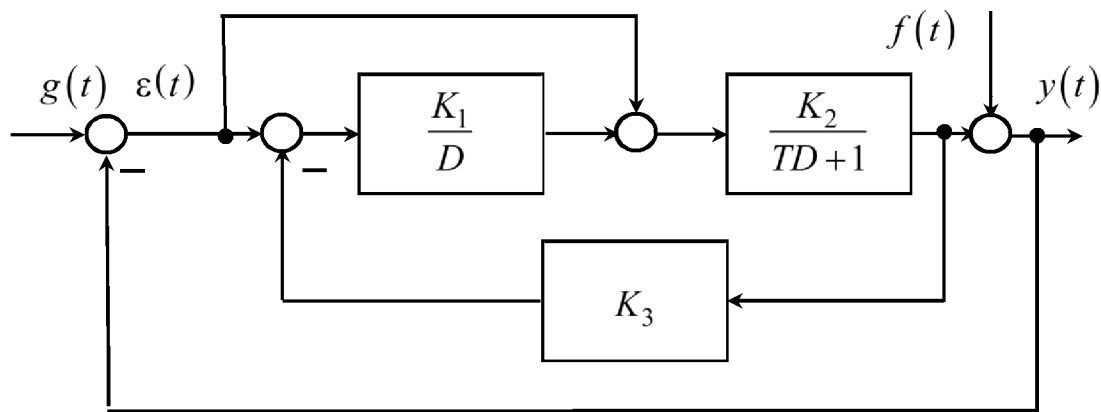


Рис. 4.15. Схема математичної моделі САК

24. На рис. 4.16, *a*, *б* зображені асимптотичні ЛАЧХ (суцільна лінія) та ЛФЧХ (штрихпунктирна лінія) розімкнених систем. Визначте їх передавальні функції та чисельні значення параметрів.

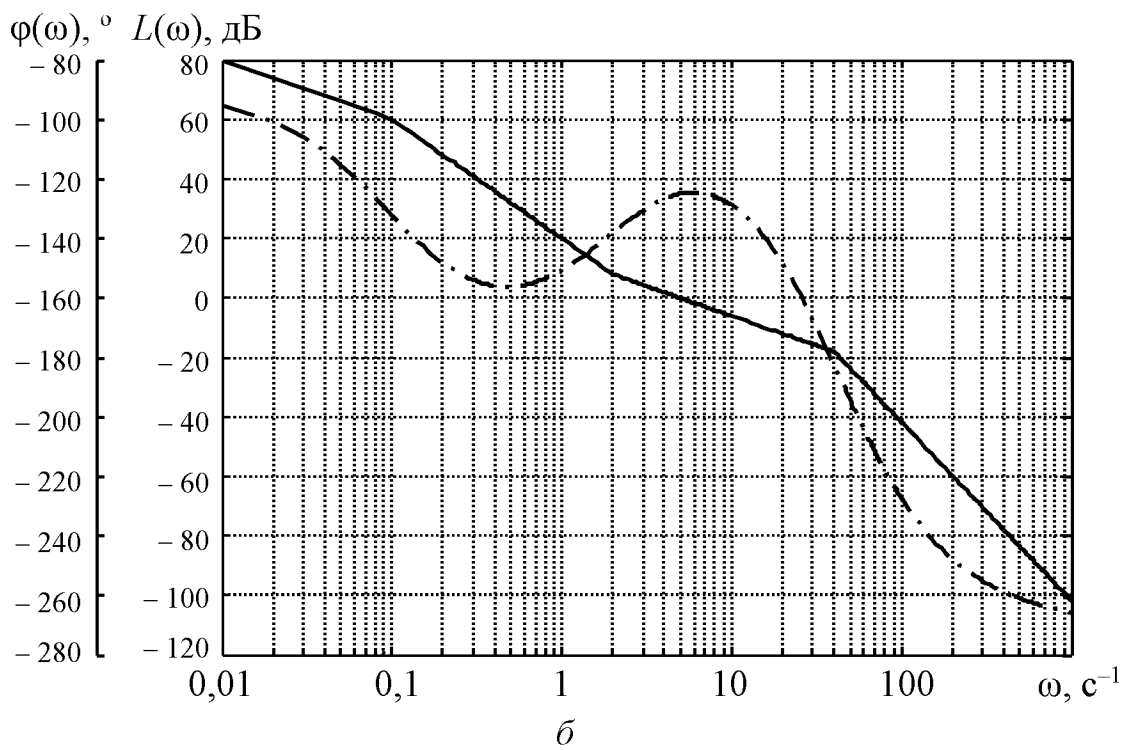
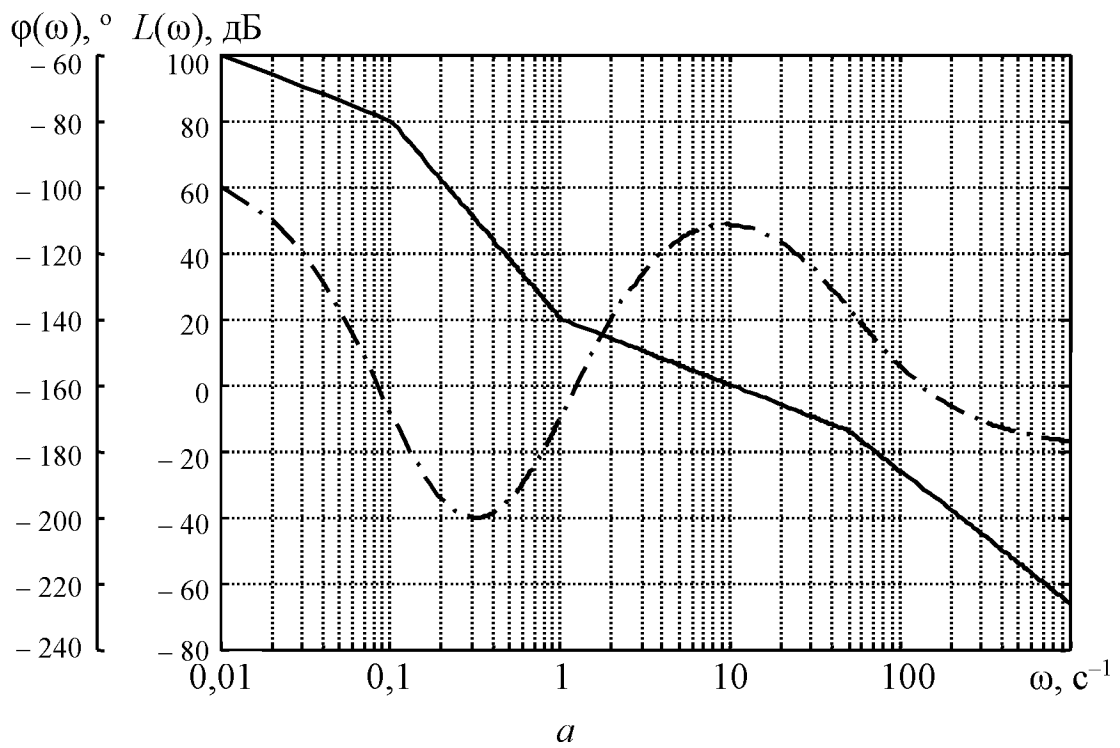


Рис. 4.16. Асимптотичні ЛАЧХ (суцільна лінія) та ЛФЧХ (штрихпунктирна лінія) розімкнених систем

5. ЦИФРОВІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

5.1. ТИПОВІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ СТРУКТУРИ ЦИФРОВИХ САК З ОБ'ЄКТОМ КЕРУВАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ДІЇ

Цифровими називаються системи автоматичного керування, в яких при обробці та передачі інформації використовуються послідовності цифрових кодів діянь.

На сьогодні у зв'язку із поширенням цифрової обчислювальної техніки і застосування її для вирішення найскладніших завдань керування технічними об'єктами, у тому числі оптимального керування, багато систем радіоавтоматики виконуються як цифрові САК.

Основною частиною цифрових САК є *цифровий керуючий пристрій* (ЦКП), виконаний на базі цифрової ЕОМ або спеціалізованого цифрового обчислювального пристрою. У ЦКП реалізується алгоритм формування цифрового коду керуючого діяння шляхом виконання визначеної послідовності арифметичних і логічних операцій над цифровими кодами вхідних діянь. Тому між входами ЦКП і виходами функціональних блоків неперервної дії, що підключаються до ЦКП, встановлюються *аналого-цифрові перетворювачі* (АЦП). Відповідно, для керування неперервним об'єктом вихідний цифровий код ЦКП перетворюється на неперервну величину за допомогою *цифро-аналогового перетворювача* (ЦАП).

Типові функціональні структури цифрових САК, що використовуються для керування неперервними об'єктами, зображені на рис. 5.1, *а, б*. У першому варіанті відхилення $e(t)$ між вхідною $x(t)$ і керованою $y(t)$ величинами виділяється у порівнюючому блоці (ПБ) неперервної дії, після чого воно за допомогою АЦП перетворюється на відповідну послідовність цифрових кодів $N_e(nT)$. У другому варіанті вхідна $x(t)$ і керована $y(t)$ величини піддаються окремим аналого-цифровим перетворенням на відповідні цифрові коди $N_x(nT), N_y(nT)$. Далі в обох варіантах схеми ЦКП, використовуючи вхідні цифрові коди, утворює послідовність керуючих цифрових кодів $N_v(nT)$. Керуючий цифровий код $N_v(nT)$ перетворюється за допомогою ЦАП на неперервне діяння $v(t)$, що надходить на виконавчий блок (ВБ). У ВБ формується керуюче діяння $u(t)$, яке подається на об'єкт керування (ОК).

Для проведення аналізу цифрової САК необхідно одержати її математичну модель. Очевидно, що вона буде містити моделі функціональних блоків як неперервної дії (ПБ, ВБ, ОК), так і дискретної дії (ЦКП), і, крім того, моделі блоків, що здійснюють перетворення неперервних діянь на дискретні (АЦП) і дискретних – на неперервні (ЦАП). Методи математичного опису блоків неперервної і дискретної дії розглядалися у попередніх розділах посібника. Отже, для побудови математичної моделі

цифрової САК необхідно додатково одержати математичні моделі АЦП і ЦАП.

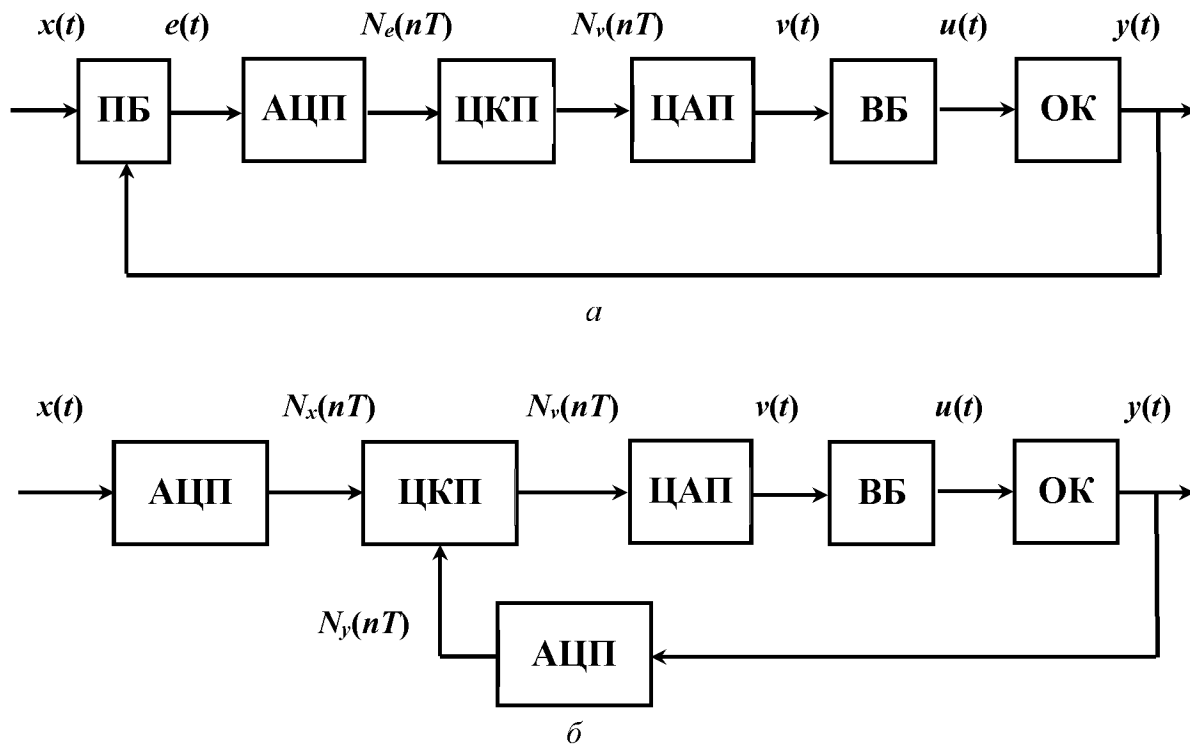


Рис. 5.1. Типові функціональні структури цифрових САК, що використовуються для керування неперервними об'єктами

5.2. СТИСЛА ХАРАКТЕРИСТИКА І МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АЦП

Аналого-цифровий перетворювач призначений для перетворення неперервного діяння на послідовність цифрових кодів.

Під час перетворення неперервного діяння на послідовність цифрових кодів у АЦП, незалежно від способу його технічного виконання і виду вхідного діяння (величини постійної напруги, амплітуди, частоти або фази коливань змінної напруги, кута повороту вала об'єкта та ін.), здійснюються такі математичні операції:

- часова дискретизація неперервного вхідного діяння;
- квантування за рівнем.

Часова дискретизація неперервного вхідного діяння $x(t)$ обумовлена тим, що цифровий код на виході АЦП відповідає значенням вхідного діяння тільки в дискретні моменти часу $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$, де T – період часової дискретизації. Операція часової дискретизації описується виразом, що пов'язує обвідну $x(t)$ з відповідною ґратчастою функцією

$$x(nT) = x(t)|_{t=nT}. \quad (5.1)$$

На схемі математичної моделі операцію часової дискретизації зображують за допомогою ключа, який миттєво замикається і розмикається (рис. 5.2).

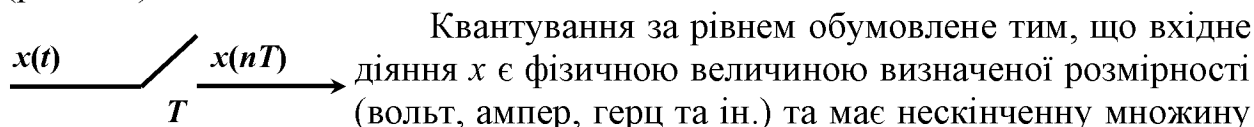


Рис. 5.2. Операція часової дискретизації

Квантування за рівнем обумовлене тим, що вхідне діяння x є фізичною величиною визначеної розмірності (вольт, ампер, герц та ін.) та має нескінченну множину значень, а вихідний цифровий код АЦП N_x є безрозмірною цілочисловою величиною зі скінченною множиною значень.

Квантування за рівнем полягає в тому, що множина значень вхідної величини x поділяється на окремі відрізки, кожному з яких на виході АЦП відповідає одне ціле число.

Найчастіше застосовується метод **квантування з округленням до найближчого цілого числа**, яке має найбільшу точність перетворення аналогової величини на цифровий код. Розглянемо цей метод докладніше.

Нехай вхідна величина x визначена на симетричному інтервалі $[-x_0, x_0]$, а кількість розрядів двійкового коду N_x на виході АЦП дорівнює b . При квантуванні з округленням до найближчого цілого числа інтервал $[-x_0, x_0]$ розбивається на рівні відрізки довжиною q , при цьому значенням $x \in [-q/2, q/2]$ відповідає значення коду $N_x = 0$ (рис. 5.3). Довжина відрізків, названа **кроком квантування за рівнем**, дорівнює

$$q = \frac{2x_0}{2^b - 1}. \quad (5.2)$$

Процедура створення цифрового коду з округленням до найближчого цілого числа визначається виразом

$$N_x = \text{int} \left[\hat{N}_x + 0,5 \right], \quad (5.3)$$

де

$$\hat{N}_x = x / q \quad (5.4)$$

– безрозмірна величина, нормована відносно кроку квантування за рівнем;
 $\text{int}[*]$ – операція виділення цілої частини.

Як впливає з (5.4), крок квантування за рівнем одночасно визначає масштаб перетворення, тому він також називається ціною молодшого розряду АЦП.

Отже, квантування за рівнем у АЦП може розглядатись як сукупність двох операцій:

- зміни масштабу (нормування) вхідної величини за правилом (5.4);
- округлення числа \hat{N}_x , отриманого після зміни масштабу, до найближчого цілого за правилом (5.3).

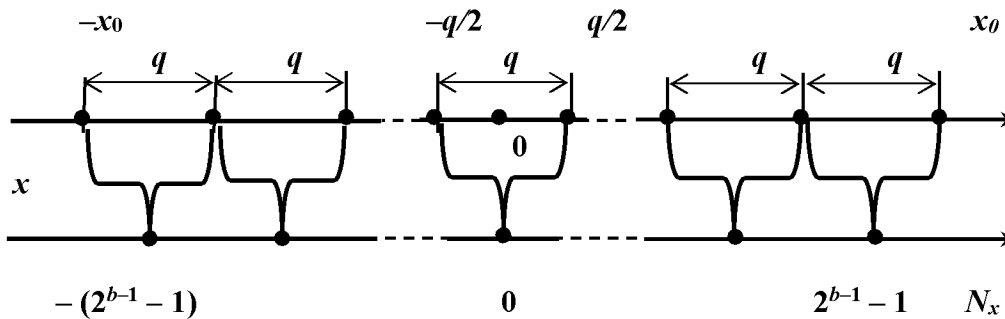


Рис. 5.3. Процедура створення цифрового коду з округленням до найближчого цілого числа

Схема математичної моделі АЦП, на якій відображені операції часової дискретизації, зміни масштабу і округлення відповідно до виразів (5.1), (5.3), (5.4), зображена на рис. 5.4.

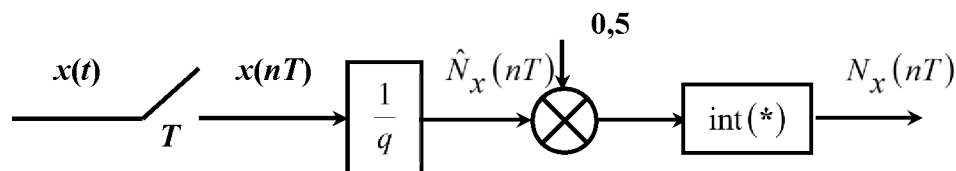


Рис. 5.4. Схема математичної моделі АЦП, на якій відображені операції часової дискретизації

Основною характеристикою АЦП є **статична характеристика** – **залежність числа N_x на виході АЦП від перетворюваної величини x** . При квантуванні з округленням до найближчого цілого числа вона має вигляд, зображений на рис. 5.5, а. Як бачимо, квантування за рівнем є нелінійною операцією, при якій після зміни масштабу точно значення числа \hat{N}_x замінюється на найближче цілочислове (кусково-постійне) значення N_x .

Використання нелінійної математичної моделі АЦП суттєво ускладнює проведення дослідження САК, тому зазвичай застосовують його лінеаризовану математичну модель. Суть лінеаризації полягає в заміні нелінійного перетворення (5.3) лінійною операцією підсумовування:

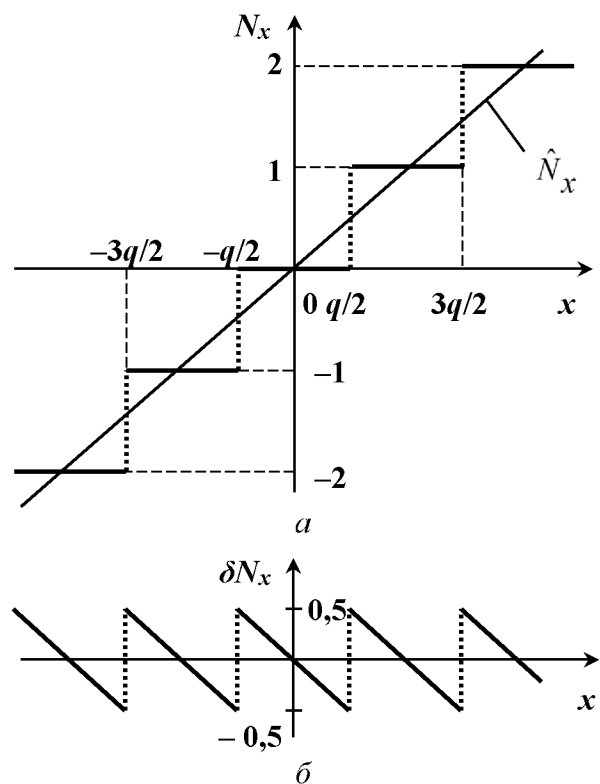


Рис. 5.5. Процедура квантування: а – з округленням до найближчого цілого числа; б – помилка округлення

$$N_x(nT) = \hat{N}_x(nT) + \delta N_x(nT), \quad (5.5)$$

де δN_x – помилка, що утворюється при виділенні найближчого цілого з величини \hat{N}_x (рис. 5.5, б). Ця помилка називається “шумом” округлення.

З аналізу рис. 5.5, б нескладно встановити, що при округленні до найближчого цілого $|\delta N_x| \leq 0,5$.

Для оцінки впливу “шуму” округлення на якість роботи системи вважають, що він є додатковим зовнішнім заважаючим входним діянням, яке являє собою некорельовану випадкову послідовність, розподілену на інтервалі $[-0,5; 0,5]$ за рівномірним законом (рис. 5.6).

Щільність розподілу ймовірностей “шуму” округлення визначається виразом

$$p(\delta N_x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\delta N_x| \leq 0,5, \\ 0 & \text{при } |\delta N_x| > 0,5. \end{cases}$$

Виходячи з цієї гіпотези одержимо ймовірнісні характеристики “шуму” округлення:

– математичне сподівання –

$$M\{\delta N_x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta N_x p(\delta N_x) d(\delta N_x) = 0;$$

– дисперсія –

$$D\{\delta N_x\} = M\{\delta N_x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta N_x^2 p(\delta N_x) d(\delta N_x) = 1/12. \quad (5.6)$$

Спрощена схема лінеаризованої математичної моделі АЦП зображена на рис. 5.7.

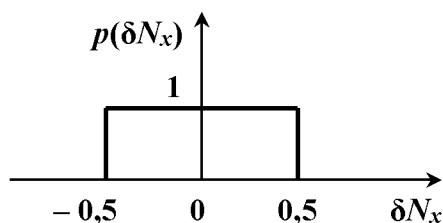


Рис. 5.6. Закон розподілу шуму

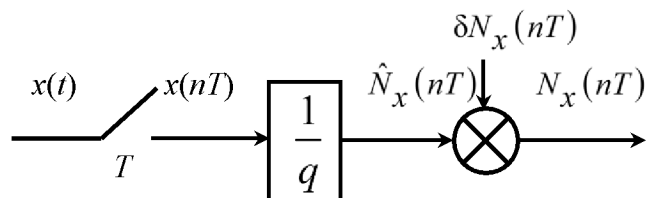


Рис. 5.7. Спрощена схема лінеаризованої математичної моделі АЦП

5.3. СТИСЛА ХАРАКТЕРИСТИКА І МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦАП

Цифро-аналоговий перетворювач призначений для перетворення послідовності чисел, представлених цифровими кодами, на неперервне діяння.

Основними математичними операціями, що здійснюються у довільному ЦАП, є масштабне перетворення коду $N_v(nT)$ на послідовність величин $v(nT)$ і фіксація їх значень протягом інтервалу часу $(nT, nT + T)$.

Масштабне перетворення при пропорційній залежності між числовим значенням коду $N_v(nT)$ і відповідним йому значенням вихідної величини ЦАП визначається виразом

$$v(nT) = QN_v(nT), \quad (5.7)$$

де Q – масштабний коефіцієнт (ціна молодшого розряду перетворюваного коду).

Операція фіксації значень гратчастої функції протягом одного періоду є одним зі способів відновлення її обвідної. Для математичного опису операції фіксації введемо в розгляд елементарну кусково-сталу функцію (рис. 5.8):

$$k_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t \geq T. \end{cases} \quad (5.8)$$

На рис. 5.9 зображені графіки вхідного $N_v(nT)$ та вихідного $v(t)$ діянь ЦАП. Нескладно переконатися, що вихідна величина ЦАП може розглядатись як суперпозиція кусково-постійних функцій вигляду (5.8), зсунених на інтервали часу $0, T, 2T, \dots$ та змінених у масштабі відповідно до виразу (5.7), тобто

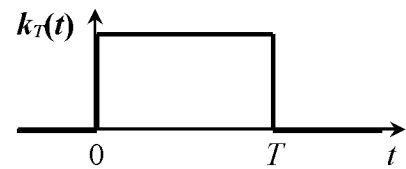


Рис. 5.8. Елементарна кусково-стала функція

$$v(t) = Q \sum_{m=0}^{\infty(n)} N_v(mT) k_T(t - mT). \quad (5.9)$$

Верхня межа підсумовування може бути встановлена рівною n , якщо $t < nT + T$.

У той же час вираз (5.9) являє собою згортку суми. Тому функція

$$k_{\text{ЦАП}}(t) = Qk_T(t), \quad (5.10)$$

яка входить до неї, є імпульсною характеристикою ЦАП.

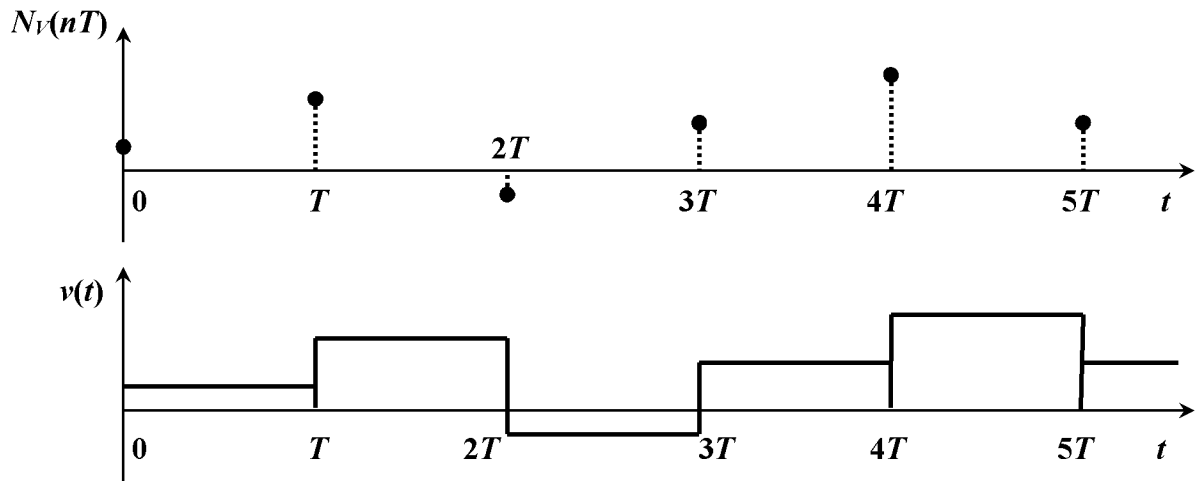


Рис. 5.9. Графіки вхідного $N_v(nT)$ та вихідного $v(t)$ діянь ЦАП

Відзначимо, що у виразі (5.9) вхідне діяння ЦАП описується за допомогою гратчастої функції, а імпульсна характеристика ЦАП є функцією неперервного аргументу. Тому на схемі математичної моделі ЦАП повинна бути відображена операція перетворення дискретного вхідного діяння $N_v(nT)$ на неперервне. Для цього запишемо функцію $k_T(t)$ у вигляді різниці двох одиничних функцій, зсунених на період T (рис. 5.10):

$$k_T(t) = 1(t) - 1(t - T) = 1(t) - S^{-1}1(t) = (1 - S^{-1})1(t). \quad (5.11)$$

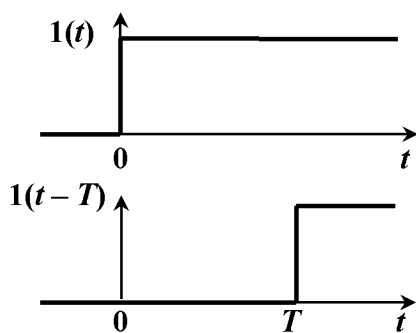


Рис. 5.10. Функція $k_T(t)$

у вигляді різниці двох одиничних функцій, зсунених на період T

З урахуванням зв'язку (*) між одиничною функцією і δ -функцією

$$1(t) = \frac{1}{D} \delta(t),$$

де $1/D$ – оператор інтегрування, приведемо вираз (5.11) до вигляду

$$k_T(t) = \frac{1 - S^{-1}}{D} \delta(t). \quad (5.12)$$

Після підстановки виразу (5.12) у вираз (5.9) отримаємо, що вихідна величина ЦАП приводиться до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= Q \sum_{m=0}^{n(\infty)} N_v(mT) \frac{1-S^{-1}}{D} \delta(t-mT) = \\
 &= Q \frac{1-S^{-1}}{D} \sum_{m=0}^{n(\infty)} N_v(mT) \delta(t-mT) = K_{\text{ЦАП}}(D, S) \delta_{N_v, T}(t),
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

де

$$K_{\text{ЦАП}}(D, S) = Q \frac{1-S^{-1}}{D}
 \tag{5.14}$$

– оператор передачі ЦАП;

$$\delta_{N_v, T}(t) = \sum_{m=0}^{n(\infty)} N_v(mT) \delta(t-mT)
 \tag{5.15}$$

– послідовність δ -імпульсів, модульованих за амплітудою значеннями дискретного вхідного діяння $N_v(nT)$.

На рис. 5.11 зображена схема математичної моделі ЦАП, побудована відповідно до виразів (5.13) – (5.15). У першому блоці здійснюється амплітудно-імпульсна модуляція послідовності δ -імпульсів

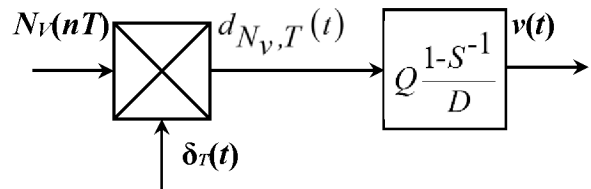


Рис. 5.11. Схема математичної моделі ЦАП

$$\delta_T(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t-mT)
 \tag{5.16}$$

значеннями вхідного діяння ЦАП $N_v(nT)$, яка описується виразом (5.15). Таким чином дискретне діяння $N_v(nT)$ перетворюється на неперервну послідовність δ -імпульсів, модульованих за амплітудою. У другому блоці послідовність модульованих δ -імпульсів $d_{N_v, T}(t)$ перетворюється на послідовність кусково-сталих величин зі зміною масштабу відповідно до ціни молодшого розряду ЦАП.

Крім розглянутої схеми математичної моделі, використовуються й інші її варіанти. Наприклад, для розподілу загальної схеми математичної моделі цифрової САК на дискретну та неперервну частини оператор $(1-S^{-1})$ виділяють в окремий блок, який розміщують на вході моделі ЦАП (рис. 5.12). Його вихідна величина дорівнює першій зворотній

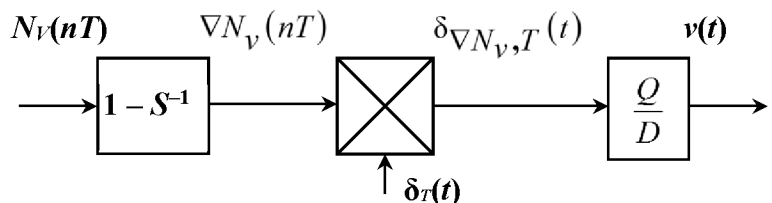


Рис. 5.12. Схеми математичної моделі цифрової САК з неперервною частиною на вході ЦАП

різниці значень послідовності цифрових кодів:

$$\nabla N_v(nT) = (1 - S^{-1})N_v(nT) = N_v(nT) - N_v(nT - T).$$

У цьому випадку на виході амплітудно-імпульсного модулятора створюється послідовність δ -імпульсів, модульованих значеннями $\nabla N_v(nT)$:

$$\delta_{\nabla N_v, T}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \nabla N_v(mT) \delta(t - mT). \quad (5.17)$$

Знайдемо передавальну функцію ЦАП. Її можна одержати безпосередньо з оператора передачі (5.14) шляхом формальної заміни

$$K_{\text{ЦАП}}(p) = K_{\text{ЦАП}}(D, S) \Big|_{D=p, S=\exp(pT)} = Q \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (5.18)$$

На закінчення одержимо і проаналізуємо частотні характеристики ЦАП. Скориставшись виразом (5.18), знайдемо КЧХ:

$$K_{\text{ЦАП}}(j\omega) = K_{\text{ЦАП}}(p) \Big|_{p=j\omega} = Q \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (5.19)$$

Для відшукування АЧХ і ФЧХ перейдемо у виразі (5.19) до показникової форми запису:

$$K_{\text{ЦАП}}(j\omega) = Q \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} e^{-j\omega T/2} = QT \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} e^{-j\omega T/2}.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ ЦАП визначаються виразами

$$K_{\text{ЦАП}}(\omega) = QT \left| \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right|, \quad (5.20)$$

$$\varphi_{\text{ЦАП}}(\omega) = -\omega T / 2 + k\pi, \quad (5.21)$$

де $k = \text{int}(\omega T / 2\pi) = \text{int}(\omega / \Omega)$.

Графіки АЧХ і ФЧХ ЦАП зображені на рис. 5.13. ЦАП за частотними властивостями є фільтром нижніх частот з коефіцієнтом підсилення QT на частоті, рівній нулю, і з коефіцієнтом підсилення, рівним нулю на частотах, кратних циклічній частоті часової дискретизації $\Omega = 2\pi/T$. Фазочастотна характеристика на інтервалі частот $[-\Omega, \Omega]$ змінюється за лінійним законом з від'ємним коефіцієнтом нахилу $d\varphi_{\text{ЦАП}}(\omega)/d\omega = -T/2$.

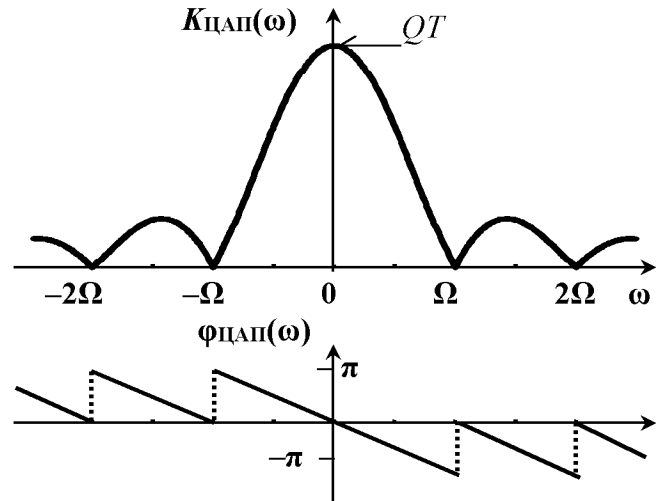


Рис. 5.13. Графіки АЧХ і ФЧХ ЦАП

5.4. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО КЕРУЮЧОГО ПРИСТРОЮ

Цифровий керуючий пристрій (ЦКП) призначений для формування цифрового коду керуючого діяння відповідно до заданого алгоритму виконання визначеної послідовності арифметичних і логічних операцій над цифровими кодами вхідних діянь.

Основними складовими частинами алгоритму функціонування ЦКП є алгоритм обчислення машинного значення $\check{N}_v(nT)$ керуючого коду і процедура перерахування машинного значення $\check{N}_v(nT)$ у значення вихідного коду $N_v(nT)$, який видається в ЦАП.

Алгоритм обчислення машинного значення керуючого коду передбачає виконання арифметичних і логічних операцій зі значеннями вхідних кодів, що знімаються з АЦП у поточному такті, а також зі значеннями кодів змінних, що зберігаються в оперативній пам'яті (додавання змінних, множення змінної на константу, порівняння величин, логічний перехід та ін.). У загальному випадку цей алгоритм можна записати у вигляді різницевого рівняння, розв'язаним для поточного машинного значення керуючого коду. Так, для схеми цифрової САК, що зображена на рис. 5.1, а, різницеве рівняння "вхід-вихід" має вигляд

$$\check{N}_v(nT) = F[\check{N}_v(nT - T), \check{N}_v(nT - 2T), \dots, \check{N}_v(nT - kT)];$$

$$N_e(nT), N_e(nT - T), \dots, N_e(nT - kT)],$$

де $\tilde{N}_v(nT), \tilde{N}_v(nT - T), \tilde{N}_v(nT - 2T), \dots, \tilde{N}_v(nT - kT)$ – машинні значення керуючого коду в поточному і попередніх тактах;

$N_e(nT), N_e(nT - T), \dots, N_e(nT - kT)$ – значення кодів, що надходять з виходу АЦП у поточному і попередніх тактах.

Якщо в алгоритмі виконуються тільки лінійні операції додавання і множення змінних на константу, то його можна записати у вигляді лінійного різницевого рівняння “вхід-вихід”:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_v(nT) = & b_0 N_e(nT) + b_1 N_e(nT - T) + \dots + b_k N_e(nT - kT) - \\ & - a_1 \tilde{N}_v(nT - T) - a_2 \tilde{N}_v(nT - 2T) - \dots - a_k \tilde{N}_v(nT - kT). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Після введення оператора часового зсуву S і проведення звичайних перетворень рівняння (5.22) приводиться до операторної форми:

$$\tilde{N}_v(nT) = \tilde{K}_{\text{ЦКП}}(S) N_e(nT), \quad (5.23)$$

де

$$\tilde{K}_{\text{ЦКП}}(S) = \frac{\sum_{m=0}^k b_m S^{-m}}{\sum_{r=0}^k a_r S^{-r}} \quad (5.24)$$

– лінійний різницевий оператор ЦКП ($a_0 = 0$);

a_r, b_m – константи, що зберігаються в пам’яті ЦКП.

Процедура перерахування машинного значення $\tilde{N}_v(nT)$ у вихідне значення $N_v(nT)$ керуючого коду обумовлена необхідністю скорочення розрядної сітки двійкового коду, що використовується в ЕОМ, до розміру розрядної сітки вхідного регістра ЦАП, а в ряді випадків – також і необхідністю зміни розмірності машинного коду.

Власне кажучи, ця процедура є процедурою зміни масштабу змінних і виконується в ЦКП, як правило, з округленням до найближчого цілого числа:

$$N_v(nT) = \text{int} \left[\frac{\tilde{N}_v(nT)}{q_v} + 0,5 \right], \quad (5.25)$$

де q_v – масштабний коефіцієнт між машинним і вихідним значеннями керуючого коду.

Відповідно до (5.24) і (5.25) схема математичної моделі ЦКП має вигляд, зображений на рис. 5.14.

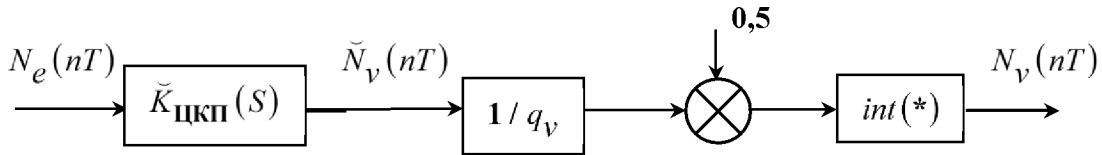


Рис. 5.14. Схема математичної моделі ЦКП

Внаслідок того, що операція округлення є нелінійною, математична модель ЦКП буде нелінійною навіть при реалізації лінійного алгоритму обчислення значень машинного коду. Для лінеаризації моделі ЦКП операцію виділення найближчого цілого заміняють операцією введення “шуму” округлення $\delta N_v(nT)$ аналогічно тому, як це було виконано при лінеаризації математичної моделі АЦП. Імовірнісні характеристики “шуму” округлення вихідного коду ЦКП мають ті ж значення, що і характеристики “шуму” округлення АЦП: $M\{\delta N_v\} = 0$, $D\{\delta N_v\} = 1/12$.

Схема лінеаризованої математичної моделі ЦКП зображена на рис. 5.15, де

$$K_{\text{ЦКП}}(S) = \frac{1}{q_v} \tilde{K}_{\text{ЦКП}}(S). \quad (5.26)$$

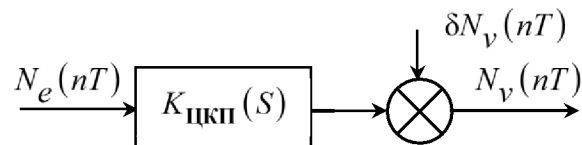


Рис. 5.15. Схема лінеаризованої математичної моделі ЦКП

5.5. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦИФРОВОЇ САК З ОБ'ЄКТОМ КЕРУВАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ДІЇ

Проведений аналіз функціонування й отримані схеми математичних моделей АЦП, ЦАП і ЦКП дозволяють скласти математичну модель цифрової САК. Розглянемо варіант лінеаризованої схеми математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії, функціональна схема якої зображена на рис. 5.1, а, для таких вихідних даних:

а) неперервний порівнювальний пристрій описується лінійним рівнянням

$$e(t) = x(t) - y(t),$$

де $x(t) = g(t) + f(t)$ – вхідне діяння, що являє собою адитивну суміш задавального $g(t)$ і заважаючого $f(t)$ діянь;

б) АЦП формує цифровий код з округленням до найближчого цілого з кроком квантування за рівнем q і подається лінеаризованою схемою математичної моделі відповідно до рис. 5.7;

в) ЦКП має оператор передачі $K_{ЦКП}(S)$ і подається лінеаризованою схемою математичної моделі відповідно до рис. 5.15;

г) ЦАП характеризується ціною молодшого розряду Q і подається схемою математичної моделі відповідно до рис. 5.12;

д) неперервна частина системи складається з виконавчого блока і об'єкта керування та має оператор передачі $K_{НЧ}(D)$.

Отримана за таких вихідних даних лінеаризована схема математичної моделі цифрової САК зображена на рис. 5.16. Схема математичної моделі складається з двох частин. В одній з них (від ключа АЦП до входу модулятора ЦАП) фігурують дискретні діяння та різницеві оператори передачі блоків дискретної дії, а в другій – неперервні діяння та диференціальні оператори передачі блоків неперервної дії. Отже, загальна схема математичної моделі цифрової САК є дискретно-неперервною.

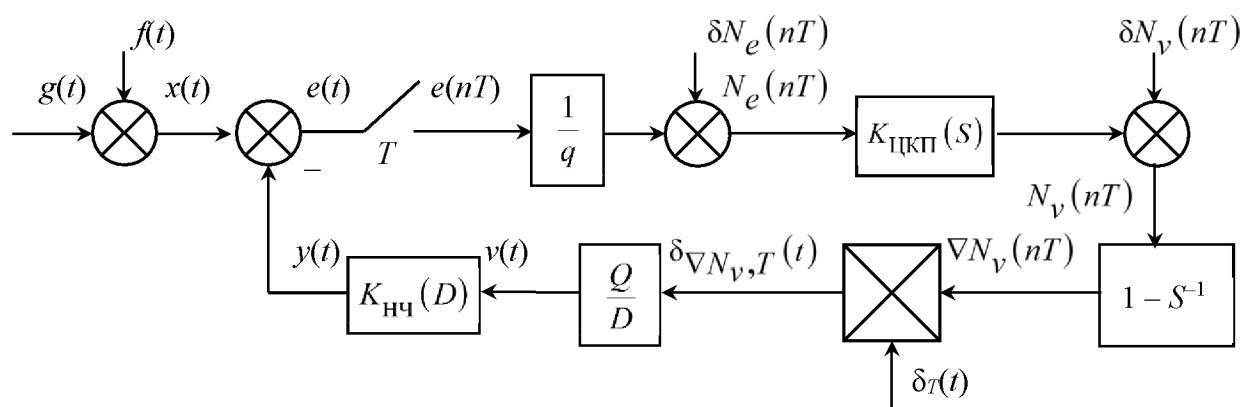


Рис. 5.16. Лінеаризована схема математичної моделі цифрової САК

При аналізі цифрової САК на основі отриманої дискретно-неперервної математичної моделі виникають значні труднощі. Вони обумовлені тим, що для опису процесів у системі доводиться одночасно застосовувати математичний апарат функцій неперервного і дискретного аргументів. Тому доцільно дискретно-неперервну модель замінити еквівалентною їй спрощеною дискретною або неперервною моделлю. **Еквівалентність моделей передбачає, що результати аналізу процесів при використанні вихідної і спрощеної моделей повинні бути однаковими.**

При переході до **еквівалентної дискретної моделі** всі неперервні діяння $\xi(t)$, що описуються функціями неперервного аргументу, замінюють на дискретні, а диференціальні рівняння “вхід-вихід” або оператори передачі $K(D)$, за допомогою яких у вихідній моделі встановлюється зв’язок між неперервними діяннями, – на різницеві рівняння чи оператори передачі:

$$\xi(t) \rightarrow \xi(nT), \quad \eta(t) = K(D)\xi(t) \rightarrow \eta(nT) = K^{DE}(S)\xi(nT).$$

Як відомо, перехід від неперервних діянь $\xi(t)$ до дискретних (гратчастих функцій) здійснюється шляхом часової дискретизації обвідних за правилом

$$\xi(nT) = \xi(t)|_{t=nT}.$$

Гратчасті функції однозначно визначаються зі своїх обвідних, тому еквівалентна дискретна модель може використовуватись при довільних видах неперервних діянь, а також структурах та параметрах неперервних частин, що замінюються. Однак при такій заміні за отриманими значеннями гратчастих функцій не вдається визначити точний вигляд неперервних діянь, що існують у вихідній моделі.

При переході до **еквівалентної неперервної моделі** всі дискретні діяння $\xi(nT)$, що подаються гратчастими функціями, замінюють на неперервні, а різнищеві рівняння “вхід-вихід” чи відповідні оператори передачі $K(S)$, за допомогою яких у вихідній моделі встановлюється зв’язок між дискретними діяннями, – на диференціальні рівняння чи оператори передачі:

$$\xi(nT) \rightarrow \tilde{\xi}(t), \quad \eta(nT) = K(S)\xi(nT) \rightarrow \tilde{\eta}(t) = K^{HE}(D)\tilde{\xi}(t). \quad (5.27)$$

У загальному випадку одній гратчастій функції відповідає нескінченна множина обвідних, тому застосування еквівалентної неперервної моделі має суттєві обмеження. Розглянемо їх більш докладно.

З теореми В. А. Котельникова випливає, що **принципова можливість відновити обвідну $\xi(t)$ за значеннями гратчастої функції $\xi(nT)$ існує лише в тому випадку, коли ширина спектра обвідної $\omega_{0\xi}$ задовольняє нерівності**

$$\omega_{0\xi} < \Omega / 2, \quad (5.28)$$

де $\Omega = 2\pi/T$ – циклічна частота часової дискретизації, яка має розмірність c^{-1} . Лише в цьому випадку основна і бічні складові періодичного спектра гратчастої функції $\xi(nT)$ не перекриваються між собою.

При виконанні вказаної вимоги відновлення обвідної може бути здійснене шляхом виділення основної складової та подавлення бічних складових спектра гратчастої функції на виході системи. Отже, **застосування еквівалентної неперервної моделі можливе лише в тому випадку, коли система являє собою фільтр нижніх частот зі смугою пропускання (прозорості) $\omega_{гр}$, яка задовольняє умові**

$$\omega_{гр} < \Omega - \omega_0. \quad (5.29)$$

З урахуванням того, що верхня межа для ширини основної складової спектра гратчастих функцій $\omega_{0\max} < \Omega/2$, гарантована смуга пропускання (прозорості) для застосування еквівалентної неперервної моделі визначається більш строгою нерівністю

$$\omega_{\text{гр}} < \Omega/2. \quad (5.30)$$

Отже, умова (5.28) гарантує, що бічні складові спектрів дискретних діянь не будуть впливати на спектр їх основних складових у процесі проходження діянь через функціональні блоки системи, а умова (5.30) – що бічні складові будуть подавлені на виході системи, і завдяки цьому спектр вихідного діяння системи не буде містити компонентів, обумовлених ними.

5.6. МЕТОДИКА ОТРИМАННЯ СПРОЩЕНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Розглянемо методику отримання спрощеної еквівалентної дискретної математичної моделі на прикладі схеми дискретно-неперервної моделі, зображеної на рис. 5.16.

По-перше, відзначимо, що частина схеми, розташована між діяннями $e(nT)$ і $\nabla N_v(nT)$, залишається незмінною.

По-друге, для представлення вхідного $x(t)$ і вихідного $y(t)$ діянь відповідними їм дискретними діяннями $x(nT)$ і $y(nT)$ достатньо перенести ключ з виходу другого суматора на його входи, після чого вважати, що вхідним діянням є $x(nT)$, а вихідним – $y(nT)$ (рис. 5.17).

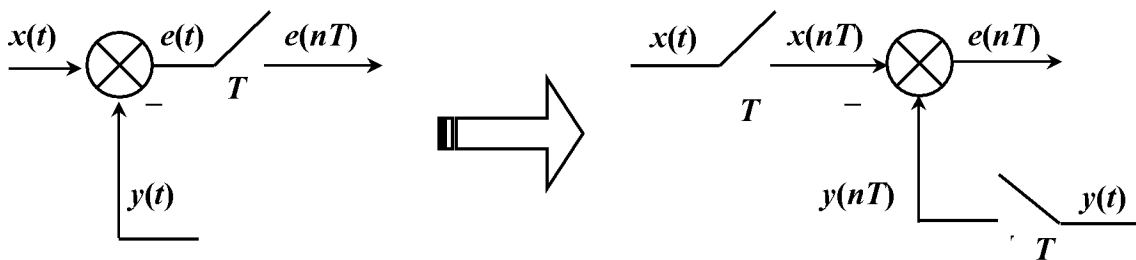


Рис. 5.17. Перетворення схеми математичної моделі цифрової САК

Нарешті, залишається замінити частину схеми, розташовану між діяннями $\nabla N_v(nT)$ і $y(nT)$, еквівалентною схемою (рис. 5.18), де $K^{\text{ДЕ}}(S)$ – різницевий оператор передачі, яким замінюють частину, що виділена пунктиром.

Після вказаних перетворень шукана еквівалентна спрощена дискретна математична модель цифрової САК набуває вигляду, зображеного на рис. 5.19.

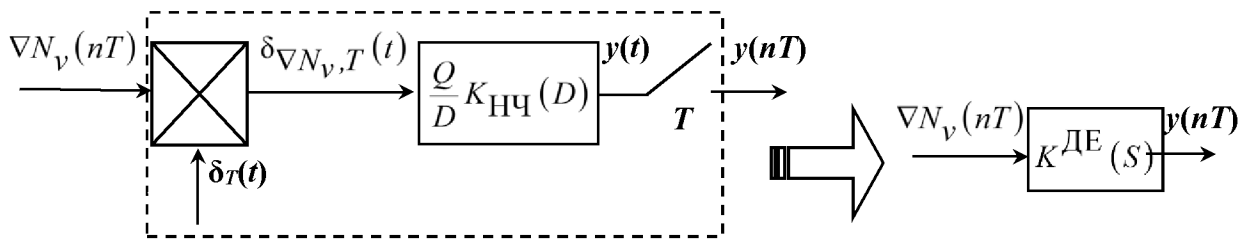


Рис. 5.18. Заміна частини моделі САК еквівалентною схемою

Розглянемо методику отримання різницевого оператора передачі $K^{ДЕ}(S)$ частини, що підлягає заміні. Для цього знайдемо оператор “вхід-вихід”, за допомогою якого встановлюється зв’язок між діями $\nabla N_v(nT)$ та $y(nT)$.

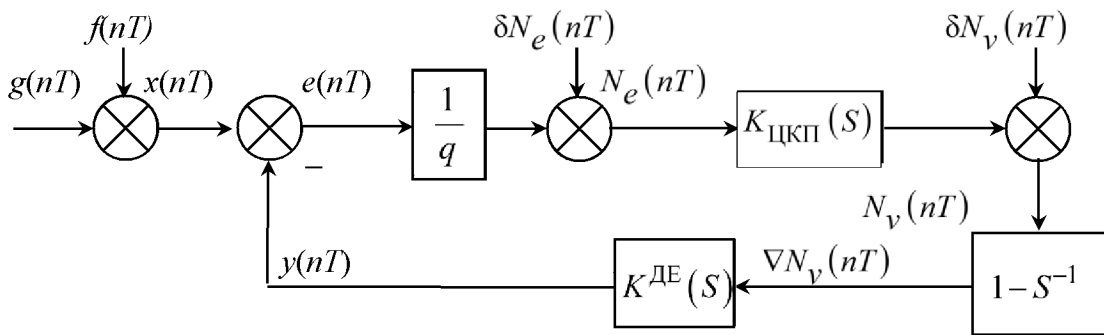


Рис. 5.19. Еквівалентна спрощена дискретна математична модель цифрової САК

Зі схеми (рис. 5.18) випливає, що диференціальний оператор передачі частини, що підлягає заміні, визначається виразом

$$K(D) = \frac{Q}{D} K_{НЧ}(D), \quad (5.31)$$

тобто він складається з операторів передачі послідовно з’єднаних інтегруючої ланки, яка входить у математичну модель ЦАП, та неперервної частини системи (виконавчого блока і об’єкта керування).

За оператором передачі $K_H(D)$ запишемо передавальну функцію частини, що підлягає заміні:

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p} = \frac{Q}{p} K_{НЧ}(p), \quad (5.32)$$

після чого визначимо її імпульсну характеристику

$$k(t) = L^{-1}\{K(p)\}. \quad (5.33)$$

Користуючись імпульсною характеристикою та виразом (5.17) для вхідного діяння $\delta_{\nabla N_v, T}(t)$, отримаємо, що неперервне вихідне діяння $y(t)$ визначається таким виразом:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} k(t-\tau) \delta_{\nabla N_v, T}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} k(t-\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \nabla N_v(mT) \delta(\tau - mT) d\tau = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \nabla N_v(mT) \int_0^{\infty} k(t-\tau) \delta(\tau - mT) d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \nabla N_v(mT) k(t - mT). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Тоді шуканий оператор “вхід-вихід” частини, що підлягає заміні, визначається виразом

$$y(nT) = y(t)|_{t=nT} = \sum_{m=0}^{\infty} \nabla N_v(mT) k(nT - mT). \quad (5.35)$$

Вираз (5.35) являє собою згортку суми. Тому ґратчаста функція $k(nT)$ є імпульсною характеристикою дискретного еквівалента частини, що підлягає заміні: $k^{\text{ДЕ}}(nT) = k(nT)$. З виразів (5.34), (5.35) одержуємо правило її визначення:

$$k^{\text{ДЕ}}(nT) = k(t)|_{t=nT}. \quad (5.36)$$

Для отримання оператора передачі дискретного еквівалента $K^{\text{ДЕ}}(S)$ спочатку за імпульсною характеристикою $k^{\text{ДЕ}}(nT)$ визначимо Z -передавальну функцію дискретного еквівалента

$$K^{\text{ДЕ}}(z) = Z\{k^{\text{ДЕ}}(nT)\}, \quad (5.37)$$

після чого отримаємо шуканий оператор передачі

$$K^{\text{ДЕ}}(S) = K^{\text{ДЕ}}(z)|_{z=S}. \quad (5.38)$$

Отже, для отримання еквівалентного різницевого оператора передачі необхідно:

1) зі схеми математичної моделі знайти диференціальний оператор передачі $K(D)$ частини, що підлягає заміні, та записати, згідно з (5.32), її передавальну функцію $K(p)$;

2) користуючись таблицею перетворень Лапласа, отримати імпульсну характеристику $k(t) = L^{-1}\{K(p)\}$ частини, що підлягає заміні;

3) від імпульсної характеристики $k(t)$ перейти, згідно з (5.36), до імпульсної характеристики дискретного еквівалента $k^{\text{ДЕ}}(nT)$;

4) користуючись таблицею Z-перетворень, визначити Z-передавальну функцію дискретного еквівалента $K^{\text{ДЕ}}(z) = Z\{k^{\text{ДЕ}}(nT)\}$;

5) від Z-передавальної функції дискретного еквівалента $K^{\text{ДЕ}}(z)$ перейти, згідно з (5.38), до різницевого оператора передачі $K^{\text{ДЕ}}(S)$.

Відзначимо, що за наявності сполученої таблиці перетворень Лапласа неперервних функцій і Z-перетворень ґратчастих функцій пп. 2, 3 наведеного вище алгоритму можна не виконувати, а здійснити перехід від передавальної функції $K(p)$ безпосередньо до еквівалентної передавальної функції $K^{\text{ДЕ}}(z)$, яка розміщується в тому ж рядку таблиці (див. додаток 2).

Приклад

Для схеми математичної моделі цифрової САК, зображеної на рис. 5.16, отримати оператор передачі дискретного еквівалента, якщо оператор передачі виконавчого блока і об'єкта керування описується виразом

$$K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K}{1 + T_0 D}.$$

Розв'язання

Відповідно до розглянутої методики виконуємо послідовно такі операції:

1) зі схеми математичної моделі системи, зображеної на рис. 5.16, знаходимо диференціальний оператор передачі та передавальну функцію частини, що підлягає заміні:

$$K(D) = \frac{QK}{D(1 + T_0 D)},$$

$$K(p) = K(D)|_{D=p} = \frac{QK}{p(1+T_0p)};$$

2) користуючись суміщеною таблицею перетворень Лапласа та Z -перетворень (дод. 2), визначаємо Z -передавальну функцію дискретного еквівалента частини, що підлягає заміні:

$$K(p) = \frac{QK}{p(1+T_0p)} = QK \frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \Rightarrow K^{\text{ДЕ}}(z) = \frac{QK(1-a)z}{(z-1)(z-a)},$$

де $\alpha = 1/T_0$, $a = \exp(-T/T_0)$;

3) від отриманої Z -передавальної функції переходимо до шуканого різницевого оператора передачі дискретного еквівалента

$$K^{\text{ДЕ}}(S) = K^{\text{ДЕ}}(z)|_{z=S} = \frac{QK(1-a)S}{(S-1)(S-a)}.$$

5.7. МЕТОДИКА ОТРИМАННЯ СПРОЩЕНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

5.7.1. Аналіз умов, необхідних для побудови еквівалентної неперервної математичної моделі

Як зазначалося в підрозд. 5.5, для того щоб спрощена неперервна математична модель була еквівалентна вихідній, необхідно виконання таких умов:

1) умови (5.28), що накладається на ширину спектрів неперервних діянь $\xi(t)$, які піддаються часовій дискретизації:

$$\omega_{0\xi} < \Omega/2,$$

де $\Omega = 2\pi/T$ – циклічна частота часової дискретизації, с^{-1} ;

2) умови (5.30), що накладається на ширину смуги пропускання (прозорості) системи:

$$\omega_{\text{гр}} < \Omega/2.$$

Перевірка виконання умови (5.28) повинна бути проведена насамперед щодо вхідних діянь $g(t)$ та $f(t)$.

Радіотехнічні слідкуючі системи належать до систем відтворення задавального діяння, тому їх вихідна величина повинна якомога точніше відповідати закону зміни задавального діяння. Для забезпечення принципової можливості його відтворення частота часової дискретизації Ω завжди вибирається такою, що умова (5.28) гарантовано виконується щодо ширини спектра ω_{0g} задавального діяння $g(t)$: $\omega_{0g} < \Omega/2$. Як правило, вказана умова виконується також і в САК іншого призначення.

У системах радіоавтоматики заважаюче діяння $f(t)$ зазвичай є випадковим процесом, який має ширину спектра

$$\omega_{0f} \gg \Omega/2.$$

Тому після часової дискретизації воно вже не може бути однозначно відтворене за значеннями дискрет $f(nT)$. Однак перед системою ставиться не завдання його відтворення, а завдання подавлення його впливу на величину вихідного діяння. Для оцінки ймовірнісних характеристик помилки, що обумовлена заважаючим діянням, достатньо підібрати ймовірнісні характеристики еквівалентного неперервного випадкового процесу $\tilde{f}(t)$ таким чином, щоб результат впливу цього процесу і випадкової послідовності $f(nT)$ на точність функціонування САК був однаковим.

Аналогічний підхід використовується також при заміні шумів округлення $\delta N_e(nT)$, $\delta N_v(nT)$, що представляються у вигляді “білих” випадкових послідовностей, на еквівалентні неперервні діяння.

Процедура заміни діянь ґрунтується на застосуванні методів спектрального аналізу випадкових процесів, розгляд яких виходить за межі цього навчального посібника. Тому надалі тимчасово не братимемо до уваги діяння $f(nT)$, $\delta N_e(nT)$, $\delta N_v(nT)$.

Що стосується ширини спектра вихідного діяння $y(t)$, то вона визначається шириною смуги пропускання (прозорості) системи $\omega_{гр}$. Тому, якщо ширина смуги пропускання (прозорості) системи $\omega_{гр}$ задовольняє умові (5.30), то ширина спектра вихідного діяння обов'язково буде задовольняти умові (5.28).

Відзначимо також, що згідно з теорією оптимальної лінійної фільтрації [7, 14] для забезпечення найточнішого відтворення задавального діяння КЧХ системи повинна бути узгоджена зі спектром задавального діяння, тобто повинна виконуватись умова $\omega_{гр} \approx \omega_{0g}$. Тому, якщо ширина спектра задавального діяння задовольняє умові (5.28), то при правильному виборі структури і параметрів радіотехнічних слідкуючих систем виконуються всі вимоги, необхідні для можливості застосування їх спрощених еквівалентних неперервних математичних моделей.

5.7.2. Побудова спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі в частотній області

Розглянемо методику отримання спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі на прикладі схеми дискретно-неперервної моделі, зображеної на рис. 5.16.

Оскільки вимоги до застосування спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі формулюються в частотній області, перейдемо від схеми дискретно-неперервної математичної моделі системи в часовій області (див рис. 5.16) до схеми в частотній області (рис. 5.20).

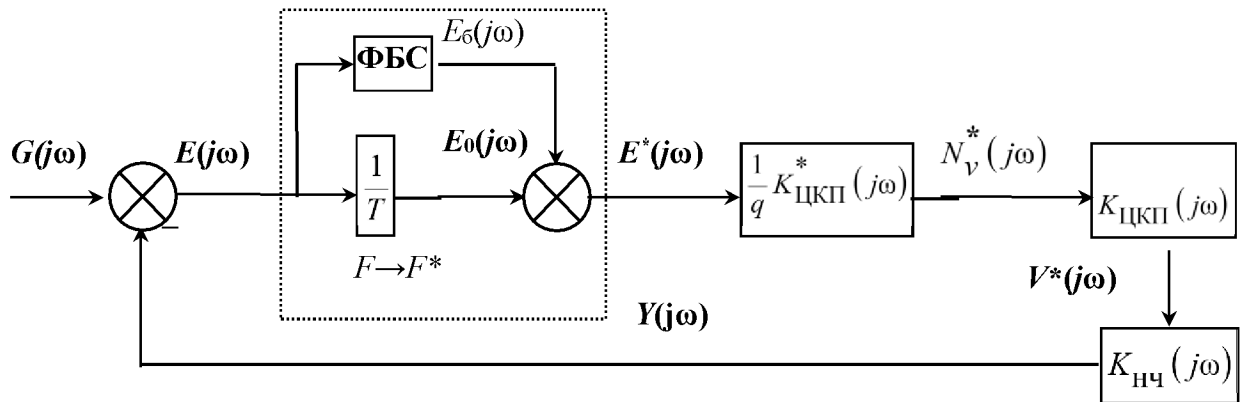


Рис. 5.20. Схема дискретно-неперервної математичної моделі системи в частотній області

На цьому рисунку введені такі позначення:

$$G(j\omega) = F \{g(t)\}, Y(j\omega) = F \{y(t)\}, E(j\omega) = F \{\varepsilon(t)\}, V(j\omega) = F \{v(t)\} -$$

спектри відповідних неперервних діянь $g(t), y(t), \varepsilon(t), v(t)$;

$E^*(j\omega) = F \{\varepsilon(nT)\}, N_v^*(j\omega) = F \{N_v(nT)\}$ – спектри відповідних дискретних діянь $\varepsilon(nT), N_v(nT)$;

$K_{ЦКП}^*(j\omega), K_{ЦАП}(j\omega), K_{НЧ}(j\omega)$ – КЧХ цифрового керуючого пристрою, ЦАП та неперервної частини САК відповідно.

На схемі також показаний блок $F \rightarrow F^*$ (виділений пунктиром), який виконує операцію перерахування спектра $E(j\omega)$ неперервної помилки системи $\varepsilon(t)$ у спектр $E^*(j\omega)$ послідовності її дискретних значень $\varepsilon(nT)$, що утворюється на виході ключа. Ці спектри пов'язані виразом

$$E^*(j\omega) = E_0(j\omega) + E_\delta(j\omega), \quad (5.39)$$

де

$$E_0(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega) - \quad (5.40)$$

основна складова спектра гратчастої функції $\varepsilon(nT)$, яка створюється на виході блока з коефіцієнтом підсилення $1/T$;

$$E_6(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} E(j\omega - jk\Omega) + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} E(j\omega + jk\Omega) -$$

бічні складові спектра гратчастої функції $\varepsilon(nT)$, які створюються на виході формувача бічних складових (ФБС).

Користуючись отриманою схемою, розглянемо процес перетворення спектрів діянь у системі.

Зв'язок між амплітудно-частотним спектром $E(\omega) = |E(j\omega)|$ неперервної помилки та амплітудно-частотним спектром $E^*(\omega) = |E^*(j\omega)|$ її дискретних значень при виконанні умови (5.28) відносно ширини спектра помилки системи $\omega_{0\varepsilon} < \Omega/2$ відображений на рис. 5.21, а, б. Як бачимо, в цьому випадку основна та бічні складові спектра дискретних значень помилки системи повторюють спектр $E(\omega)$ неперервної помилки та не перекриваються між собою. Тому вони не впливають один на одного під час обробки дискретних діянь в ЦКП та інших блоках системи.

ЦКП має КЧХ, яка відповідно до виразів (5.24), (5.26) визначається таким виразом:

$$K_{\text{ЦКП}}^*(j\omega) = \frac{1}{q_v} \check{K}_{\text{ЦКП}}(S) \Big|_{S=\exp(j\omega T)} = \frac{\sum_{m=0}^k b_m e^{-jm\omega T}}{q_v \sum_{r=0}^k a_r e^{-jr\omega T}}. \quad (5.41)$$

КЧХ ЦКП є періодичною трансцендентною функцією частоти. Типовий вигляд її АЧХ $K_{\text{ЦКП}}^*(\omega) = |K_{\text{ЦКП}}^*(j\omega)|$ зображений на рис. 5.21, в. Тому всі складові спектра дискретних значень помилки перетворюються в ЦКП однаково. ЦАП має частотні характеристики, що визначаються виразами (5.19) – (5.21). Він являє собою фільтр нижніх частот, у якого на частотах, кратних частоті часової дискретизації $\Omega = 2\pi/T$, коефіцієнт підсилення дорівнює нулю (рис. 5.21, г). Тому вихідна величина ЦАП $v(t)$ визначається основною складовою спектра дискретного діяння $N_v(nT)$, що подається на його вхід, а всі бічні складові ефективно подавляються.

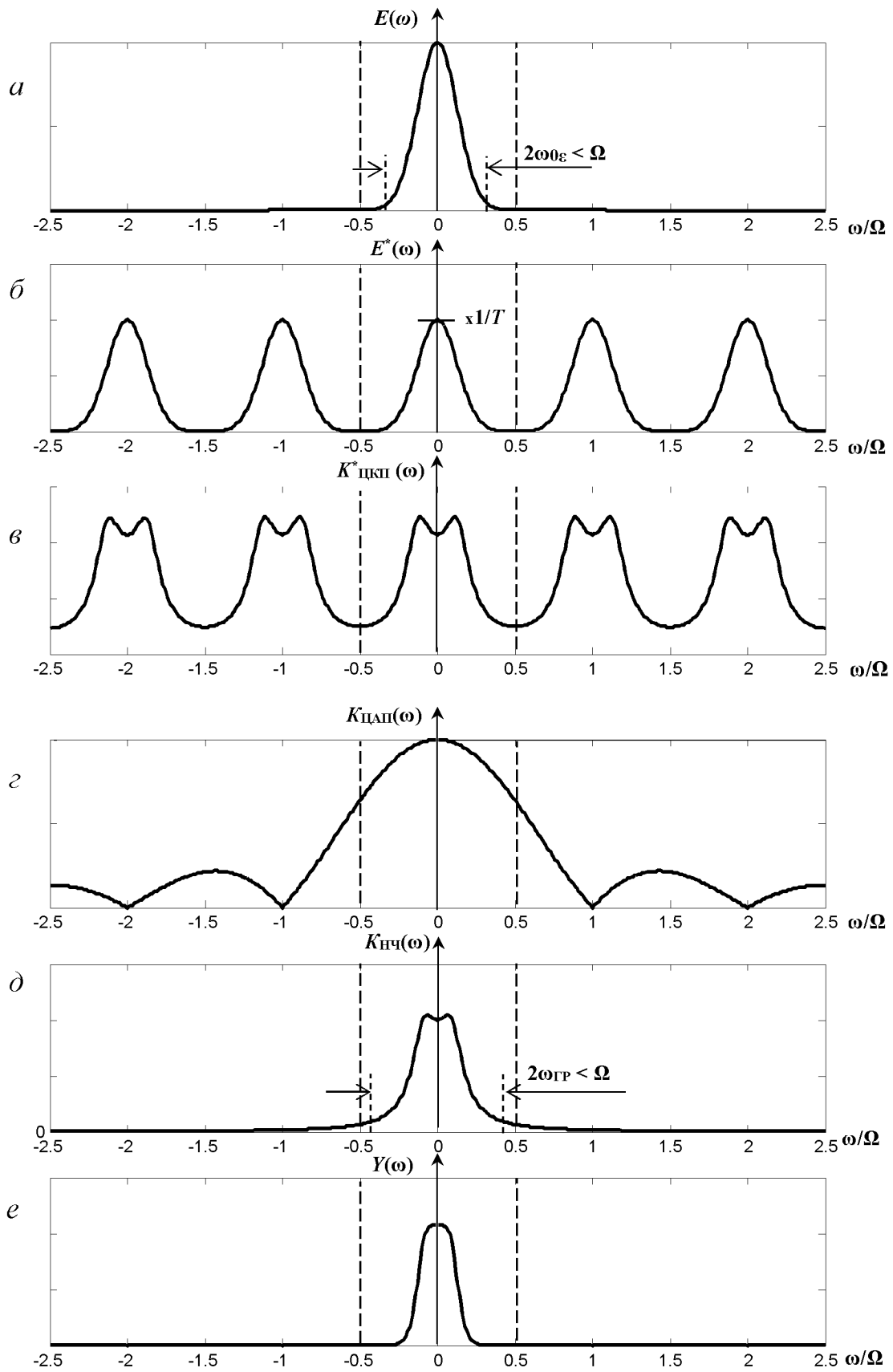


Рис. 5.21. Частотні залежності САК: *a* – амплітудно-частотний спектр неперервної помилки; *b* – амплітудно-частотний спектр дискретних значень помилки; *v* – КЧХ ЦКП; *z* – КЧХ ЦАП; *d* – КЧХ неперервної частини; *e* – спектр вихідного сигналу

Неперервна частина системи являє собою фільтр нижніх частот (рис. 5.21, *д*). Тому в ній за виконання умови (5.30) подавляються всі складові спектра діяння $v(t)$ з виходу ЦАП, що знаходились за межами смуги $\pm\omega_{гр}$.

Таким чином, при виконанні умов (5.28), (5.30) спектр вихідного діяння системи, який відображений на рис. 5.21, *е*, визначається лише основною складовою $E_0(j\omega) = E(j\omega)/T$ спектра дискретних значень помилки системи. Тому для знаходження вихідної величини системи достатньо проаналізувати тільки процес перетворення основної складової спектра помилки в дискретній частині системи в межах області частот $|\omega| < \Omega/2$, а бічними складовими знехтувати, вважаючи їх рівними нулю.

Отже, при виконанні умов (5.28), (5.30) на схемі математичної моделі в частотній області можна виконати такі перетворення:

- виключити з розгляду блок формування бічних складових ФБС;
- замінити КЧХ ЦКП, що є періодичною трансцендентною функцією частоти, еквівалентною неперіодичною дрібно-раціональною функцією, яка в межах $|\omega| < \Omega/2$ задовольняє умові

$$K_{ЦКП}^{НЕ}(j\omega) = K_{ЦКП}^*(j\omega). \quad (5.42)$$

На практиці найбільше застосування знайшла заміна шляхом апроксимації трансцендентної функції $\exp(j\omega T)$ дробово-раціональною функцією

$$e^{j\omega T} = \frac{1 + j\omega T / 2}{1 - j\omega T / 2}. \quad (5.43)$$

При такій апроксимації модулі правої і лівої частин (5.43) збігаються і дорівнюють одиниці у всьому інтервалі частот, а аргументи

$$\varphi_1(\omega) = \arg(e^{j\omega T}) = \omega T,$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg\left(\frac{1 + j\omega T / 2}{1 - j\omega T / 2}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega T}{2}$$

в найбільш істотній області частот $|\omega| < 1/T$ мають незначну відмітність (рис. 5.22).

Отже, при апроксимації (5.43) КЧХ ЦКП замінюється на наближену КЧХ, яка є неперіодичною дробово-раціональною функцією частоти та визначається за правилом

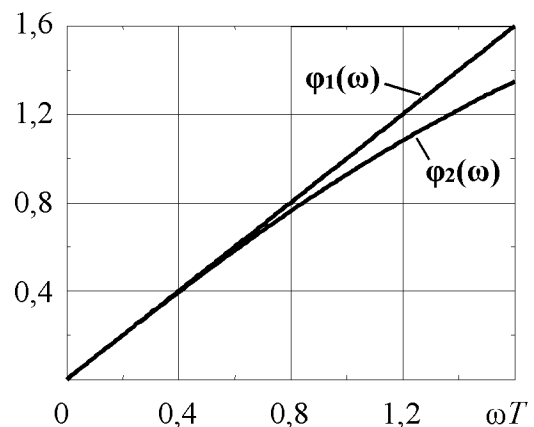


Рис. 5.22. Відмітність аргументів КЧХ ЦКП при їх представленні трансцендентною $\varphi_1(\omega)$ та дробово-раціональною $\varphi_2(\omega)$ функціями

$$K_{\text{ЦКП}}^{\text{HE}}(j\omega) = K_{\text{ЦКП}}^*(j\omega) \bigg|_{\exp(j\omega T) = \frac{1+j\omega T/2}{1-j\omega T/2}} \quad (5.44)$$

Відзначимо, що апроксимація (5.44) добре задовольняє вимозі (5.42) лише в області частот $|\omega| < 1/T$, а за її межами дає розбіжність між КЧХ, яка досить різко наростає (рис. 5.23). Можна показати, що

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\Omega/2} K_{\text{ЦКП}}^*(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} K_{\text{ЦКП}}^{\text{HE}}(j\omega),$$

тобто при наближенні частоти до $\pm\Omega/2$ КЧХ ЦКП “розтягується” в її неперервному еквіваленті до $\omega \rightarrow \pm\infty$.

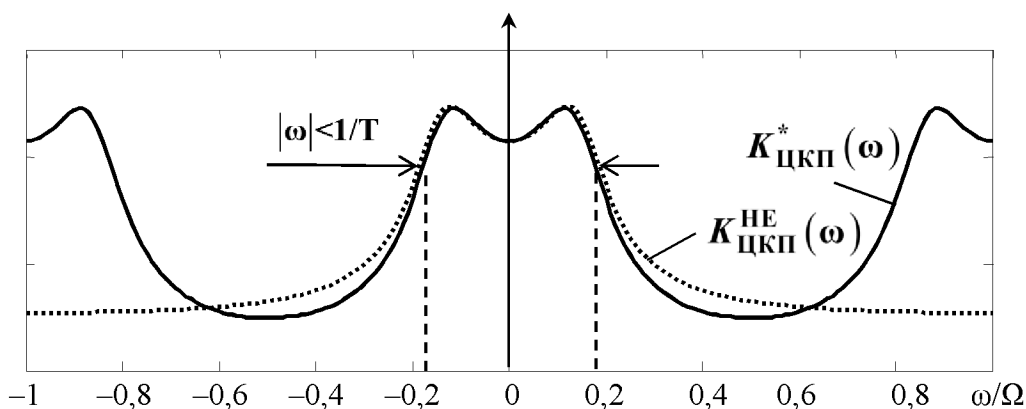


Рис. 5.23. КЧХ ЦКП при апроксимації

Тому цією апроксимацією можна користуватися, якщо

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\Omega/2} K_{\text{ЦКП}}^*(\omega) = M < \infty,$$

і, крім того, ширина смуги пропускання системи менше $1/T$. Слід пам'ятати, що при невиконанні зазначених обмежень неперервні моделі застосовуються тільки в окремих випадках. Натомість рекомендується використовувати більш складні методи апроксимації експоненціалу.

5.7.3. Побудова спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі в часовій області

З урахуванням результатів проведеного аналізу в частотній області звернемось до побудови еквівалентної неперервної математичної моделі САК в часовій області.

Згідно з виразом (5.40), спектр основної складової дискретних значень помилки пов'язаний зі спектром неперервної помилки системи масштабним коефіцієнтом, рівним $1/T$. Тому на еквівалентній неперервній моделі в часовій області ключ необхідно замінити блоком з коефіцієнтом підсилення, рівним $1/T$ (рис. 5.24). При цьому слід вважати, що на виході цього блока утворюється неперервне діяння

$$\varepsilon_0(t) = \varepsilon(t)/T. \quad (5.45)$$

Для отримання диференціального оператора передачі неперервного еквівалента ЦКП достатньо виконати формальну заміну

$$K_{\text{ЦКП}}^{\text{НЕ}}(D) = K_{\text{ЦКП}}^{\text{НЕ}}(j\omega) \Big|_{j\omega=D}. \quad (5.46)$$

Неважко переконатися, що його також можна знайти безпосередньо із оператора передачі ЦКП, виконавши заміну операторів за правилом:

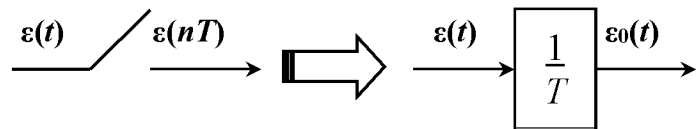


Рис. 5.24. Перехід до еквівалентної неперервної моделі ЦКП

$$K_{\text{ЦКП}}^{\text{НЕ}}(D) = K_{\text{ЦКП}}(S) \Big|_{S=\frac{1+TD/2}{1-TD/2}}. \quad (5.47)$$

Аналогічним чином дискретно-неперервний оператор передачі ЦАП (5.13) замінюється на еквівалентний неперервний оператор

$$K_{\text{ЦАП}}^{\text{НЕ}}(D) = K_{\text{ЦАП}}(D, S) \Big|_{S=\frac{1+TD/2}{1-TD/2}} = \frac{QT}{1 + \frac{T}{2}D}. \quad (5.48)$$

Як випливає з (5.48), **неперервний еквівалент ЦАП являє собою аперіодичну ланку з коефіцієнтом підсилення QT і сталою часу, рівною половині періоду часової дискретизації.**

Після виконання зазначених заміни схема спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі цифрової САК в часовій області набуває вигляду, зображеного на рис. 5.25. На схемі враховано, що коефіцієнт підсилення АЦП дорівнює $1/q$, масштабний коефіцієнт становить $1/T$ (згідно з (5.45), він пов'язує спектри обвідної й основної складової гратчастої функції), а коефіцієнт підсилення неперервного еквівалента ЦАП на нульовій

частоті згідно з (5.48) дорівнює QT . У результаті їх послідовного з'єднання загальний коефіцієнт підсилення дорівнює Q/q .

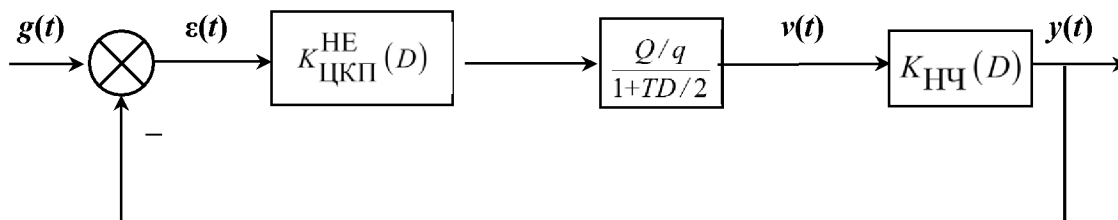


Рис. 5.25. Схема спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі цифрової САК у часовій області

Отже, для побудови спрощеної неперервної математичної моделі цифрової САК в часовій області необхідно:

- 1) зберегти всі неперервні діяння та диференціальні оператори передачі, що є на вихідній схемі;
- 2) замінити всі ключі підсилювальними ланками з коефіцієнтом підсилення $1/T$;
- 3) замінити різницевий оператор передачі ЦКП еквівалентним диференціальним оператором передачі за правилом (5.47);
- 4) математичну модель ЦАП замінити аперіодичною ланкою з диференціальним оператором передачі, який визначається виразом (5.48).

5.7.4. Методика визначення ширини смуги пропускання (прозорості) системи

На закінчення зупинимося на питанні, як визначити ширину смуги пропускання (прозорості) системи з метою перевірки виконання умови (5.30), що гарантує можливість застосування еквівалентної неперервної моделі.

Будемо вважати, що замкнена САК являє собою фільтр нижніх частот з коефіцієнтом підсилення на нульовій частоті, рівним або близьким до 1. У цьому випадку під шириною смуги пропускання (прозорості) розуміють значення частоти $\omega_{гр}$, починаючи з якої АЧХ замкненої системи задовольняє умові

$$W(\omega) \Big|_{\omega \geq \omega_{гр}} < 0,1. \quad (5.49)$$

На практиці значення $\omega_{гр}$ безпосередньо за АЧХ замкненої дискретно-неперервної системи визначити вкрай складно, і тому для її відшукування застосовують ЛАЧХ розімкненої еквівалентної неперервної системи. З рівняння, що пов'язує між собою КЧХ замкненої і розімкненої САК

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)},$$

впливає, що значенню $W(\omega_{гр}) = 0,1$ відповідає $R(\omega_{гр}) \approx 0,1$. Тому ЛАЧХ розімкненої еквівалентної неперервної системи $L_R^{HE}(\omega) = 20 \lg R^{HE}(\omega)$ на частоті $\omega_{гр}$ задовольняє такій умові:

$$L_R^{HE}(\omega_{гр}) = -20 \text{ дБ}. \quad (5.50)$$

Для побудови ЛАЧХ $L_R^{HE}(\omega)$ зі схеми рис. 5.25 визначають оператор передачі еквівалентної неперервної розімкненої системи

$$R^{HE}(D) = K_{ЦКП}^{HE}(D) \frac{Q/q}{1 + TD/2} K_{НЧ}(D), \quad (5.51)$$

після чого застосовують звичайну методику побудови ЛАЧХ (див. підрозд. 5.4).

Приклад

Для дискретно-неперервної схеми математичної моделі цифрової САК, зображеної на рис. 5.16, побудувати еквівалентну неперервну математичну модель та визначити область значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при яких можливе її застосування, для наступних вихідних даних:

- період часової дискретизації $T = 0,1$ с;
- оператор передачі ЦКП

$$K_{ЦКП}(S) = \frac{3S - 1}{S - 1};$$

- оператор передачі неперервної частини системи

$$K_{НЧ}(D) = \frac{K_{НЧ}}{D};$$

- відношення $Q/q = 1$.

Вважати, що задавальне діяння відповідає умові (5.28), а заважаючі діяння відсутні.

Розв'язання

Відповідно до викладеної методики схема математичної моделі має вигляд, зображений на рис. 5.25, де еквівалентний диференціальний оператор передачі ЦКП визначається виразом

$$K_{\text{ЦКП}}^{\text{HE}}(D) = K_{\text{ЦКП}}(S) \bigg|_{s=\frac{1+TD/2}{1-TD/2}} = \frac{3 \frac{1+TD/2}{1-TD/2} - 1}{\frac{1+TD/2}{1-TD/2} - 1} = \frac{2(1+TD)}{TD}.$$

Запишемо оператор передачі розімкненої еквівалентної неперервної системи

$$R^{\text{HE}}(D) = K_{\text{ЦКП}}^{\text{HE}}(D) \frac{1}{1+TD/2} K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K(1+TD)}{D^2(1+TD/2)},$$

де $K = 2K_{\text{НЧ}}/T$ – коефіцієнт підсилення розімкненої еквівалентної неперервної системи.

На рис. 5.26 для прикладу суцільною лінією зображена ЛАЧХ розімкненої еквівалентної неперервної системи при $K = 10 \text{ с}^{-2}$. За результатами побудови маємо, що $\omega_{\text{гр}} = 1/T = 10 \text{ с}^{-1} < \Omega/2 = \pi/T = 31,4 \text{ с}^{-1}$, а тому при вказаних значеннях параметрів еквівалентною неперервною моделлю можна користуватись.

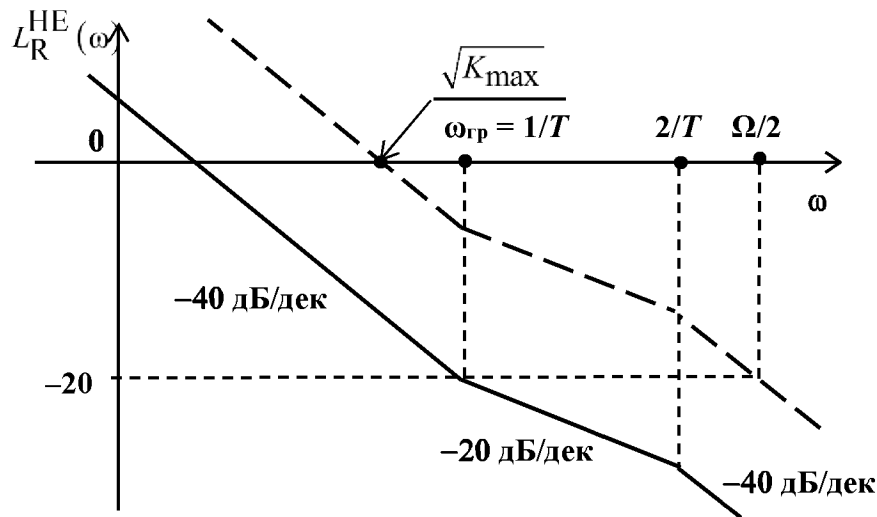


Рис. 5.26. ЛАЧХ розімкненої еквівалентної неперервної системи

При збільшенні коефіцієнта підсилення ЛАЧХ буде підніматися вгору, а значення $\omega_{\text{гр}}$ зростати. Умова (5.30) застосовності еквівалентної неперервної математичної моделі обмежує коефіцієнт підсилення зверху значенням K_{max} , при якому ЛАЧХ займе таке положення, коли ширина смуги пропускання (прозорості) системи дорівнює $\omega_{\text{гр max}} = \Omega/2$ (рис. 5.26,

пунктирна лінія). З результатів побудови отримаємо, що максимальне значення коефіцієнта підсилення, при якому можна користуватись еквівалентною неперервною математичною моделлю розглянутої цифрової САК, дорівнює $K_{\max} = 50 \text{ c}^{-2}$.

Контрольні запитання та завдання

1. Які системи автоматичного керування називаються цифровими? Наведіть та поясніть типові функціональні структури цифрових САК з об'єктом керування неперервної дії.

2. Яке призначення аналого-цифрового перетворювача? Дайте стислу характеристику математичних операцій, що здійснюються при перетворенні неперервного діяння на цифровий код.

3. Наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі АЦП.

4. Дайте визначення статичної характеристики АЦП та наведіть її вигляд при квантуванні з округленням до найближчого цілого числа.

5. Поясніть сутність лінеаризації математичної моделі АЦП. Які ймовірнісні характеристики має "шум" округлення?

6. Укажіть призначення цифро-аналогового перетворювача та дайте стислу характеристику математичних операцій, що здійснюються при перетворенні цифрового коду на неперервне діяння.

7. Запишіть та поясніть вираз для імпульсної характеристики ЦАП.

8. Наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі ЦАП.

9. Запишіть вирази та побудуйте графіки АЧХ і ФЧХ цифро-аналогового перетворювача.

10. Укажіть призначення цифрового керуючого пристрою та дайте стислу характеристику математичних операцій, що здійснюються в ньому.

11. Наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі ЦКП з лінійним алгоритмом формування коду керуючого діяння.

12. Наведіть та поясніть загальну схему лінеаризованої математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії.

13. У чому полягає сутність переходу до спрощеної еквівалентної дискретної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії? При виконанні яких вимог можна користуватись нею?

14. У чому полягає сутність переходу до спрощеної еквівалентної неперервної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії? При виконанні яких вимог можна користуватись нею?

15. На рис. 5.27 зображена схема математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії. Побудуйте її еквівалентну дискретну математичну модель та знайдіть еквівалентний різницевий оператор передачі $K^{DE}(S)$, якщо диференціальний оператор передачі неперервної частини системи дорівнює:

- 1) $K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K_1}{1 + T_0 D}$;
- 2) $K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K_2(1 + \tau D)}{D}$;
- 3) $K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K_3(1 + \tau D)}{D^2}$.

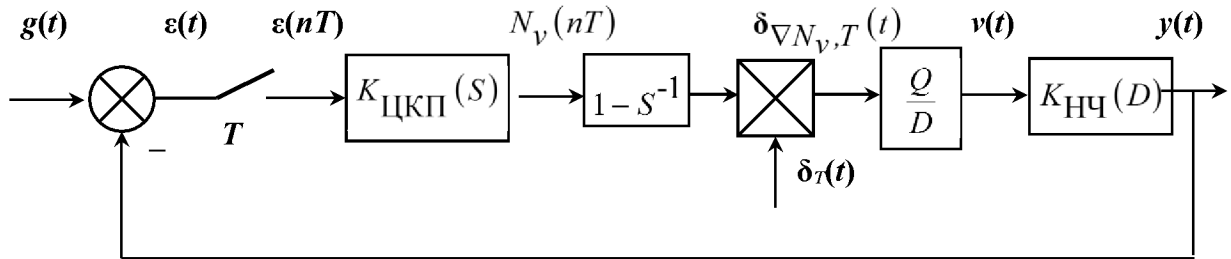


Рис. 5.27. Схема математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії

16. Нарисуйте схему лінеаризованої математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії в частотній області. Користуючись цією схемою, поясніть процес перетворення спектрів діянь у системі. Які спрощення схеми можна зробити при виконанні умови теореми Котельникова для спектра задавального діяння та умови (5.30) щодо смуги прозорості системи?

17. Викладіть та поясніть методику отримання еквівалентної неперервної математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії в часовій області. Наведіть загальну схему спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі.

18. На рис. 5.27 зображена схема математичної моделі цифрової САК з об'єктом керування неперервної дії. Побудуйте її еквівалентну неперервну математичну модель та визначте область значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при яких можливе її застосування, для таких вихідних даних:

– оператор передачі ЦКП –

$$K_{\text{ЦКП}}(S) = \frac{11S + 9}{S - 1};$$

– оператор передачі неперервної частини системи –

$$K_{\text{НЧ}}(D) = \frac{K_1}{1 + T_1 D},$$

де $T_1 = 10$ с;

– період часової дискретизації – $T = 0,1$ с.

Вважати, що задавальне діяння відповідає умові (5.28).

6. ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

6.1. ВИДИ ІМПУЛЬСНОЇ МОДУЛЯЦІЇ. ІМПУЛЬСНИЙ ЕЛЕМЕНТ ТА ЙОГО МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Імпульсними називаються системи автоматичного керування, у яких передача інформації про величину діянь здійснюється за допомогою імпульсних послідовностей.

В імпульсній послідовності інформація про величину діяння $x(t)$ міститься в одному з її параметрів (амплітуді, часі затримки, тривалості імпульсів та ін.). Введення цієї інформації здійснюється шляхом *імпульсної модуляції* – зміни параметра опорної послідовності імпульсів $i_T(t)$ відповідно до величини діяння $x(t)$.

Залежно від того, який із параметрів опорної послідовності піддається модуляції, розрізняють амплітудно-імпульсну (АІМ), часово-імпульсну (ЧІМ), широтно-імпульсну (ШІМ) й інші види імпульсної модуляції.

Надалі реальний чи фіктивний блок, що здійснює імпульсну модуляцію, будемо називати *імпульсним елементом* (ІЕ). Узагальнена функціональна схема ІЕ зображена на рис. 6.1. На цьому рисунку позначені:

$x(t)$ – неперервне модулююче діяння;

$i_T(t)$ – опорна імпульсна послідовність;

$j_T(t, \alpha_x)$ – послідовність вихідних імпульсів,

параметр α якої промодульований діянням $x(t)$.

Внаслідок імпульсної модуляції значення параметрів імпульсів являють собою дискретні послідовності чисел $\alpha_x(nT)$, які в загальному випадку нелінійно залежать від значень модулюючого діяння $x(t)$ в дискретні моменти часу $t = nT$:

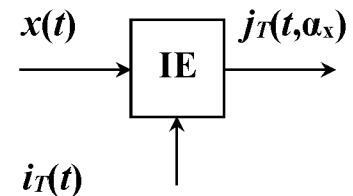


Рис. 6.1. Узагальнена функціональна схема ІЕ

$$\alpha_x(nT) = F[x(t)]|_{t=nT}. \quad (6.1)$$

При *лінійній імпульсній модуляції* має місце пропорційна залежність значення параметра α від величини модулюючого діяння:

$$\alpha_x(nT) = k_\alpha \cdot x(t)|_{t=nT}, \quad (6.2)$$

де k_α – масштабний коефіцієнт, який називається *крутістю модуляції*.

Як випливає з виразу (6.2), у лінійному ІЕ здійснюються операції часової дискретизації неперервного модулюючого діяння та його масштабного перетворення. Тому схема математичної моделі ІЕ складається з ключа та підсилювального блока з коефіцієнтом підсилення k_α (рис. 6.2).

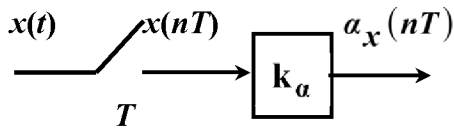


Рис. 6.2. Схема математичної моделі ІЕ

На рис. 6.3 як приклад зображені часові діаграми неперервного модулюючого діяння $x(t)$, опорної послідовності $i_T(t)$ і модульованих імпульсних послідовностей з АІМ і ЧІМ.

При лінійній АІМ комплексна амплітуда імпульсів модульованої послідовності змінюється за законом

$$\dot{U}_x(nT) = k_u x(t)|_{t=nT}, \quad (6.3)$$

де k_u – крутість АІМ.

Звернемо увагу на те, що, як впливає з виразу (6.3), при зміні знака модулюючого діяння відеоімпульси змінюють свою полярність, а радіоімпульси – фазу внутрішньоімпульсного радіочастотного заповнення.

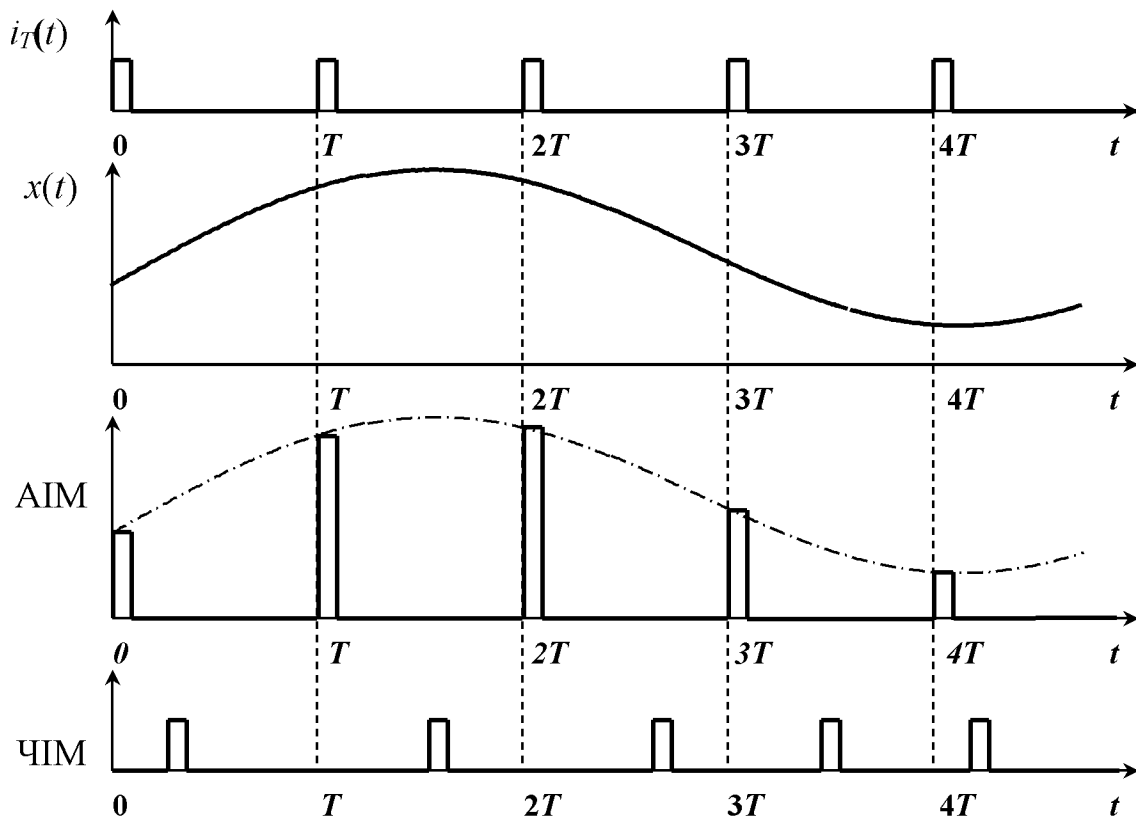


Рис. 6.3. Часові діаграми неперервного модулюючого діяння $x(t)$, опорної послідовності $i_T(t)$ і модульованих імпульсних послідовностей з АІМ і ЧІМ

При лінійній ЧІМ імпульси модульованої послідовності зміщуються відносно імпульсів опорної послідовності на величину часу затримки:

$$\tau_x(nT) = k_\tau x(t)|_{t=nT}, \quad (6.4)$$

де k_τ – крутість ЧІМ.

На практиці модуляція опорної послідовності або здійснюється в спеціальному функціональному блоці – модуляторі, або виникає в результаті фізичних процесів (явищ), обумовлених принципами функціонування технічних пристроїв. Розглянемо деякі варіанти імпульсної модуляції, що найбільш часто застосовуються у системах радіоавтоматики.

1. У системах супроводу за дальністю імпульсних РЛС інформація про дальність цілі $r(t)$ визначається за часом затримки $\tau_r(nT)$ відбитих від неї імпульсів відносно зондуючих (опорних) імпульсів:

$$\tau_r(nT) = \frac{2}{c} r(t) \Big|_{t=nT}. \quad (6.5)$$

У цьому випадку має місце лінійна ЧІМ, обумовлена сталою швидкістю поширення електромагнітного поля $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, отже $k_\tau = 2/c$.

2. Одним з технічних пристроїв, за допомогою якого здійснюється лінійна ЧІМ, є перетворювач напруга–затримка (рис. 6.4). Він складається з генератора пилоподібної напруги (ГПН), що запускається опорними імпульсами $i_T(t)$, компаратора і генератора імпульсів (ГІ).

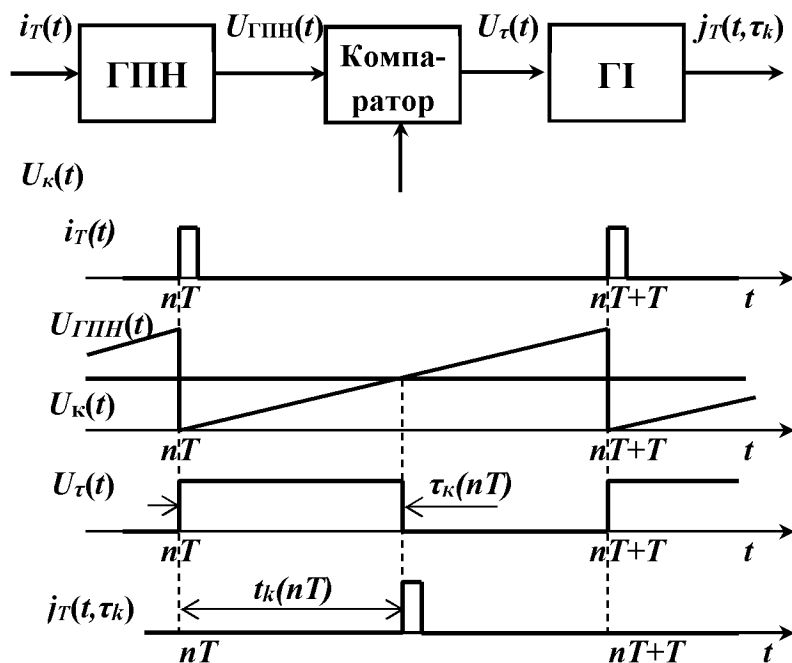


Рис. 6.4. Функціональна схема перетворювача напруга–затримка та епюри напруг щодо його функціонування

На виході ГПН створюється напруга, яка протягом кожного періоду $(nT, nT + T)$ змінюється за лінійним законом:

$$U_{\text{ГПН}}(nT + \tau) = S_{\text{ГПН}} \cdot \tau, \tau \in (0, T), \quad (6.6)$$

де $S_{\text{ГПН}}$ – крутість характеристики ГПН, В/с.

Компаратор має два входи, на один з яких подається вихідна напруга ГПН, а на другий – керуюча напруга $U_{\text{к}}(t)$. Компаратор є логічним порівнювальним пристроєм величин вхідних напруг: на його виході утворюються імпульси, тривалість τ_k яких дорівнює інтервалу часу, протягом якого величина напруги з виходу ГПН не перевищує величини керуючої напруги (або навпаки). Якщо керуюча напруга $U_{\text{к}}(t)$ змінюється настільки повільно, що протягом періоду T її можна вважати постійною, тривалість τ_k імпульсу $U_{\text{т}}(t)$ на виході компаратора буде визначатись з умови

$$S_{\text{ГПН}} \cdot \tau \Big|_{\tau=\tau_k(nT)} = U_{\text{к}}(t) \Big|_{t=nT}.$$

Отже,

$$\tau_k(nT) = \frac{1}{S_{\text{ГПН}}} U_{\text{к}}(t) \Big|_{t=nT}. \quad (6.7)$$

Спадами імпульсів, що утворюються на виході компаратора, запускається генератор імпульсів. Він формує імпульсну послідовність $j_T(t, \tau_k)$, імпульси якої затримані відносно імпульсів опорної послідовності $i_T(t)$ на час $\tau_k(nT)$, пропорційний величині керуючої напруги. З виразів (6.4) та (6.7) випливає, що в цій схемі крутість ЧІМ $k_{\tau} = 1/S_{\text{ГПН}}$.

3. Для вимірювання кутових координат цілей в РЛС широко використовуються моноімпульсні пеленгаційні пристрої, у яких інформація про відхилення максимуму діаграми спрямованості антени від напрямку на ціль міститься в амплітуді і полярності імпульсів на виході пеленгаційного пристрою, тобто в їхній комплексній амплітуді.

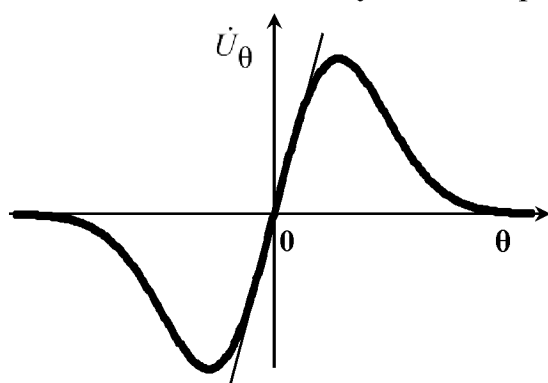


Рис. 6.5. Залежність комплексної амплітуди \dot{U}_{θ} імпульсів на виході пеленгаційного пристрою від величини кутової неузгодженості θ

Типова залежність комплексної амплітуди \dot{U}_{θ} імпульсів на виході пеленгаційного пристрою від величини кутової неузгодженості θ між напрямком на ціль і кутом орієнтації діаграми спрямованості антени зображена на рис. 6.5.

При досить малих неузгодженостях можна вважати, що

$$\dot{U}_{\theta}(nT) = K_{\theta} \theta(nT),$$

де $K_{\theta} = d\dot{U}_{\theta} / d\theta \Big|_{\theta=0}$ – крутість пеленгаційної характеристики, В/рад.

Отже, при моноімпульсній пеленгації має місце амплітудно-імпульсна модуляція, обумовлена принципом дії пеленгаційного пристрою, $k_u = K_\theta$.

Існують й інші види імпульсної модуляції. Наприклад, частота f_c відбитих від цілі радіоімпульсів відрізняється від частоти f_0 випромінюваних коливань на величину

$$f_d(nT) = \frac{2f_0}{c} V_r(t) \Big|_{t=nT},$$

пропорційну радіальній швидкості цілі V_r . Тут має місце так звана частотна внутрішньоімпульсна модуляція, обумовлена ефектом Доплера.

6.2. ВІДНОВНИЙ ПРИСТРІЙ ТА ЙОГО МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Відновний пристрій (інша назва – демодулятор) призначений для перетворення імпульсної послідовності на неперервне діяння, величина якого залежить від модульованого параметра $\alpha_x(nT)$.

Незалежно від виду модуляції та способу технічного виконання у довільному відновному пристрої (ВП) здійснюються операції масштабного перетворення модульованого параметра $\alpha_x(nT)$ на послідовність величин $v(nT)$ і фіксації їх значень протягом інтервалу часу $(nT, nT + T)$.

Отже, операції, що здійснюються у ВП, цілком аналогічні тим, що виконуються у ЦАП (див. підрозд. 5.3). Тому оператор передачі і всі характеристики відновного пристрою ідентичні оператору передачі і характеристикам ЦАП. Вони описуються такими виразами:

– оператор передачі –

$$K_{ВП}(D, S) = k_{ВП} \frac{1 - S^{-1}}{D}; \quad (6.8)$$

– передавальна функція –

$$K_{ВП}(p) = K_{ВП}(D, S) \Big|_{D=p, S=\exp(pT)} = k_{ВП} \frac{1 - e^{-pT}}{p}; \quad (6.9)$$

– амплітудно-частотна характеристика –

$$K_{ВП}(\omega) = k_{ВП} T \left| \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right|; \quad (6.10)$$

– фазочастотна характеристика –

$$\varphi_{\text{ВП}}(\omega) = -\omega T / 2 + k\pi, \quad (6.11)$$

де $k_{\text{ВП}}$ – масштабний коефіцієнт (коефіцієнт підсилення ВП);

$k = \text{int}(\omega T / 2\pi) = \text{int}(\omega / \Omega)$ – ціле число.

На рис. 6.6, а, б зображені узагальнені функціональна схема і схема математичної моделі ВП у часовій області. Зазначимо, що на практиці для функціонування ВП не завжди потрібне застосування опорної імпульсної послідовності $i_T(t)$, тому на функціональній схемі вона показана пунктирною лінією.

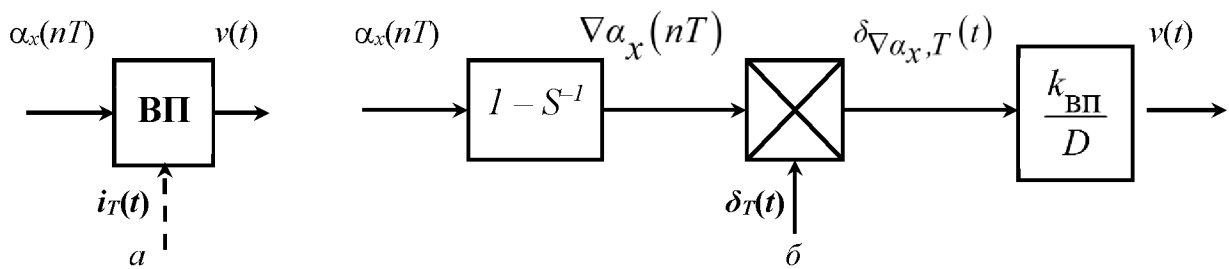


Рис. 6.6. Узагальнена функціональна схема і схема математичної моделі ВП у часовій області

Розглянемо деякі практичні схеми ВП.

Наприклад, ВП для імпульсної послідовності з АІМ може являти собою **піковий детектор зі скиданням**. Один з варіантів схеми, який застосовується для відновлення імпульсів позитивної полярності, складається з діода VD , накопичувального конденсатора C та ключа S

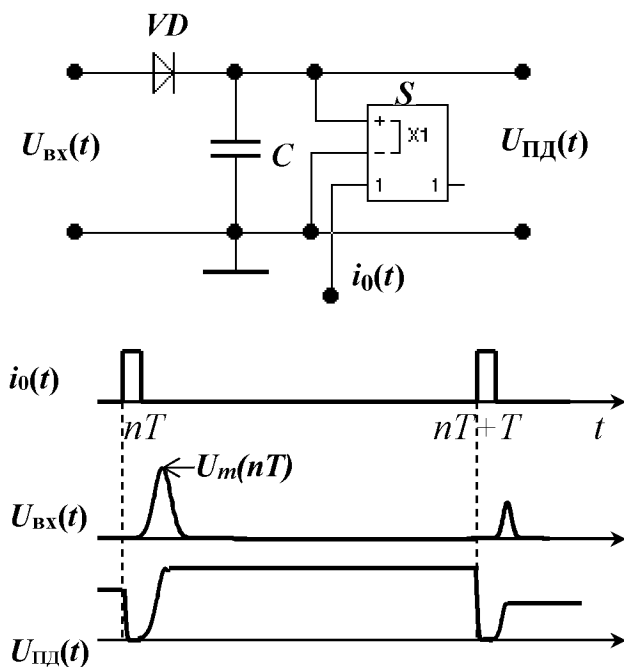


Рис. 6.7. Схема відновлення імпульсів позитивної полярності

(рис. 6.7). На керуючий вхід ключа подається послідовність коротких (δ -подібних) імпульсів $i_0(t)$, які випереджають за часом модульовану імпульсну послідовність. Ці імпульси замикають ключ, що веде до швидкого розрядження накопичувального конденсатора C . При надходженні чергового вхідного імпульсу $U_{\text{вх}}(t)$ конденсатор заряджається через діод VD до напруги, близької до амплітуди $U_m(nT)$ імпульсу, після чого напруга зберігається практично постійною до чергового циклу розрядження–зарядження.

В імпульсних САК з об'єктом керування, що має велику інерційність, замість пікового детектора зі скиданням застосовується більш проста схема **інерційного імпульсного детектора**, в якій відсутній ключ для розряду конденсатора (рис. 6.8). У ньому конденсатор C швидко заряджається через відкритий діод VD , а розряджається через резистор R . Під час розряджання вихідна напруга спадає за законом

$$U_{i.d}(t) \cong U_m(nT)e^{-\tau/\tau_p}, \quad t = nT + \tau, \tau \in (0, T), \quad (6.12)$$

де $U_m(nT)$ – амплітуда вхідного імпульсу $U_{вх}(t)$, який надходить у момент часу $t = nT$;

$\tau_p = RC$ – стала часу розряджання накопичувального конденсатора.

Параметри RC -кола підбирають за умови $\tau_p \leq T/3$, що забезпечує практично повне розряджання конденсатора до надходження чергового імпульсу. Внаслідок інерційності об'єкта керування, його реакція визначається постійною складовою вихідної напруги – середнім за період значенням напруги на конденсаторі:

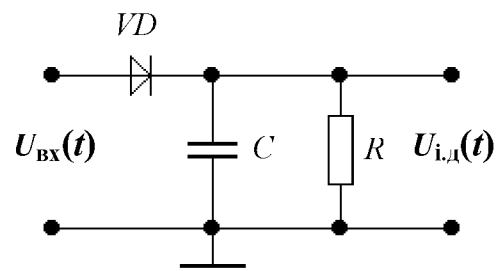


Рис. 6.8. Схема інерційного імпульсного детектора

$$\bar{U}_{i.d}(t) \Big|_{t \in (nT, nT+T)} = \frac{1}{T} \int_{nT}^{nT+T} U_{i.d}(\tau) d\tau \cong U_m(nT) \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\tau/\tau_p} d\tau = K_{i.d} U_m(nT), \quad (6.13)$$

де

$$K_{i.d} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\tau/\tau_p} d\tau -$$

коефіцієнт підсилення інерційного імпульсного детектора за постійною складовою (при $\tau_p = T/3$ $K_{i.d} \cong 0,3$). Отже, постійна складова вихідної напруги інерційного імпульсного детектора пропорційна амплітуді вхідного імпульсу.

У тих випадках, коли необхідно відновити інформацію з АІМ-послідовності, в якій змінюється полярність відеоімпульсів або фаза радіоімпульсів, застосовують амплітудно-фазові імпульсні детектори або фазочутливі випрямлячі.

Аналогічно діють відновлюючі пристрої для імпульсних послідовностей з іншими видами модуляції.

6.3. ФУНКЦІОНАЛЬНІ СХЕМИ І МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ САК ІМПУЛЬСНИХ РЛС З ОБ'ЄКТОМ КЕРУВАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ДІЇ

При використанні імпульсного методу локації системи автоматичного супроводу цілей і ряд інших автоматичних систем РЛС є імпульсними САК. Типова функціональна структура системи автоматичного супроводу цілей імпульсної РЛС з об'єктом керування неперервної дії зображена на рис. 6.9.

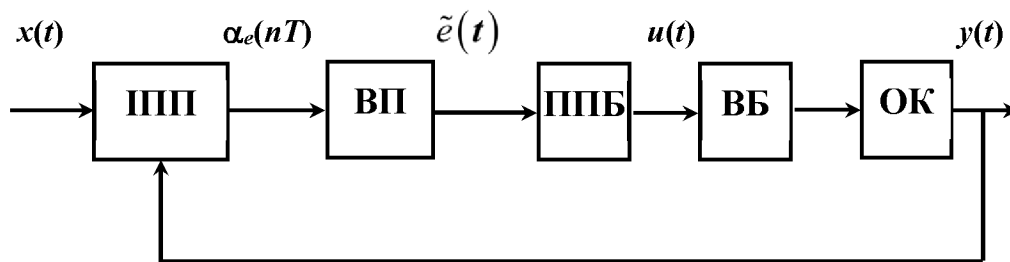


Рис. 6.9. Типова функціональна структурна схема системи автоматичного супроводу цілей імпульсної РЛС з об'єктом керування неперервної дії

Інформація про величину задавального діяння $g(t)$ в таких системах може бути визначена тільки в моменти надходження відбитих від цілі імпульсів, тому в їх складі застосовується імпульсний порівнювальний пристрій (ІПП), на виході якого створюється імпульсна послідовність $\alpha_e(nT)$, в одному з параметрів якої міститься інформація про величину неузгодженості:

$$e(nT) = e(t)|_{t=nT} = x(t) - y(t)|_{t=nT}, \quad (6.14)$$

де $x(t) = g(t) + f(t)$ – вхідне діяння слідкуючої системи.

Для керування об'єктом неперервної дії до складу системи включають ВП, що формує обвідну $\tilde{e}(t)$ за параметрами $\alpha_e(nT)$ імпульсної послідовності з виходу ІПП. Формування керуючого діяння $u(t)$ здійснюється за сигналом $\tilde{e}(t)$ з виходу ВП у підсилювально-перетворювальному та виконавчому блоках (ІППБ, ВБ) неперервної дії.

Побудуємо схему математичної моделі лінійної імпульсної САК. Для її побудови процес функціонування ІПП, з математичної точки зору, можна подати у двох основних варіантах.

У першому варіанті вважається, що ІПП складається з неперервного порівнювального блока (НПБ) та імпульсного елемента, який формує послідовність імпульсів, один із параметрів якої модульований неперервним сигналом неузгодженості $e(t)$, що формується на виході НПБ (рис. 6.10, а). Відповідна схема математичної моделі ІПП зображена на рис. 6.10, б.

Таке зображення є характерним, наприклад, для моноімпульсного пеленгаційного пристрою РЛС з електромеханічним керуванням орієнтацією діаграми спрямованості антенної системи [14, 17].

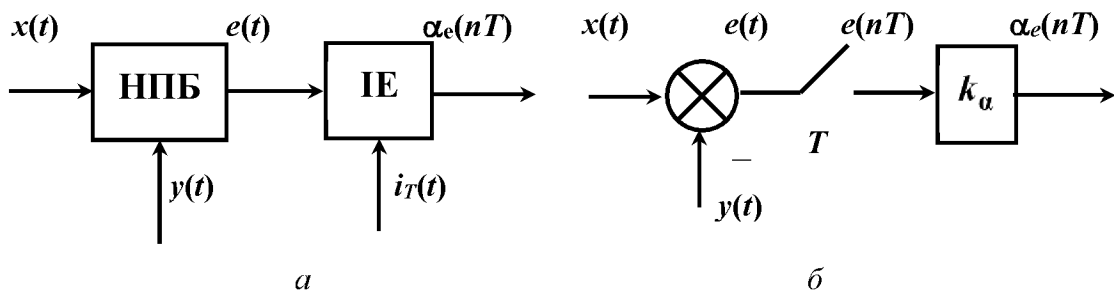


Рис. 6.10. Імпульсний порівнювальний пристрій (перший варіант):
a – функціональна схема; *б* – схема математичної моделі

У другому варіанті вважається, що до складу ІПП входять два ІЕ, за допомогою яких окремо здійснюється імпульсна модуляція вхідного діяння $x(t)$ і вихідного (контрольного) діяння $y(t)$, та імпульсний порівнювальний блок (ІПБ), у якому здійснюється порівняння параметрів $\alpha_x(nT)$ та $\alpha_y(nT)$ модульованих імпульсних послідовностей (рис. 6.11, *a*, *б*).

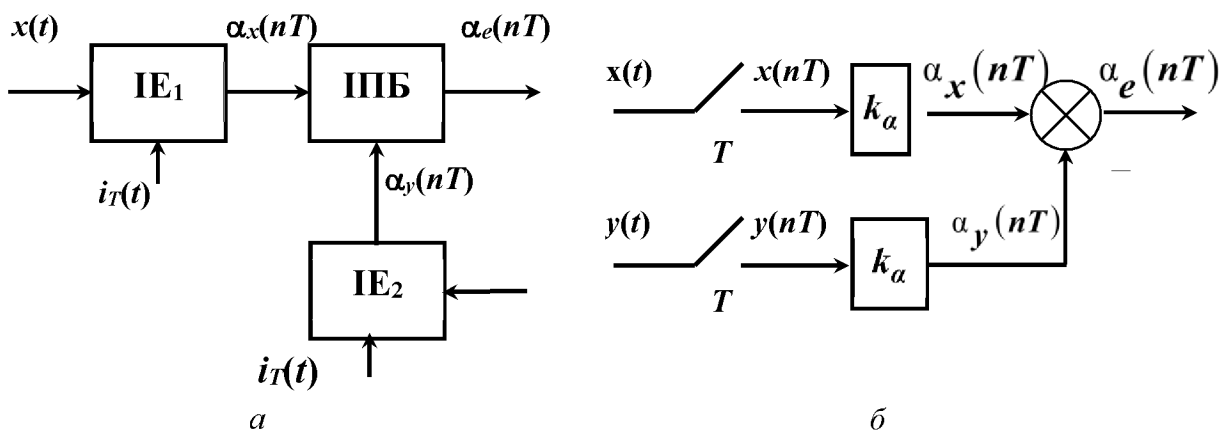


Рис. 6.11. Імпульсний порівнювальний пристрій (другий варіант):
a – функціональна схема; *б* – схема математичної моделі

Таке зображення є характерним, наприклад, для системи слідкування за дальністю цілі імпульсної РЛС з аналоговим фільтром у складі підсилювально-перетворювального блока.

Нескладно переконатися, що обидві схеми математичної моделі можуть бути перетворені одна в одну з застосуванням звичайних правил (див. підрозд. 5.1). Тому з метою спрощення кінцевого результату скористаємось схемою математичної моделі першого варіанта ІПП.

Загальна схема математичної моделі лінійної імпульсної САК зображена на рис. 6.12, де $K_{нц}(D)$ – оператор передачі неперервної частини системи

(КБ, ВБ, ОК). Вона є дискретно-неперервною, внаслідок чого аналіз імпульсної САК за нею є досить складним. Тому загальну модель заміняють еквівалентними їй спрощеними дискретною чи неперервною моделями. Методика переходу до еквівалентних моделей аналогічна тій, що була докладно розглянута для цифрових САК (див. підрозд. 5.6, 5.7). Тому, не викладаючи її, наведемо лише кінцеві результати.

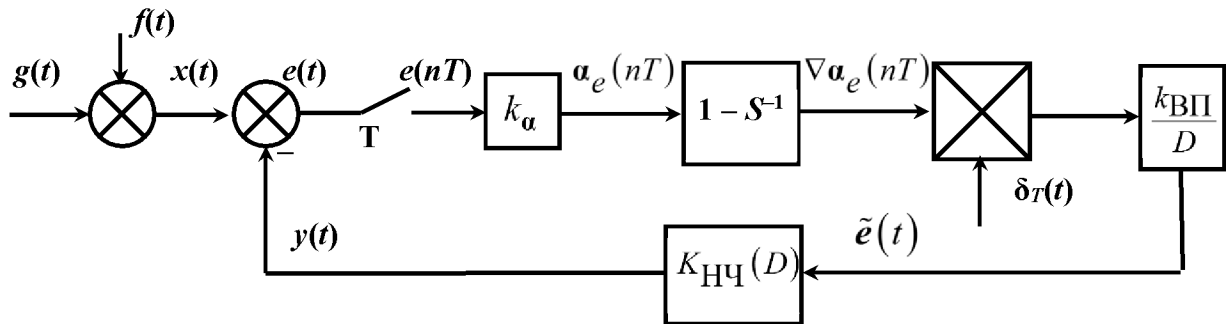


Рис. 6.12. Загальна схема математичної моделі лінійної імпульсної САК

Схема спрощеної еквівалентної дискретної математичної моделі імпульсної САК зображена на рис. 6.13. Тут $K^{ДЕ}(S)$ – рекурентний оператор передачі, еквівалентний диференціальному оператору передачі:

$$K(D) = \frac{k_{ВП}}{D} K_{НЧ}(D) \Rightarrow K^{ДЕ}(S).$$

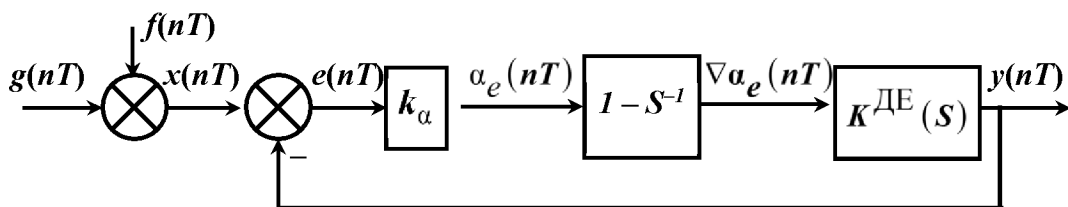


Рис. 6.13. Схема спрощеної неперервної математичної моделі імпульсної САК

Схема спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі імпульсної САК зображена на рис. 6.14. На схемі враховано, що неперервним еквівалентом ІЕ є підсилювальна ланка з коефіцієнтом підсилення, рівним k_α/T , а неперервний еквівалент ВП має оператор передачі:

$$K_{ВП}^{HE}(D) = K_{ВП}(D, S) \Big|_{S = \frac{1+TD/2}{1-TD/2}} = \frac{k_{ВП}T}{1 + \frac{T}{2}D}.$$

Нагадаємо, що неперервним еквівалентом можна користуватися тільки тоді, коли виконуються вимоги (5.28) до ширини спектра задавального діяння і (5.30) до ширини смуги прозорості системи. Перевірка умов виконання останньої вимоги зазвичай виконується з використанням ЛАЧХ розімкненої еквівалентної неперервної системи за методикою, розглянутою в підрозд. 5.7.

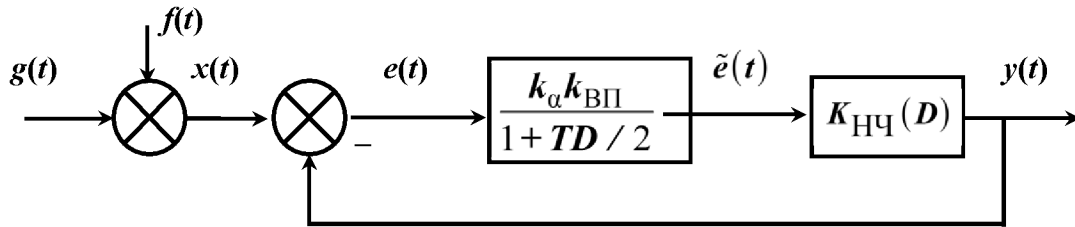


Рис. 6.14. Схема спрощеної неперервної математичної моделі імпульсної САК

Контрольні запитання та завдання

1. Які системи автоматичного керування називаються імпульсними?
2. Дайте визначення поняття імпульсної модуляції. Укажіть призначення імпульсного елемента, наведіть та поясніть його узагальнену функціональну схему.
3. Дайте стислу характеристику математичних операцій, що здійснюються при імпульсній модуляції, наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі ІЕ.
4. Поясніть сутність лінійної амплітудно-імпульсної модуляції. Наведіть приклади застосування АІМ у системах радіоавтоматики.
5. Поясніть сутність лінійної часово-імпульсної модуляції. Наведіть приклади застосування ЧІМ у системах радіоавтоматики.
6. Яке призначення відновного пристрою? Дайте стислу характеристику математичних операцій, що здійснюються при перетворенні модульованої імпульсної послідовності на неперервне діяння.
7. Наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі ВП.
8. Наведіть схему пікового детектора зі скиданням та поясніть процеси, що відбуваються в ньому.
9. Наведіть схему інерційного імпульсного детектора та поясніть процеси, що відбуваються в ньому.
10. Наведіть та поясніть типову функціональну структуру імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії.
11. Наведіть та поясніть загальну схему математичної моделі імпульсного порівнювального пристрою.
12. Наведіть та поясніть загальну схему лінеаризованої математичної моделі імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії.

13. У чому полягає сутність переходу до спрощеної еквівалентної дискретної моделі імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії? Наведіть загальну схему спрощеної еквівалентної дискретної математичної моделі. При виконанні яких вимог можна користуватись нею?

14. У чому полягає сутність переходу до спрощеної еквівалентної неперервної моделі імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії? Наведіть загальну схему спрощеної еквівалентної неперервної математичної моделі. При виконанні яких вимог можна користуватись нею?

15. На рис. 6.12 зображена схема математичної моделі імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії. Побудуйте її еквівалентну дискретну математичну модель та знайдіть еквівалентний різницевий оператор передачі $K_H^{де}(S)$, якщо диференціальний оператор передачі неперервної частини системи дорівнює:

$$1) K_{НЧ}(D) = \frac{K_1}{D};$$

$$2) K_{НЧ}(D) = \frac{K_2(1 + \tau D)}{D}.$$

16. Викладіть та поясніть методику одержання еквівалентної неперервної математичної моделі імпульсної САК з об'єктом керування неперервної дії в часовій області.

17. Побудуйте еквівалентну неперервну математичну модель імпульсної САК (див. рис. 6.12) та визначте область значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при яких допустиме її застосування, якщо період часової дискретизації $T = 0,1$ с, а оператор передачі неперервної частини системи описується виразами:

$$1) K_{НЧ}(D) = \frac{K_v}{D};$$

$$2) K_{НЧ}(D) = \frac{K_1}{1 + T_1 D}, \text{ де } T_1 = 10 \text{ с.}$$

Вважати, що задавальне діяння відповідає умові (5.28).

ДОДАТКИ

Додаток 1

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТЕОРЕМИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Назва	Оригінал	Зображення
Властивість лінійності	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$	$c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$x'(t)$ $x^{(n)}(t)$	$pX(p) - x(0)$ $p^n X(p) - p^{n-1}x(0) -$ $- p^{n-2}x'(0) - \dots - x^{n-1}(0)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} X(p)$
Теорема про запізнювання оригіналу	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-\tau p} X(p)$
Теорема про згортку оригіналів	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(p)X_2(p)$
Теорема про кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$
Теорема про початкове значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$

ТАБЛИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА ТА Z-ПЕРЕТВОРЕНЬ

$x(t)$	$X(p)$	$x(nT)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	$d(nT)$	1
$\delta(t)$	$\frac{1}{p}$	$d(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{nT^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{p-\frac{1}{T}\ln a}$	a^n	$\frac{z}{z-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega nT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega T$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega nT$	$\frac{z^2 - 2z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Хисматулин В. Ш. Основы автоматики / В. Ш. Хисматулин. – Х. : ХВУ, 1998.
2. Алексейчев Д. Д. Автоматическое управление и регулирование радиотехнических систем. Ч. 1. Функциональные структуры и математическое описание систем автоматического управления / Д. Д. Алексейчев, А. А. Казаков. – Х. : ВИРТА ПВО, 1980.
3. Алексейчев Д. Д. Автоматическое управление и регулирование радиотехнических систем. Ч. 2. Анализ и коррекция САУ / Д. Д. Алексейчев, А. А. Казаков. – Х. : ВИРТА ПВО, 1982.
4. Александров Є. Є. Теорія автоматичного керування. Т. 1. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами / Є. Є. Александров, Є. П. Козлов, Б. І. Кузнецов. – Х. : НТУ “ХПІ”, 2002.
5. Галенко А. В. Автоматическое управление / А. В. Галенко. – Х. : ХВУ, 1997.
6. Солодовников В. В. Основы теории и элементы систем автоматического управления / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – М. : Машиностроение, 1985.
7. Санковский Е. А. Основы автоматического управления. Элементы автоматических устройств / Е. А. Санковский, О. С. Свердлов, Е. А. Яшугин; под ред. Е. А. Санковского. – Минск : МВИЗРУ ПВО, 1969.
8. Первачев С. В. Радиоавтоматика / С. В. Первачев. – М. : Радио и связь, 1982.
9. Алексейчев Д. Д. Системы автоматического управления в вооружении войск ПВО. Ч. 2. Типовые системы автоматического управления радиотехнических устройств / Д. Д. Алексейчев, А. А. Казаков. – Х. : ВИРТА ПВО, 1985.
10. Вагапов В. Б. Автоматика радиоэлектронных систем / В. Б. Вагапов. – К. : Высшая школа, 1988.
11. Автоматическое управление и регулирование радиотехнических систем: учебные задачи по теории автоматического управления / под ред. Д. Д. Алексейчева. – Х. : ВИРТА ПВО, 1984.
12. Хісматулін В. Ш. Системи керування. Ч. 2. Аналіз лінійних стаціонарних систем автоматичного керування : навч. посіб. / В. Ш. Хісматулін. – Х. : ХВУ, 2004.
13. Основы автоматики і систем керування. Ч. 1. Принципи побудови і математичний опис систем автоматичного керування : навч. посіб. / І. І. Сачук, В. Ш. Хісматулін. – Х. : ХВУ, 2005.

Навчальне видання

КОВАЛЬЧУК Андрій Олексійович
ТАРШИН Володимир Анатолійович
ХІСМАТУЛІН Володимир Шайдулович
САДОВИЙ Костянтин Віталійович
КОВАЛЬЧУК Юрій Олексійович
ВАСИЛИШИН Володимир Іванович
КУЗНЄЦОВ Олександр Леонідович
ЧОПЕНКО Анатолій Сергійович
ПОЛОНСЬКИЙ Юрій Іванович
МАЛИШЕВ Олексій Анатолійович
ЗОЦ Федір Федорович

ОСНОВИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор *Л. Ф. Моренець*
Техн. редактор *Т. В. Василенко*
Коректор *Н. К. Гур'єва*

Підп. до друку ____ . ____ . 2021. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура “Times New Roman”. Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 9,3.
Тираж 65 пр. Зам. № /

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет Повітряних Сил
імені Івана Кожедуба
61023, м. Харків-23, вул. Сумська, 77/79
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 5370 від 30.06.2017 р.