ОБ УСЛОВИЯХ СОХРАНЕНИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА

В. Е. Березовский, Л. Е. Ковалёв

Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

berez.volod@rambler.ru, leokova60@ukr.net

Напомним основные понятия теории почти геодезических отображений, которые изложены в Sinyukov (1984), Mikeš, Berezovski at al. (2015).

Рассмотрим n-мерное пространство аффинной связности без кручения, отнесённое к системе координат $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Предположим, что $n > 2$ и все рассматриваемые функции будем считать достаточно гладкими.

Кривую, определённую в пространстве аффинной связности A_n, называют *геодезической*, если её касательный вектор параллелен вдоль неё.

Кривую, определённую в пространстве аффинной связности A_n, называют *почти геодезической*, если вдоль неё существует двумерная параллельная площадка, содержащая её касательный вектор.

Диффеоморфизм $f : A_n \to \bar{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Для того чтобы отображение пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ тензор деформации связностей

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x),$$

где Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно в указанной системе координат, удовлетворял условиям

$$A_{\alpha\beta\gamma}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = a P_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta + b\lambda^h, \tag{1}$$

где

$$A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h, \tag{2}$$

λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных x^h и λ^h.

Здесь и в дальнейшем знак «,» обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n.

Синюковым (1984) на основании уравнений (1) были выделены три типа почти геодезических отображений: π_1, π_2 и π_3. В работе Berezovskij, Mikeš (1996) доказано, что при $n > 5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_2 характеризуются уравнениями

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h + \sigma_i(x)F_j^h(x) + \sigma_j(x)F_i^h(x), \tag{3}$$

$$F_{(i,j)}^h(x) + F_\alpha^h F_{(i}^\alpha \sigma_{j)} = \mu_{(i}F_{j)}^h + \gamma_{(i}\delta_{j)}^h, \tag{4}$$

где δ_i^h — символы Кронекера, $\psi_i(x)$, σ_i, μ_i, γ_i — некоторые ковариантные векторы, F_i^h — некоторый тензор типа $\binom{1}{1}$.

Отображения $\pi_2 : A_n \to \bar{A}_n$ характеризующиеся в общей по отображению системе координат уравнениями (3) и (4) будем считать соответствующим аффиннору $F_i^h(x)$.

Отображение π_2 удовлетворяет условию взаимности, если обратное ему отображение также является почти геодезическим отображением второго типа и соответствует тому же аффиннору $F_i^h(x)$.

Почти геодезическое отображение типа π_2 называют *каноническим*, если $\psi_i = 0$. Известно, что любое почти геодезическое отображение π_2 можно представить в виде композиции канонического почти геодезического отображения и геодезического отображения.

Рассмотрим канонические почти геодезические отображения π_2, которые удовлетворяют условию взаимности. Такие отображения характеризуются уравнениями

$$P_{ij}^h(x) = \sigma_i(x)F_j^h(x) + \sigma_j(x)F_i^h(x), \tag{5}$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h \qquad (e = \pm 1), \tag{6}$$

$$F_{i,j}^h = \gamma_i\delta_j^h + \mu_i F_j^h + \frac{e}{4}N_{i\alpha}^h F_j^\alpha, \tag{7}$$

$$\gamma_i + \mu_\alpha F_i^\alpha = 0, \tag{8}$$

где N_{ij}^h — тензор Нейенхейса e-структуры $(e \neq 0)$.

В работе Berezovski, Bácsó, Mikeš (2015) доказано, что тензор Римана сохраняется при диффеоморфизмах, тогда и только тогда, когда тензор A_{ijk}^h удовлетворяет условиям

$$A_{ijk}^h = A_{ikj}^h. \tag{9}$$

Если тензор деформации связностей P_{ij}^h выражается по формулам (5), то на основании (2) имеем

$$\begin{aligned} A_{ijk}^h &= \sigma_{i,k}F_j^h + \sigma_i F_{j,k}^h + \sigma_{j,k}F_i^h + \sigma_j F_{i,k}^h + \sigma_i\sigma_\alpha F_j^\alpha F_k^h + \\ &+\sigma_i\sigma_k F_j^\alpha F_\alpha^h + \sigma_j\sigma_\alpha F_i^\alpha F_k^h + \sigma_j\sigma_k F_i^\alpha F_\alpha^h. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая (6) и (7) из (10) получим

$$
\begin{aligned}
A^h_{ijk} &= \sigma_{i,k}F^h_j + \sigma_i(\gamma_k\delta^h_j + \mu_k F^h_j + \frac{e}{4}N^h_{k\alpha}F^\alpha_j) + \\
&+\sigma_{j,k}F^h_i + \sigma_j(\gamma_i\delta^h_k + \mu_i F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_k) + \\
&+\sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_j F^h_k + \sigma_j\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_k + e\delta^h_j\sigma_i\sigma_k + e\delta^h_i\sigma_j\sigma_k.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Потребуем, чтобы тензор A^h_{ijk} удовлетворял условиям (9). Отсюда находим

$$\sigma_{i,k}F^h_j - \sigma_{i,j}F^h_k + \sigma_{j,k}F^h_i - \sigma_{k,j}F^h_i = B^h_{ijk}, \tag{12}$$

где

$$
\begin{aligned}
B^h_{ijk} &= \sigma_i(\gamma_j\delta^h_k + \mu_j F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{j\alpha}F^\alpha_i - \gamma_k\delta^h_j - \mu_k F^h_j - \frac{e}{4}N^h_{k\alpha}F^\alpha_j) - \\
&-\sigma_j(\gamma_i\delta^h_k + \mu_i F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_k) + \sigma_k(\gamma_i\delta^h_j + \mu_i F^h_j + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_j) - \\
&-\sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_j F^h_k + \sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_k F^h_j - \sigma_j\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_k + \sigma_k\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_j - \\
&-e\delta^h_j\sigma_i\sigma_k + e\delta^h_k\sigma_i\sigma_j.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Уравнения (12) свернём с аффиннором F^m_ρ по индексам ρ и h. В результате находим

$$e\sigma_{i,k}\cdot\delta^m_j - e\sigma_{i,j}\cdot\delta^m_k + e\sigma_{j,k}\cdot\delta^m_i - e\sigma_{k,j}\cdot\delta^m_i = B^\alpha_{ijk}F^m_\alpha,$$

или

$$\sigma_{i,k}\delta^m_j - \sigma_{i,j}\delta^m_k + \sigma_{j,k}\delta^m_i - \sigma_{k,j}\delta^m_i = eB^\alpha_{ijk}F^m_\alpha. \tag{14}$$

Уравнения (14) свернём по индексам m и j. Получим

$$n\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i} = eB^\alpha_{i\beta k}F^\beta_\alpha. \tag{15}$$

Проальтернируем уравнения (15) по индексам i и k. В результате находим

$$\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i} = \frac{e}{n+1}F^\beta_\alpha(B^\alpha_{i\beta k} - B^\alpha_{k\beta i}). \tag{15}$$

Учитывая (16) уравнения (15) можно записать в виде

$$\sigma_{i,k} = \frac{e}{n-1}F^\beta_\alpha(B^\alpha_{i\beta k} - \frac{1}{n+1}(B^\alpha_{i\beta k} - B^\alpha_{k\beta i})). \tag{16}$$

Поэтому, имеет место

Теорема. *Если при почти геодезических отображениях второго типа, определяемых уравнениями* (5)—(8)*, сохраняется тензор Римана, то ковектор* σ_i *удовлетворяет условиям* (17).

Список литературы

Berezovski, V. E., Bácsó, S., & Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the riemannian curvature. *Annales Mathematicae et Informaticae*, *45*, 3–10.

Berezovskij, V., & Mikeš, J. (1996). On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, *35*(1), 21—24.

Mikeš, J., & Berezovski, V. E., at al. (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University.

Sinyukov, N. S. (1984). Almost-geodesic mappings of affinely connected and Riemann spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, *25*(4), 1235–1249.