

Об основных уравнениях геодезических отображений

Й. Микеш, В.Е. Березовский, И. Гинтерлейтнер

1) josef.mikes@upol.cz; Palacky University Olomouc

2) berez.volod@rambler.ru; Уманский национальный университет садоводства

3) hinterleitner.i@fce.vutbr.cz; Brno University of Technology

Аннотация

В статье обсуждаются различные типы основных уравнений геодезических отображений (псевдо-) римановых и аффинносвязных пространств.

Ключевые слова: геодезические отображения, основные уравнения, (псевдо-) римановы пространства, аффинносвязные пространства.

Как известно, диффеоморфизм называют геодезическим отображением, если при нем все геодезические одного пространства переходят в геодезические второго пространства.

В частности, геодезическими отображениями и их обобщениями в разных аспектах, занимались многие казанские геометры начиная с П.А. Широкова, который решил задачу о нахождении двухмерных псевдоримановых метрик, допускающих геодезические отображения. Затем этими задачами и их обобщениями занимались В.И. Шуликовский, А.З. Петров, А.П. Широков, Н.В. Талантова, А.В. Аминова, В.Е. Фомин и др.

Усилием многих поколений математиков появились новые виды основных уравнений теории геодезических отображений. В настоящей работе представлен обзор основных уравнений геодезических отображений римановых, псевдо-римановых и аффинносвязных пространств. Этим вопросам посвящены, например, работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Самыми известными являются *уравнения Леви-Чивита*, который получил их для римановых пространств, а затем Г. Вейль, для случая аффинносвязных пространств. Пространства аффинной связности A_n и $\bar{A}_n$ находятся в геодезическом соответствии тогда и только тогда, когда в общей по отображения системе координат x компоненты аффинной связности удовлетворяют уравнениям Леви-Чивита

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x), \quad (1)$$

где $\psi_i(x)$ – компоненты некоторого ковектора ψ и δ_i^h – символы Кронекера.

Уравнения (1) в бескоординатной записи мы можем записать следующим образом

$$(\bar{\nabla} - \nabla)_X X = \psi(X) \cdot Y + \psi(Y) \cdot X,$$

где X, Y произвольные касательные векторные поля, ∇ и $\bar{\nabla}$ – аффинные связности пространств A_n и $\bar{A}_n$. Более кратко, эти уравнения было бы можно записать следующим образом

$$(\bar{\nabla} - \nabla)_X X = 2\psi(X) \cdot X.$$

В случае, когда $\psi \equiv 0$, геодезические отображения называются *тривиальными* или *аффинными*.

Заметим, что из уравнений (1) следует, что геодезические отображения обладают свойством *эквивалентности*, т.е. тождественное отображение является геодезическим, обратное отображение к геодезическому является также геодезическим и композиция геодезических отображений также является геодезическим отображением.

Как известно, необходимым и достаточным условием геодезического отображения (или *проективного соответствия*) является равенство компонент *проективной связности* в общей системе координат x :

$$\bar{\mathcal{T}}_{ij}^h(x) = \mathcal{T}_{ij}^h(x).$$

Объект проективной связности в аффинносвязных пространствах называется *объектом Томаса*, который их построил:

$$\mathcal{T}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) - \frac{1}{n+1} (\delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha(x) + \delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha(x)).$$

Т. Леви-Чивита [2] доказал, что уравнения (1) при геодезических отображениях римановых пространств V_n и $\bar{V}_n$ эквивалентны уравнениям

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}, \quad (2)$$

где $\bar{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства $\bar{V}_n$ и запятая обозначает ковариантное дифференцирование в V_n .

Эти уравнения справедливыми и для геодезических отображений псевдо-римановых пространств, а также для отображений аффинносвязных пространств на (псевдо-) римановы. Выше приведенные уравнения были дополнены до замкнутой системы дифференциальных уравнений типа Коши в работе [11], см. [10], с. 276.

В 1963г. Н.С. Синюков [10] доказал, что уравнения (2) для геодезических отображений между (псевдо-) римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ эквивалентны линейным уравнениям

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}$$

относительно неизвестных тензоров $a_{ij}(x)$ и $\lambda_i(x)$. Здесь g_{ij} – метрический тензор V_n .

Им была построена замкнутая система уравнений типа Коши:

$$\begin{aligned} (a) \quad a_{ij,k} &= \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}; \\ (b) \quad n \lambda_{i,j} &= \mu g_{ij} - a_{i\alpha} R_j^\alpha - a_{\alpha\beta} R_{ij}^{\alpha\beta}; \\ (c) \quad (n-1) \mu_{,i} &= 2(n+1) \lambda_\alpha R_i^\alpha + a_{\alpha\beta} (2R_{i,\alpha}^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}_{,i}). \end{aligned}$$

В работе Й. Микеша и В.Е. Березовского [11], см. [10], с. 280, эти результаты обобщены на случай геодезического отображения эквиаффинного аффинносвязного пространства A_n на (псевдо-) римановы пространства $\bar{V}_n$. В этом случае уравнения (2) эквивалентны следующим линейным уравнениям

$$a^{ij}_{,k} = \delta_k^i \lambda^j + \delta_k^j \lambda^i \quad (3)$$

относительно неизвестных невырожденного симметрического тензора $a^{ij}(x)$ и вектора λ^i . В области, где тензор проективной кривизны Вейля ненулевой, вектор λ^i линейно выражается через компоненты тензора a^{ij} (при $n > 2$). Нами доказано [12], что если $A_n \in C^{r-1}$ (т.е. $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^{r-1}$) при $r \geq 3$ и $\bar{V}_n \in C^1$ ($\bar{g}_{ij}(x) \in C^1$), то по необходимости $\bar{V}_n \in C^r$.

Напомним, что пространство аффинной связности называется *эквиаффинным*, если в нем существует некоторая система координат x и некоторая функция $f(x)$, для которой выполняется $\Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) = \partial f(x) / \partial x^i$. Заметим, что эквиаффинные пространства характеризуются симметричностью тензора Риччи. См. [5], сс. 150–151, [10], с. 85.

Ранее (в 20-х годах прошлого века) было доказано, что любое пространство аффинной связности локально проективно некоторому эквиаффинному пространству с нормальной связностью. Аффинная связность $\tilde{\mathcal{T}}_{ij}^h(x)$ называется *нормальной*, если в некоторой системе координат x построена аналогичным образом как объекты Томаса (см. [13], [9, р. 105], [10, р. 282]; эта конструкция была еще раз построена в работе [14]):

$$\tilde{\mathcal{T}}_{ij}^h(x) = \tilde{\Gamma}_{ij}^h(x) - \frac{1}{n+1} (\delta_i^h \tilde{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha(x) + \delta_j^h \tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha(x)).$$

Эквиаффинность следует из очевидного свойства $\tilde{\mathcal{T}}_{i\alpha}^\alpha(x) = 0$.

В работе [15] показано, что в любом аффинносвязном пространстве можно “в целом” построить проективно эквивалентную эквиаффинную связность и, таким образом, любое пространство аффинной связности проективно “в целом” некоторому эквиаффинному пространству.

Поэтому уравнения (3) являются основными уравнениями для геодезических отображений пространств аффинной связности на (псевдо-) римановы пространства. Ковариантное дифференцирование в этом случае осуществляется при помощи нормальной связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта IGA 2017012 Университета Палацкого в г. Оломоуце и проекта No. LO1408, AdMas UP Технологического университета в г. Брно.

Список литературы

- [1] Аминова А. В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 2(290). – С. 107–164
- [2] Levi-Civita T. *Sulle transformationi delle equazioni dinamiche* // Ann. Mat. Milano. – 1896. – Т. 24. – № 2. – С. 255–300.
- [3] Eisenhart L. P. *Riemannian geometry*. Princeton Univ. Press. 1926.
- [4] Eisenhart L. P. *Non-Riemannian geometry*. Princeton Univ. Press. 1926. AMS Colloq. Publ. 8, 2000.
- [5] Норден А. П. *Пространства аффинной связности*. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
- [6] Петров А. З. *Новые методы в теории относительности*. – М.: Наука, 1966. – 495 с.
- [7] Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств*. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
- [8] Mikeš J. *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces* // Geometry, 2. J. Math. Sci. – 1996. – Т. 78. – № 3. – С. 311–333.
- [9] Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. *Geodesic mappings and some generalizations*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009. – 304 с.
- [10] Mikeš J. et al. *Differential geometry of special mappings*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566 с.
- [11] Mikeš J., Berezovski V. *Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces* // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 56. Diff. Geom., Eger (Hung.). – 1989. – С. 491–494.

- [12] Hinterleitner I, Mikeš J. *Geodesic mappings onto Riemannian manifolds and differentiability* // Geometry, integrability and quantization XVIII, 183–190. – Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 2017.
- [13] Cartan É. *Sur les variété á connexion projective* // S. M. F. Bull. – 1924. – T. 52. – C. 205–241.
- [14] Mikeš J., Hinterleitner I, Kiosak V. *On geodesic mappings of spaces with affine connection* // Acta Physica Debrecina. – 2008. – T. 42. – C. 19–28.
- [15] Hinterleitner I, Mikeš J. *Projective equivalence and spaces with equi-affine connection* // J. Math. Sci. – 2011. – T. 177. – C. 546–550.

On fundamental equations of geodesic mappings

J. Mikeš, V.E. Berezovskii, I. Hinterleitner

Abstract

Here different types of fundamental equations of geodesic mappings (pseudo-) Riemannian spaces and spaces with affine connection.

Keywords: geodesic mappings, fundamental equations, (pseudo-) Riemannian spaces, spaces with affine connection.