ПРО ТЕОРЕМУ КОСИНУСІВ

В. Є. Березовський, Р. В. Ненька, С. В. Лещенко
Уманський національний університет садівництва, Умань, Україна
berez.volod@rambler.ru, ruslana66@i.ua, leshchenko_63@mail.ru

Нагадаємо, що довжину r і полярний кут φ радіус-вектора точки P називають полярними координатами точки P. Зв'язок між декартовими прямокутними координатами (x,y) і полярними координатами (r,φ) визначається рівняннями

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\qquad \cos\varphi = \frac{x}{r},\qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Нехай відносно полярної системи координат $Or\varphi$ задані точки $A(r_1,\varphi_1), B(r_2,\varphi_2)$. Тоді ці точки відносно декартової прямокутної системи координат мають координати $A(r_1\cos\varphi_1; r_1\sin\varphi_1), B(r_2\cos\varphi_2; r_2\sin\varphi_2)$. Тому

$$d = |AB| = \sqrt{(r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_2\sin\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1)^2} =$$

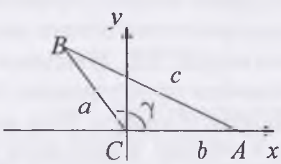
$$= \sqrt{r_2^2\cos^2\varphi_2 - 2r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + r_1^2\cos^2\varphi_1 + r_2^2\sin^2\varphi_2 - }$$

$$\overline{-2r_1r_2\sin\varphi_2\sin\varphi_1\varphi_1 + r_1^2\sin^2\varphi_1} = \sqrt{r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + r_1^2}.$$

Отже,

$$d = |AB| = \sqrt{r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + r_1^2}. \tag{1}$$

Нехай маємо довільний трикутник ΔABC зі сторонами a,b,c та кутом $\angle ABC = \gamma$. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат таким чином, щоб точка C була її початком, точка A належала вісі Cx, причому розміщена праворуч точки C, а точка B належала верхній півплощині.



Тоді точка A буде мати полярні координати $(b;0)$ а точка $B(a;\gamma)$. Скориставшись формулою (1), отримаємо

$$c = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2},$$

або

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Список літератури

1. Погорелов А. В. Геометрия. — М.: Наука, 1983. — 288 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 232 с.