Міністерство освіти і науки України
Уманський національний університет

Л. Є. Ковальов, С. В. Лещенко, В. П. Мелех,
Т. В. Нескородєва, І. І. Побережець

Основи теорії ймовірностей і математичної статистики

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою Уманського НУ
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за
спеціальностями галузі знань
D «Бізнес, адміністрування та право»

Умань
Видавець «Сочінський М. М.»
2025

УДК 519.2(075.8)
К56

Рекомендовано Вченою радою Уманського НУ
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальностями галузі знань
D «Бізнес, адміністрування та право»
(протокол № 8 від 22 травня 2025 року)

Рецензенти:

Федоров Є. Є., доктор технічних наук, професор, професор кафедри статистики та прикладної математики Черкаського державного технологічного університету;

Шушура О. М., доктор технічних наук, доцент, професор кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів і систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Кулаков П. І., доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій Уманського національного університету.

Ковальов Л. Є.
К56 Основи теорії ймовірностей і математичної статистики / Л. Є. Ковальов, С. В. Лещенко, В. П. Мелех, Т. В. Нескородєва, І. І. Побережець : навчальний посібник. – Умань : Видавець «Сочінський М. М.», 2025. – 115 с.
ISBN 978-966-304-571-9

Посібник охоплює всі питання робочої програми дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». Викладення теоретичного матеріалу супроводжується значною кількістю прикладів, які доведені до числових результатів.

Для студентів, які навчаються за спеціальностями галузі знань 07 «Управління та адміністрування».

УДК 519.2(075.8)

ISBN 978-966-304-571-9

Зміст

Вступ

В економіці, як й у інших сферах людської діяльності або у природі, постійно доводиться мати справу з подіями, які неможливо точно передбачити. Так, об'єм продаж товару залежить від попиту, що може суттєво змінюватись, та від ряду інших факторів, врахувати які практично нереально. Тому при організації виробництва і здійснення продаж необхідно прогнозувати результат такої діяльності або на основі власного та чужого досвіду, або на основі інтуїції, яка в значної мірі теж опирається на дослідні дані.

Однією з головних задач в теорії ймовірностей є задача визначення кількісної міри можливості появи події.

Математична статистика займається вивченням закономірностей, яким підлягають масові явища, на основі результатів спостережень.

Перша задача математичної статистики — це розробка методології збору та групування статистичного матеріалу, який отриманий в результаті спостережень за випадковими процесами.

Друга задача полягає у розробці методів аналізу отриманих статистичних даних. Цей аналіз включає оцінку ймовірностей подій, функції розподілу ймовірностей або густини ймовірності, оцінку параметрів відомого розподілу, а також зв'язків між випадковими величинами.

Математична статистика спирається на теорію ймовірностей та, і собі, служить основою для обробки і аналізу статистичних результатів у конкретних галузях людської діяльності.

Розділ 1.

Теорія ймовірностей

1.1. Ймовірність події

Під *подією* розумітимемо кожне явище, про яке можна сказати, що воно відбувається (відбудеться) або не відбувається (не відбудеться).

Для того, щоб оцінити подію, потрібно врахувати або спеціально створити умови, при яких вона відбувається. Виконання певних умов або дій для виявлення події, яка розглядається, називають *дослідом*.

Подію називають *випадковою,* якщо при виконанні досліду вона може або відбутися, або не відбутися.

Подію називають *вірогідною,* якщо вона неминуче відбудеться при проведені досліду, і *неможливою,* якщо вона не може з'явитись у цьому досліді.

Наприклад, випадіння снігу в Умані 29 листопада є випадковою подією. Щоденний схід Сонця можна вважати вірогідною подією, а вибір числа 7 з множини парних чисел — неможливою подією.

Події називають *несумісними*, якщо вони разом не можуть спостерігатись в одному й тому ж досліді. Так, обслуговування одночасно двох покупців на касі у магазині — це дві несумісні події.

Сумою подій A_1, A_2, …, A_n називають подію, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Приклад 1.1. *Якщо* A_1 *— продаж одного товару в магазині, а* A_2 *— продаж другого товару, то сумою цих двох подій є продаж або першого товару, або другого товару, або обох товарів одночасно.*

Добутком подій A_1, A_2, …, A_n називають подію, яка полягає в одночасній появі всіх цих подій:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Продаж одночасно двох товарів є прикладом добутку двох подій: A_1 — продаж одного товару в магазині, а A_2 — продаж другого товару.

Події B_1, B_2, …, B_k утворюють *повну групу* подій, якщо хоча б одна з них обов'язково відбудеться у досліді та вони попарно несумісні.

Приклад 1.2. *В порту є два причали для прийому суден. Розглянемо три події:* B_1 *— відсутність суден біля причалів,* B_2 *— наявність одного судна біля одного з причалів,* B_3 *— наявність двох суден біля двох причалів. Ці три події утворюють повну групу.*

Дві події, одна з яких обов'язково повинна відбутися, але настання однієї виключає можливість настання іншої, називають *протилежними*. Очевидно, що протилежні події утворюють повну групу.

Подія, що протилежна події A, позначається через $\bar{A}$.

Прикладом протилежних подій буде випадання «герба» та випадання «числа» при підкиданні монети.

Нехай задана скінченна множинна елементів деякої природи. З них можна скласти певні сполуки, кількість яких вивчає *комбінаторика*. Деякі формули комбінаторики використовуються в теорії ймовірностей. Наведемо їх.

Сполуки, які складаються з однієї й тієї ж сукупності n різних елементів та відрізняються тільки порядком їх розміщення, називають *перестановками*. Кількість усіх можливих перестановок визначається добутком чисел від одиниці до n ($n!$ — факторіал числа):

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Приклад 1.3. *Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 і 4 з використанням всіх вказаних цифр у кожному числі?*

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Сполуки по m елементів, які складені з n різних елементів $(m \leqslant n)$ та, які відрізняються один від іншого або елементами, або їх порядком, називають *розміщеннями*. Кількість можливих розміщень знаходиться за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Приклад 1.4. *Скільки тризначних чисел можна скласти з семи різних цифр при відсутності серед них нуля?*

Розв'язання. Шукана кількість чисел $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$

Сполуки, що містять по m елементів кожне, які складені з n різних елементів $(m \leqslant n)$ та, які відрізняються хоча б одним елементом, називають *комбінаціями*. Кількість комбінацій задається формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,.$$

Можна довести, що мають місце формули

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad A_n^m = P_n C_n^m.$$

Приклад 1.5. *Скількома способами можна вибрати а) дві карти, б) 32 карти з колоди, що містить 36 гральних карт?*

Розв'язання. Шукана кількість способів

а)

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{2!34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630,$$

б)

$$C_{36}^{32} = C_{36}^4 = \frac{36!}{4!32!} = 5\,8905.$$

Кожний з рівноможливих результатів дослідів називають *елементарним наслідком*. Їх зазвичай позначають літерами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Наприклад, підкидання гральної кістки може дати шість елементарних наслідків. З елементарних наслідків можна скласти більш складну подію. Так, подія випадання парного числа очок визначається трьома наслідками: 2, 4, 6.

Кількісною мірою можливості появи події є *ймовірність*. Найбільш широке поширення отримали два визначення ймовірності події: класичне та статистичне.

Класичне визначення ймовірності пов'язане з поняттям сприятливого наслідку. Наслідок називають *сприятливим* даній події, якщо його поява викликає за собою настання цієї події.

Ймовірність події A дорівнює відношенню кількості сприятливих наслідків до загальної кількості можливих наслідків:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1.1}$$

де m — кількість сприятливих наслідків події A; n — загальна кількість можливих наслідків.

Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці, ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а ймовірність випадкової події є число:

$$0 < P(A) < 1.$$

Приклад 1.6. *У коробці лежать 10 куль: 6 білих та 4 чорних. Знайти ймовірність того, що з п'яти навмання взятих куль буде 4 білих.*

Розв'язання. Знайдемо кількість сприятливих наслідків: кількість способів, якими можна взяти 4 білі кулі з 6, дорівнює $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$. *Загальна кількість наслідків визначається кількістю комбінацій з 10 по 5:* $C_{10}^5 = 252$. *Згідно з* (1.1.1) *шукана ймовірність* $P = \frac{15}{252} \approx 0{,}06$.

Приклад 1.7. *У ящику знаходиться 10 стандартних та 5 нестандартних деталей. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих 6 деталей буде 4 стандартних і 2 нестандартних?*

Розв'язання. Загальна кількість наслідків дорівнює C_{15}^6. *Кількість сприятливих наслідків визначається добутком* $C_{10}^4 C_5^2$, *де перший співмножник відповідає кількості варіантів вилучення з ящика чотирьох стандартних деталей з десяти, а другий — кількості варіантів вилучення з ящика двох нестандартних деталей з п'яти. Звідси отримуємо шукану ймовірність* $P = \frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6} = 0{,}42$.

Статистичне визначення ймовірності зв'язано з поняттям відносної частоти появи події A в дослідах. *Відносна частота появи* події A обчислюється за формулою

$$P^*(A) = W(A) = \frac{n_A}{n}, \tag{1.1.2}$$

де $P^*(A)$ — статистична ймовірність події A; $W(A)$ — відносна частота події A; n_A — кількість появ події A в серії з n дослідів.

Ймовірністю події A називають число, до якого прямує відносна частота $P^*(A)$ при необмеженому збільшені кількості дослідів.

В практичних задачах за ймовірність події A приймають відносну частоту $P^*(A)$ при достатньо великій кількості дослідів.

Приклад 1.8. *Спостереження показують, що в середньому серед 1 000 новонароджених дітей 515 хлопчиків. Яка відносна частота народження хлопчиків?*

Розв'язання. Нехай подія A — народження хлопчика. Загальна кількість дослідів у даному спостережені $n_1 = 1\,000$, кількість m_1 появ події A дорівнює 515. Відносна частота появи події A: $P^*(A) = \dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{515}{1\,000} = 0{,}515.$

Для випадків з нескінченною множиною елементарних наслідків досліду було побудоване *геометричне визначення* ймовірності. Кожен з наслідків інтерпретується як вибір навмання точки з деякої множини n-вимірного (E_n) евклідового простору. Вважається, що множина має деяку геометричну форму і скінченну міру. За подію A звичайно беруть точку, що належить або не належить заданій частині геометричної форми (довжині, площі, об'єму). Ймовірність події A визначається як відношення міри частини геометричної форми до міри всієї форми. Так, для довжини, площі, об'єму (l, S, V) — частини геометричної форми, що має відповідну довжину l_0, площу S_0, об'єм V_0, геометрична ймовірність попадання в частину визначається такими відношеннями:

$$P(A) = \frac{l}{l_0}\,; \qquad P(A) = \frac{S}{S_0}\,; \qquad P(A) = \frac{V}{V_0}\,.$$

Приклад 1.9. *(Задача про зустріч). Дві особи домовляються про зустріч на заданому проміжку часу t. Особа, що прийшла першою, чекає протягом часу $a < t$. Яка ймовірність зустрічі?*

Розв'язання. За множину елементарних наслідків візьмемо квадрат із стороною t і точками (x, y), що зображають час зустрічі (рис. 1.1). Тоді $0 \leqslant x \leqslant t$, $0 \leqslant y \leqslant t$. Сприятливі наслідки утворюють точки, для яких $|y - x| < a$, тобто точки смуги між прямими $y = x + a$, $y = x - a$.

Площа цієї смуги $S = t^2 - (t - a)^2$. *Площа основного квадрата* $S_0 = t^2$. *Тоді шукана ймовірність визначається:*

$$P(A) = \frac{S}{S_0} = \frac{t^2 - (t - a)^2}{t^2} = 1 - \left(\frac{t - a}{t}\right)^2.$$

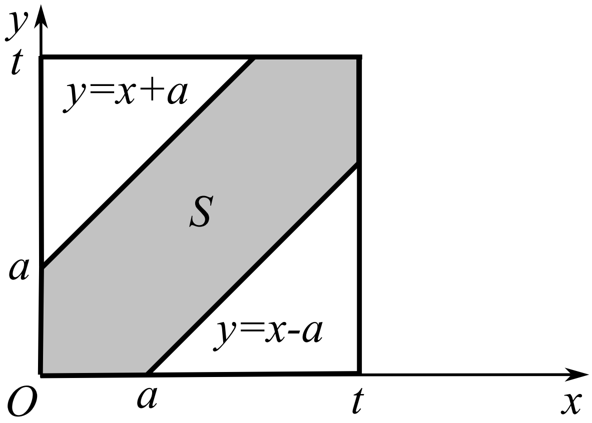

Рис. 1.1. Геометрична ймовірність (задача про зустріч)

Питання для самоконтролю

1. Які події називають несумісними?
2. Що таке сума та добуток подій?
3. Визначення повної групи подій.
4. Які сполуки називають перестановками, розміщеннями, комбінаціями?
5. Яка ймовірність вірогідної та неможливої події?
6. В яких межах змінюється ймовірність випадкової події?
7. Сформулюйте класичне визначення ймовірності.
8. Сформулюйте статистичне визначення ймовірності.
9. Як визначається геометрична ймовірність?

1.2. Теореми додавання і множення ймовірностей

Теорема 1.1. *Ймовірність суми скінченної кількості несумісних подій* A_1, A_2, …, A_n *дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.2.1)$$

Доведення. Доведемо цю теорему для випадку суми двох несумісних подій A_1 і A_2.

Нехай події A_1 сприяють m_1 елементарних наслідків, а події A_2 — відповідно m_2 наслідків. Отже,

$$P(A_1 + A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2),$$

де $P(A_1)$ — ймовірність події A_1; $P(A_2)$ — ймовірність події A_2.

Приклад 1.10. *Для відправлення вантажу зі складу може бути виділена одна з двох машин. Відомі ймовірності виділення кожної машини: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}4$. Тоді ймовірність того, що до складу буде подана хоча б одна машина $P(A_1 + A_2) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.*

Теорема 1.2. *Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:*

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_k) = 1.$$

Приклад 1.11. *На складі готової продукції знаходяться вироби, серед яких 5% нестандартних. Знайти ймовірність того, що при видачі виробу зі складу він буде стандартним.*

Розв'язання. Ймовірність отримання нестандартного виробу дорівнює $P(B_1) = 0{,}05$; події видання стандартного та нестандартного виробу утворюють повну групу. Отже, сума їх ймовірностей дорівнює одиниці, і тоді шукана ймовірність рівна $P(B_2) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

З теореми 1.2 випливає, що сума ймовірностей протилежних подій рівна одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Приклад 1.12. *В магазині є 10 телевізорів, з яких 2 неробочих. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих трьох телевізорів буде хоча б один неробочий.*

Розв'язання. Події «серед взятих телевізорів немає жодного неробочого» та «є хоча б один неробочий» — протилежні. Першу з них позначимо через A, а другу — через $\bar{A}$. Загальна кількість способів, якими можна взяти 3 телевізори з 10, рівна C_{10}^3. Кількість робочих телевізорів рівна 8, кількість способів вибірки з них трьох телевізорів *дорівнює C_8^3, так що ймовірність $P(A) = \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$. Шукана ймовірність*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = 1 - 0{,}47 = 0{,}53.$$

У багатьох випадках ймовірності появи одних подій залежать від того, відбулась інша подія або ні. Наприклад, ймовірність своєчасного випуску машини залежить від постачання комплектуючих виробів. Якщо ці вироби вже доставлені, то значення шуканої ймовірності буде одним. Якщо ж вона визначається до постачання комплектуючих, то її значення, звичайно, буде іншим.

Ймовірність події A, яка обчислена за умови, що мала місце інша подія B, називають *умовною ймовірністю* події A і позначають $P(A/B)$.

У тих випадках, коли ймовірність події A розглядається за умови, що відбулись дві події B і C, використовується умовна ймовірність відносно добутку подій B і C: $P(A/BC)$.

Приклад 1.13. *У ящику лежать 11 деталей, 3 з яких нестандартні. З ящика двічі беруть по одній деталі не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність того, що другого разу з ящика буде взята стандартна деталь — подія A, якщо у перший раз вибрали нестандартну деталь — подія B.*

Розв'язання. Після першого виймання у ящику з 10 деталей залишилось 8 стандартних. Отже, шукана ймовірність дорівнює $P(A/B) = 0{,}8$.

Теорема 1.3. *Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, яка обчислена за умови, що перша мала місце:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{1.2.2}$$

Доведення. Припустимо, що з n можливих елементарних наслідків події A сприяють m наслідків, з яких k наслідків сприяють події B. Тоді ймовірність події A буде $P(A) = \dfrac{m}{n}$, умовна ймовірність події B відносно події A: $P(B/A) = \dfrac{k}{m}$.

Добутку подій A і B сприяють тільки ті наслідки, які сприяють й події A, й події B одночасно, тобто k наслідків. Тому ймовірність добутку подій A і B дорівнює $P(B/A) = \frac{k}{n}$.

Помножимо чисельник і знаменник цього дробу на m та отримуємо

$$P(AB) = \frac{mk}{mn} = \frac{m}{n}\frac{k}{m} = P(A)P(B/A).$$

Аналогічно доводиться й формула $P(AB) = P(B)P(A/B)$.

Приклад 1.14. *На склад надійшло 35 холодильників. Відомо, що п'ять холодильників з дефектами, але невідомо — які. Знайти ймовірність того, що два взятих навмання холодильника будуть з дефектами.*

Розв'язання. Ймовірність того, що перший обраний холодильник матиме дефект, знаходиться як відношення кількості сприятливих наслідків до загальної кількості наслідків:

$$P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Якщо перший холодильник виявився з дефектом, то умовна ймовірність того, що й другий буде з дефектом, визначається співвідношенням

$$P(B/A) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}.$$

Тоді шукана ймовірність

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{17} = 0{,}017.$$

Якщо при настанні події A ймовірність події B не змінюється, то події A і B називають *незалежними*. Очевидно, що умовна ймовірність події B відносно події A дорівнює безумовній ймовірності: $P(B/A) = P(B)$. Аналогічно, $P(A/B) = P(A)$.

У випадку незалежних подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.2.3}$$

Теорема добутку ймовірностей узагальнюється на будь-яку скінченну кількість подій, наприклад чотирьох:

$$P(ABCD) = P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC). \tag{1.2.4}$$

Приклад 1.15. *В урні знаходяться 4 білих кулі, 5 червоних і 3 синіх. Навмання виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність того, що першого разу з'явиться біла куля (подія A), другого разу — червона куля (подія B), третього — синя куля (подія C).*

Розв'язання. Ймовірність появи білої кулі при першому вийманні $P(A) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$; умовна ймовірність появи червоної кулі при другому вийманні за умови появи першого разу білої кулі дорівнює $P(B/A) = \dfrac{5}{11}$; умовна ймовірність появи синьої кулі при третьому вийманні за умови появи в попередніх вийманнях білої і червоної куль: $P(C/AB) = \dfrac{3}{10}$. Шукана ймовірність знаходиться за формулою:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} \approx 0{,}045.$$

Цікавим є випадок знаходження ймовірності настання хоча б однієї з n незалежних подій з відомими ймовірностями їх появи (наприклад, у випадку трьох подій знайти ймовірність настання або однієї, або двох, або трьох подій). Має місце теорема.

Теорема 1.4. *Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій A_1, A_2, …, A_n, ймовірність появи яких p_i, визначається формулою*

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \tag{1.2.5}$$

де $q_i = 1 - p_i$ — ймовірність відповідних протилежних подій $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

У окремому випадку, коли всі події A_i мають однакову ймовірність p, з формули (1.2.5) випливає, що

$$P(A) = 1 - q^n, \qquad q = 1 - p. \tag{1.2.6}$$

Приклад 1.16. *Знайти ймовірність ураження цілі (хоча б одного попадання) при залповій стрільбі трьома гарматами, якщо ймовірність ураження цілі ними відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7.*

Розв'язання. Ймовірності протилежних подій (невлучань) відповідно дорівнюють $q_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $q_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $q_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Шукана ймовірність знаходиться за формулою:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Приклад 1.17. *На перевезення вантажу направлені 4 автомобілі. Ймовірність знаходження кожної з машин у справному стані дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в роботі бере участь хоча б один з цих автомобілів.*

Розв'язання. Ймовірність протилежної події (автомобіль несправний) дорівнює $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. *Шукана ймовірність знаходиться за формулою:*

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984.$$

Приклад 1.18. *Ймовірність обслуговування клієнта банківським працівником дорівнює 0,6. Яка мінімальна кількість працівників повинна бути у банку, щоб ймовірність обслуговування клієнта була не менша за 0,95?*

Розв'язання. Ймовірність протилежної події (відмова в обслуговуванні клієнта банківським працівником) дорівнює 0,4. Нехай n *— кількість працівників, які задовольняють умові задачі, тоді*

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}4^n \geqslant 0{,}95.$$

Після перетворень отримуємо нерівність

$$0{,}4^n \leqslant 0{,}05.$$

Логарифмування обох частин цієї нерівності дає $n \geqslant \dfrac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}4} = 3{,}27.$ *Оскільки* n *повинно бути натуральним числом, остаточно отримуємо, що у банку повинно бути не менше 4 працівників.*

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому ж досліді.

Приклад 1.19. *Надходження в магазин одного виду товару — подія* A, *надходження другого товару — подія* B. *Постачання в магазин цих товарів може відбутись й одночасно. Тому* A *і* B *— сумісні події.*

Теорема 1.5. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.7}$$

З цієї формули отримуємо окремі випадки.

Для незалежних сумісних подій

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \tag{1.2.8}$$

Для залежних сумісних подій

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B/A). \tag{1.2.9}$$

Приклад 1.20. *Нехай ймовірність надходження в магазин одного виду товару* $P(A) = 0{,}4$*, а другого виду* $P(B) = 0{,}5$*. Якщо припустити, що ці події незалежні, але сумісні, то ймовірність суми подій дорівнює*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}7.$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про суму несумісних подій.
2. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу.
3. Сума ймовірностей протилежних подій.
4. Що називають умовною ймовірністю?
5. Ймовірність добутку двох, трьох, чотирьох подій.
6. Які події називають незалежними?
7. Ймовірність добутку незалежних подій.
8. Сформулюйте теорему про ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій.
9. Які події називають сумісними?
10. Сформулюйте теорему про ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій.

1.3. Основні формули для ймовірностей подій

Припустимо, що подія B може відбутися тільки з однією із несумісних подій A_1, A_2, …, A_n. Наприклад, в магазин надходить одна й та ж продукція від трьох підприємств у різній кількості. Ймовірність виготовлення неякісної продукції на цих підприємствах різна. Випадковим чином відбирається один з виробів. Необхідно знайти ймовірність того, що цей виріб неякісний (подія B). Тут події A_1, A_2, A_3 — це вибір виробу з продукції відповідного підприємства.

У цьому випадку подію B можна розглядати як суму добутків подій

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i.$$

За теоремою 1.1 ймовірності суми несумісних подій (формула (1.2.1)) отримуємо

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$

За теоремою 1.3 ймовірності добутку подій (формула (1.2.2)), знаходимо

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i). \qquad (1.3.1)$$

Формулу (1.3.1) називають *формулою повної ймовірності* події B, поява якої можлива лише при настанні однієї з несумісних подій A_1, $A_2, \ldots, A_n$, що утворюють повну групу.

Приклад 1.21. *Для випадку з постачанням товарів в магазин з трьох підприємств, який було розглянути вище, задамо числові значення. Нехай від першого підприємства надійшло 20 виробів, від другого — 10 та від третього — 70. Ймовірності виготовлення неякісного виробу на підприємствах дорівнюють відповідно 0,02; 0,03 і 0,05. Знайти ймовірність отримання неякісного виробу.*

Розв'язання. Ймовірності подій A_1, A_2, A_3 *дорівнюють відповідно* $P(A_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2$; $P(A_2) = \frac{10}{100} = 0{,}1$; $P(A_3) = \frac{70}{100} = 0{,}7$. *За формулою* (1.3.1) *знаходимо*

$$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}03 + 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}042.$$

Нехай подія B відбувається одночасно з однією з n несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які утворюють повну групу. Необхідно знайти умовну ймовірність події A_i, якщо відомо, що подія B відбулась.

За теоремою 1.3 про ймовірність добутку двох подій (формула (1.2.2))

$$P(A_iB) = P(B)P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i),$$

звідки

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

або

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}. \qquad (1.3.2)$$

Формулу (1.3.2) називають *формулою Байєса.*

Приклад 1.22. *Три організації подали у контрольно-ревізійний відділ рахунки для вибіркової перевірки: перша — 15 рахунків, друга — 10, третя — 25. Ймовірності правильного оформлення рахунків у цих організацій відповідно наступні: 0,9; 0,8; 0,85. Був обраний один рахунок та він виявився вірним. Знайти ймовірність того, що цей рахунок належить другій організації.*

Розв'язання. Нехай A_1, A_2, A_3 *— події вибору рахунка відповідно у першій, другій і третій організації. Ймовірності цих подій дорівнюють:*

$$P(A_1) = \frac{15}{50} = 0{,}3; \qquad P(A_2) = \frac{10}{50} = 0{,}2; \qquad P(A_1) = \frac{25}{50} = 0{,}5.$$

За формулою (1.3.1) *повної ймовірності визначаємо ймовірність вибору правильного рахунку:*

$$P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}85 \cdot 0{,}5 = 0{,}895.$$

За формулою Баєса знаходимо шукану ймовірність:

$$P(A_2/B) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}855} = 0{,}19.$$

Приклад 1.23. *Ймовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює 0,08. Після виготовлення всі вироби підлягають перевірці, в результаті якої вироби без браку визнаються придатними до експлуатації з ймовірністю 0,95, а вироби з браком — з ймовірністю 0,06. Знайти долю виробів, які пройшли перевірку та ймовірність того, що виріб після перевірки буде без браку.*

Розв'язання. Незалежні події A_1 *(виріб без браку) та* A_2 *(виріб з браком) утворюють повну групу. Нехай подія* B *полягає в тому, що при перевірці виріб визнається придатним. Відповідь на перше запитання задачі дає формула повної ймовірності:*

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) = 0{,}92 \cdot 0{,}95 + 0{,}08 \cdot 0{,}06 = 0{,}8788.$$

Отже, після перевірки визнаються придатними біля 88% усіх виготовлених виробів.

Відповідь на друге запитання задачі дає формула Байєса:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}95}{0{,}88788} = 0{,}995.$$

Тобто, серед виробів, які пройшли перевірку, міститься 99,5% виробів без браку.

Припустимо, що декілька однакових машин в одних й тих же умовах перевозять вантаж. При цьому будь-яка машина може вийти з ладу. Нехай ймовірність виходу з ладу однієї машини не залежить від виходу з ладу інших машин. Це означає, що ці події (випробування) незалежні. Ймовірності виходу з ладу кожної машини приймемо однаковими — p.

Нехай в загальному випадку проводиться n незалежних випробувань. Задача полягає у знаходженні ймовірності того, що в m випробуваннях настане подія A, якщо ймовірність її настання у кожному випробуванні дорівнює p. У нашому прикладі це може бути ймовірність виходу з ладу однієї машини, двох машин тощо.

Виконавши n послідовних випробувань, ми матимемо різні сполуки результатів. Ті сполуки результатів, в яких подія A відбудеться m раз, називатимемо сприятливими.

Визначимо ймовірність однієї сприятливої сполуки. Сприятливою сполукою є добуток n незалежних подій: m появ події A і $n - m$ появ події $\bar{A}$. За умовою $P(A) = p$, тому $P(\bar{A}) = 1 - p$. Отже, за формулою для ймовірності добутку незалежних подій дістанемо, що ймовірність однієї сприятливої сполуки дорівнює

$$P = p^m q^{n-m}, \quad \text{де} \quad q = 1 - p.$$

Поява події, ймовірність якої знаходимо, полягає в появі принаймні однієї сприятливої сполуки. Інакше кажучи, ця подія є сумою всіх сприятливих сполук, кількість яких дорівнює кількості комбінацій з n елементів по m, тобто C_n^m. Але сприятливі сполуки несумісні. Тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій дістанемо ймовірність появи події A m раз при n випробуваннях:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.3.3}$$

Цю формулу називають *формулою Бернуллі.*

Приклад 1.24. *Контрольний тест за тему містить 4 питання. Для кожного питання пропонується 4 варіанти відповідей, серед яких тільки одна вірна. Знайти ймовірність правильної відповіді на два, три і чотири питання тесту для непідготовленого студента (відповідь вибирається навмання).*

Розв'язання. Шукані значення ймовірностей знаходяться за формулою Бернуллі (1.3.3) *з урахуванням того, що ймовірність події A (правильна відповідь) у кожному випробуванні при виборі правильної відповіді навмання дорівнює $p = 0{,}25$, а $q = 0{,}75$. Тоді отримуємо:*

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}210;$$

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}047;$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}004.$$

З'ясуємо, при якому значенні m ймовірність $P_n(m)$ найбільша. При зміні m від 0 до n ймовірність $P_n(m)$ збільшується, коли $m < np - q$, і зменшується, коли $m > np-q$. При якому значені $m = m_0$ ймовірність $P_n(m)$ найбільша?

Якщо $np - q$ — не ціле число, то таке значення m_0 ми дістанемо, коли до цілої частини числа $np-q$ додамо одиницю. Якщо $np-q$ — ціле число, то таких значень m_0 матимемо два: одне з них $np-q$, а друге $np - q + 1 = np + p$. Ці два випадки зручно описати так. Розглянемо сегмент $[np - q;\ np + p]$. Його довжина дорівнює одиниці, і тому його кінці або обидва цілі числа або обидва не цілі числа. Цей сегмент може містити в собі одне ціле число (якщо кінці не цілі числа), або два цілих числа (якщо кінці цілі числа). Цілі числа, що містяться у цьому сегменті, і є тими значеннями m, при яких $P_n(m)$ набуває найбільшого значення.

Приклад 1.25. *Висаджено 152 дерева. Ймовірність того, що висаджене дерево прийметься, для кожного дерева однакова: $p = 0{,}9$. Знайти найімовірнішу кількість дерев, що приймуться.*

Розв'язання. У цій задачі $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 152$. Тому $np - q = 152 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 = 136{,}7$, $np + p = 152 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 = 137{,}7$.

Сегмент $[136{,}7;\ 137{,}7]$ містить у собі одне ціле число $m_0 = 137$. Це і є найімовірніша кількість дерев, що приймуться.

Приклад 1.26. *Скільки треба зробити незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність здійснення події A $p = 0{,}3$, щоб найімовірніша кількість появ події A була $m_0 = 8$.*

Розв'язання. Тут $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$, тобто $0{,}3n - 0{,}7 \leqslant 8 \leqslant 0{,}3n + 0{,}3$.

Дістанемо систему:

$$\begin{cases} 0{,}3n - 0{,}7 \leqslant 8, \\ 0{,}3n + 0{,}3 \geqslant 8. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $25\frac{2}{3} \leqslant n \leqslant 29$. Але n — ціле число, тому $n = 26, 27, 28, 29$ (задача має чотири розв'язки).

Використовувати формулу Бернуллі (1.3.3) при великих значеннях n незручно в наслідок збільшення об'єму обчислень і операцій з великими числами. У цьому випадку застосовують формули, які визначаються теоремою Пуассона і локальною теоремою Лапласа.

Теорема 1.6. *(Теорема Пуассона).*

Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні стала та невелика, а кількість незалежних випробувань n достатньо велика, то ймовірність того, що подія A відбудеться m раз, приблизно дорівнює

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \tag{1.3.4}$$

де $\lambda = np$.

Приклад 1.27. *Підприємство виготовило та відправило замовнику $100\,000$ пляшок пива. Ймовірність того, що пляшка буде розбитою, дорівнює $0{,}0001$. Знайти ймовірність того, що у відправленій партії буде: а) три, б) п'ять розбитих пляшок.*

Розв'язання. Дано: $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $m = 3$ ($m = 5$).

Знаходимо $\lambda = np = 10$.

Скористаємось формулою Пуассона:

а)

$$P_{100\,000}(3) = 10^3\frac{e^{-10}}{3!} = 10^3\frac{0{,}000045}{6} = 0{,}0075,$$

б)

$$P_{100\,000}(5) = 10^5\frac{e^{-10}}{5!} = 10^5\frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Теорема 1.7. *(Локальна теорема Лапласа).*

Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні стала та відмінна від 0 і 1, а кількість незалежних випробувань n достатньо велика, то ймовірність того, що подія A відбудеться m раз, приблизно дорівнює

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.3.5}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{1.3.6}$$

— функція Гаусса та

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.3.7}$$

Точність формули (1.3.5) зростає із збільшенням кількості незалежних випробувань n. Існують таблиці з обчисленними значеннями функції Гаусса $\varphi(x)$, за якими можна з достатньо високою точністю знайти практично будь-яке значення цієї функції (див. Додаток А). Оскільки функція $\varphi(x)$ парна, то в таблицях наведені її значення тільки для додатних значень x.

Приклад 1.28. *Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що серед 100 виготовлених виробів буде рівно 60 без браку.*

Розв'язання. Ймовірність появи події A в одному випробуванні (виріб без браку) $p = 0{,}7$ і тоді $q = 0{,}3$. У нашому випадку $n = 100$, $m = 60$. Обчислюємо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 4{,}58,$$

$$|x| = \frac{|m - np|}{\sqrt{npq}} = \frac{10}{4{,}58} = 2{,}18.$$

Тепер для знайденого аргументу x знаходимо у таблиці відповідне значення функції Гаусса $\varphi(x)$. Воно дорівнює 0,0371. Підстановка значень у формулу (1.3.5) *дає шукану ймовірність:*

$$P_{100}(60) = \frac{0{,}0371}{4{,}58} = 0{,}008.$$

Знову припустимо, що в кожному з n випробувань подія A з'являється з однаковою ймовірністю p. В прикладних застосуваннях теорій ймовірностей часто визначається ймовірність події A в n випробуваннях, коли m змінюється у заданому інтервалі значень: $a \leqslant m \leqslant b$. Формула для наближеного обчислення цієї ймовірності визначається *інтегральною теоремою Лапласа*.

Теорема 1.8. *(Інтегральна теорема Лапласа).*

Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні стала та відмінні від 0 і 1, то ймовірність того, що кількість m настання події A в n незалежних випробуваннях міститься у межах від a до b включно, при достатньо великій кількості n приблизно дорівнює

$$P_n(a \leqslant m \leqslant b) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.3.8}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \tag{1.3.9}$$

— функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.3.10}$$

Відмітимо деякі властивості функції Лапласа.

Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Функція $\Phi(x)$ монотонно зростає.

Для всіх значень $x \geqslant 5$ можна вважати, що $\Phi(x) = 0{,}5$.

Табличні значення функції Лапласа наведені у Додатку Б.

Приклад 1.29. *Нехай ймовірність того, що покупцю необхідне жіноче взуття 35-го розміру, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що серед 2 000 покупців таких буде не менше 575.*

Розв'язання. Висловлювання «буде не менше 575 покупців» означає, що їх буде від 575 до 2 000 включно. Отже, необхідно застосувати формулу (1.3.8). *Спочатку за формулами* (1.3.10) *обчислюємо значення x_1 і x_2 при $n = 2\,000$, $a = 575$, $b = 2\,000$, $p = 0{,}3$ та $q = 0{,}7$:*

$$x_1 = \frac{575 - 2\,000 \cdot 0{,}3}{\sqrt{2\,000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} \approx -1{,}22, \qquad x_2 = \frac{2\,000 - 2\,000 \cdot 0{,}3}{\sqrt{2\,000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} \approx 68.$$

Тоді

$$P_{2\,000}(575 \leqslant m \leqslant 2\,000) \approx \Phi(68) - \Phi(-1{,}22) \approx 0{,}5 + 0{,}38877 \approx 0{,}88877.$$

Приклад 1.30. *У страховій компанії 10 тис. клієнтів, які застрахували свою нерухомість. Страховий внесок складає 2 тис. грн, ймовірність нещасного випадку $p = 0{,}005$, страхова виплата клієнту при нещасному випадку складає 200 тис. грн. Визначити розмір прибутку страхової компанії з ймовірністю P: а) 0,9; б) 0,995.*

Розв'язання. Прибуток компанії залежить від кількості страхових виплат m при нещасних випадках. Будемо вважати, що величина його дорівнює різниці між сумами страхових внесків та страхових виплат:

$$R = 10\,000 \cdot 2\,000 - 200\,000m = (20 - 0{,}2m)\,\text{млн грн.}$$

Тепер задача полягає у знаходженні такого числа N, що ймовірність нещасного випадку $P_{10\,000}(m \geqslant N)$ була не більше заданої величини $1 - P$, або, що теж саме, щоб виконувалась умова

$$P_{10\,000}(N \leqslant m \leqslant 10\,000) \leqslant 1 - P.$$

Тоді з ймовірністю P прибуток компанії буде складати $R = (20 - 0{,}2m)$ млн грн. Попередні обчислення значень аргументу функції $\Phi(x)$ при $n = 10\,000$, $a = N$ та $b = 10\,000$ дають:

$$x_1 = \frac{N - 10\,000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = \frac{N - 50}{7{,}05},$$

$$x_2 = \frac{10\,000 - 10\,000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx 1\,411{,}35.$$

Тоді

$$P_{10\,000}(N \leqslant m \leqslant 10\,000) = \Phi(1411{,}34) - \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right).$$

Отже, наша умова виглядатиме

$$0{,}5 - \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \leqslant 1 - P.$$

а) У цьому випадку маємо нерівність

$$0{,}5 - \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \leqslant 0{,}1 \quad \textit{або} \quad \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \geqslant 0{,}4.$$

З таблиці для функції Лапласа знаходимо, що при значенні функції $\Phi(x) = 0{,}4$ *аргумент* x *дорівнює* $1{,}28$*. Оскільки функція* $\Phi(x)$ *монотонно зростає, то нерівність між її значеннями переходить у нерівність того ж змісту й для відповідних аргументів:*

$$\frac{N-50}{7{,}05} \geqslant 1{,}28.$$

Звідки отримуємо, що $N \geqslant 50 + 9{,}02$*, або* $N \geqslant 60$*. У цьому випадку з ймовірністю 0,9 страховій компанії гарантований прибуток*

$$R = 20 - 0{,}2 \cdot 60 = 8\,\textit{млн грн.}$$

б) У цьому випадку після проведення аналогічних обчислень, отримуємо

$$\Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \geqslant 0{,}495.$$

З таблиці знаходимо, що при значенні функції $\Phi(x) = 0{,}495$ *аргумент* x *дорівнює* $2{,}57$*. Тоді*

$$\frac{N-50}{7{,}05} \geqslant 2{,}57.$$

З останньої нерівності отримуємо $N \geqslant 69$ *та у цьому випадку з ймовірністю 0,095 компанії гарантований прибуток*

$$R = 20 - 0{,}2 \cdot 69 = 6{,}2\,\textit{млн грн.}$$

З розв'язку задачі видно, що збільшення ризику страхування може привести до зростання прибутку компанії. Це є реалізація відомого принципу у підприємницькій діяльності: менш ризиковані, але більш надійні фінансові операції не приносять надприбутків.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу повної ймовірності випадкової події А.
2. Коли використовується формула Байєса?
3. Запишіть формулу Бернуллі. В яких випадках застосовується формула Бернуллі?
4. Як знайти найімовірніше число появи події при повторних випробуваннях?
5. Запишіть формулу Пуассона.В яких випадках застосовується формула Пуассона?

6. Запишіть локальну формулу Лапласа. В яких випадках застосовується формула Лапласа?
7. Запишіть інтегральну формулу Лапласа. В яких випадках застосовується інтегральна формула Лапласа?

1.4. Дискретні випадкові величини

У людській діяльності трапляються величини, що набувають різних значень залежно від обставин, які не можна наперед урахувати. При цьому подія, яка полягає в тому, що величина набуває того чи іншого значення, випадкова. Такі величини називають *випадковими величинами*.

Приклад 1.31. *Студенти посадили десять дерев. Кількість дерев, що приймуться,— випадкова величина. Вона може набувати одного з одинадцяти значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.*

Якщо множина значень, яких набуває випадкова величина,— скінченна множина або послідовність, то випадкову величину називають *дискретною*.

Розглянутий вище приклад випадкової величини— це приклад дискретної випадкової величини.

Випадкову величину називають *неперервною*, якщо вона може приймати значення, які як завгодно мало відрізняються одне від одного. Прикладом неперервної випадкової величини є час заправки автомобіля на автозаправній станції.

Зазвичай, випадкові величини позначають великими літерами: X, Y, Z, а їх можливі значення— такими самими малими літерами з індексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$; $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Щоб задати випадкову величину, не досить перелічити її можливі значення. Справа в тому, що дві випадкові величини, які мають однакову множину можливих значень, можуть набувати цих значень з різними ймовірностями. Такі випадкові величини слід вважати різними. Отже, щоб задати випадкову величину, треба перелічити всі її можливі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_n$, з якими випадкова величина набуває цих значень.

Позначимо $P(x)$ ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x. Областю визначення функції $P(x)$ є множина всіх значень, яких може набувати випадкова величина X. Значення цієї функції для даного значення аргументу— це ймовірність. Задати функцію— це означає задати її область визначення, а також відповідність, за якою кожному значенню аргументу з області визначення відповідатиме певне значення функції. Таким чином, задання функції $P(x)$ повністю визначає випадкову величину X. Функцію $P(x)$ називають *законом розподілу випадкової величини* X.

Закон розподілу, як і взагалі функція, може бути заданий аналітичним виразом, графіком, таблицею.

Приклад 1.32. *Нехай* X*— число, що випадає при одну киданні грального кубика. Це випадкова величина, закон розподілу якої*

$$P(x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Приклад 1.33. *Нехай* X *— кількість появ події* A *при* n *незалежних випробуваннях у задачі про незалежні випробування. Це випадкова величина, закон розподілу якої визначається з формули* (1.3.3)

$$P(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4.1}$$

Закон розподілу (1.4.1) *називають біномним.*

Приклад 1.34. *Нехай* X*— кількість появ числа 3 при двох киданнях грального кубика. Записати закон розподілу випадкової величини* X.

Розв'язання. Ця випадкова величина має закон розподілу, який можна зобразити у вигляді таблиці:

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Справді, число 3 при двох киданнях грального кубика може не випасти жодного разу, може випасти один раз або два рази. Отже, випадкова величина набуває значень 0, 1, 2. Визначимо їх ймовірності. Ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде *трійка, дорівнює* $\frac{1}{6}$, *а ймовірність того, що трійка не випаде, дорівнює* $\frac{5}{6}$. *Отже, за теоремами про ймовірність добутку і суми подій матимемо:*

$$P(0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36};$$

$$P(1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36};$$

$$P(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Сума всіх можливих значень функції $P(x)$ дорівнює одиниці:

$$\sum_{x} P(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

У наведених прикладах в цьому можна пересвідчитись безпосереднім підрахунком. В загальному випадку ця рівність стане очевидною, коли зауважити, що сума $\sum\limits_{x} P(x)$ є імовірністю вірогідної події, бо випадкова величина X набуде якогось із своїх значень обов'язково.

Для кількісного оцінювання закону розподілу випадкової величини (дискретної або неперервної) задають *функцію розподілу випадкової величини*, котру визначають як ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого від певного фіксованого числа x і позначають $F(x) = P(X < x)$.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$, можна обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини X у деякий інтервал $[a; b)$:

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a). \tag{1.4.2}$$

Якщо заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X, то її значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ розміщені у порядку зростання. Отже, функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини є розривна східчаста функція, стрибки якої відбуваються у точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини та дорівнюють ймовірностям цих значень.

Приклад 1.35. *Закон розподілу випадкової величини X заданий у вигляді таблиці:*

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(x)$	p_1	p_2	p_3	p_4

Побудувати функцію розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Випадкова величина X не приймає значень менших x_1. Отже, якщо $x \leqslant x_1$, то подія $X < x_1$ неможлива, а ймовірність її дорівнює нулю. Тому дорівнює нулю функція розподілу випадкової величини X для всіх значень $x \leqslant x_1$. Для всіх x, які задовольняють подвійній нерівності $x_1 < x \leqslant x_2$, функція розподілу $F(x)$ дорівнює p_1. Дійсно, випадкова величина приймає тільки одне значення, яке менше x_2: значення x_1 з ймовірністю p_1.

Для всіх x, які задовольняють подвійній нерівності $x_2 < x \leqslant x_3$, функція розподілу $F(x)$ дорівнює $p_1 + p_2$. Нехай $x = x_3$. Тоді $F(x_3)$ виражає ймовірність появи події $X < x_3$. Це можливо у двох випадках: або випадкова величина X прийме значення x_1 (з ймовірністю p_1), або x_2 (з ймовірністю p_2). За теоремою додавання ймовірностей ми і отримуємо вказане значення функції $F(x)$ при $x = x_3$.

Аналогічні міркування дозволяють знайти функцію розподілу. Запишемо її у табличній формі.

x	$x \leqslant x_1$	$x_1 < x \leqslant x_2$	$x_2 < x \leqslant x_3$	$x_3 < x \leqslant x_4$	$x > x_4$
$F(x)$	0	p_1	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2 + p_3$	1

Графік цієї функції наведений на рис. 1.2.

Нехай маємо дві випадкові величини X і Y, закони розподілу яких відповідно $P_X(x)$ і $P_Y(y)$.

Позначимо $P(x, y)$ ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x і випадкова величина Y набуде значення y. $P(x, y)$ — ймовірність добутку подій. Функцію $P(x, y)$ називають *двомірним законом розподілу* випадкових величин X і Y.

Розглянемо тепер частку $\dfrac{P(x,y)}{P_X(x)}$. Цю частку називають *умовним законом розподілу* випадкової величини Y і позначають $P_Y(y/x)$. Отже,

$$P_Y(y/x) = \frac{P(x,y)}{P_X(x)}. \tag{1.4.3}$$

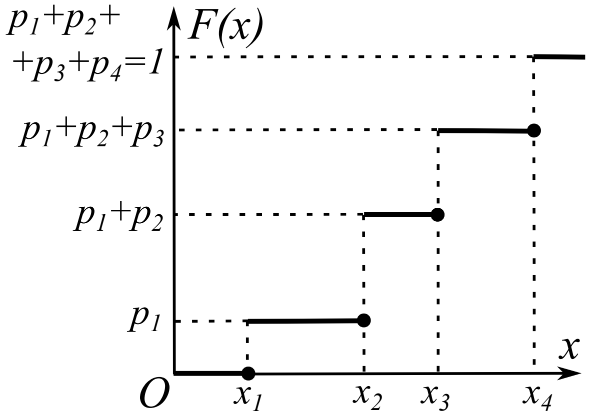

Рис. 1.2. Функція розподілу випадкової величини X

Зрозуміло, що $P_Y(y/x)$ — це умовна ймовірність того, що випадкова величина Y набуде значення y при умові, що випадкова величина X набула значення x.

Аналогічно умовний закон розподілу випадкової величини X, тобто умовна ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x, коли випадкова величина Y вже набула значення y:

$$P_X(x/y) = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)}\,. \tag{1.4.4}$$

Очевидно, що має місце рівність:

$$P_X(x) \cdot P_Y(y/x) = P_Y(y) \cdot P_X(x/y). \tag{1.4.5}$$

Випадкові величини X і Y називають *незалежними*, коли їх умовні закони розподілу збігаються з безумовними.

Отже, незалежність двох випадкових величин X і Y можна записати у вигляді таких рівностей:

$$\begin{aligned} P_X(x/y) &= P_X(x), \\ P_Y(y/x) &= P_Y(y). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Щоб встановити незалежність випадкових величин X і Y, досить перевірити, чи виконується хоча б одна з рівностей (1.4.6).

Для незалежних випадкових величин справедлива рівність

$$P(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y). \tag{1.4.7}$$

Легко довести, що для двох довільних випадкових величин справедливі такі рівності:

$$\begin{aligned}\sum_x P_X(x/y) = 1,\\ \sum_y P_Y(y/x) = 1,\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned}\sum_x P(x,y) = P_Y(y),\\ \sum_y P(x,y) = P_X(x).\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Добутком сталої величини C та *дискретної випадкової величини* X називають дискретну випадкову величину CX, можливі значення якої рівні добутку сталої C та можливих значень X, а ймовірності цих значень дорівнюють імовірностям відповідних значень X.

Сумою дискретних випадкових величин X і Y називають випадкову величину $X + Y$, можливі значення якої дорівнюють сумам кожного можливого значення X та кожного можливого значення Y, а імовірності цих значень дорівнюють $P(x, y)$. Якщо деякі суми $x_i + y_j$ рівні між собою, то їх імовірності додаються.

Добутком незалежних дискретних випадкових величин X і Y називають випадкову величину XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення X та кожного можливого значення Y, а ймовірності цих значень дорівнюють $P_X(x) \cdot P_Y(y)$. Якщо деякі добутки $x_i y_j$ рівні між собою, то їх імовірності додаються.

У деяких випадках для представлення випадкової величини доцільно використовувати не таблицю або функцію розподілу, а так званні числові характеристики її розподілу, зокрема математичне сподівання.

Математичним сподіванням (або середнім значенням) випадкової величини X, що має закон розподілу $P(x)$, називають число

$$M(X) = \sum_x xP(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \tag{1.4.10}$$

Щоб знайти математичне сподівання випадкової величини X, потрібно кожне її можливе значення помножити на відповідну ймовірність і отримані добутки додати.

Приклад 1.36. *Нехай випадкова величина X може набувати значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і всі її значення однаково ймовірні. Знайти математичне сподівання випадкової величини X.*

Розв'язання. Ймовірність кожного з значень випадкової величини X дорівнює $p = \frac{1}{n}$. Математичне сподівання цієї випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

У наведеному вище прикладі математичним сподіванням випадкової величини є середнє арифметичне всіх її можливих значень.

Зазвичай, в загальному випадку математичне сподівання випадкової величини не буде середнім арифметичним всіх її можливих значень. Проте, в якомусь розумінні, воно буде її середнім значенням, так як кожне можливе значення x_i входить у формулу (1.4.10) з відповідною «вагою», якою і є ймовірність p_i.

Відхиленням випадкової величини X називають різницю $X - M(X)$.

Розглянемо властивості математичного сподівання.

Теорема 1.9. *Математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій:*

$$M(C) = C.$$

Теорема 1.10. *Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Теорема 1.11. *Математичне сподівання суми двох випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх математичних сподівань:*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Наслідок 1. Для двох випадкових величин X і Y

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Наслідок 2. Математичне сподівання суми довільної скінченної кількості випадкових величин:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots M(X_n).$$

Теорема 1.12. *Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань:*

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Теорема 1.13. *Математичне сподівання відхилення випадкової величини X дорівнює нулю:*

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Приклад 1.37. *Щоденні витрати в магазині, який торгує скутерами, складають в середньому 10 тис. грн, а кількість продажів скутерів протягом дня має закон розподілу:*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку магазину, якщо ціна скутера складає 32 тис. грн.

Розв'язання. Кількість проданих протягом дня скутерів є дискретною випадковою величиною X. Щоденний прибуток розраховується за формулою

$$R = (32X - 10)\,\textit{тис. грн.}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}05+ \\ + 7 \cdot 0{,}05 + 8 \cdot 0{,}025 + 9 \cdot 0{,}025 = 2{,}675.$$

Шукане математичне сподівання (в тис. грн):

$$M(R) = M(32X - 10) = 32M(X) - 10 = 32 \cdot 2{,}675 - 10 = 75{,}6.$$

Розглянемо ще одну числову характеристику випадкової величини — *дисперсію*.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини.

Позначають дисперсію $D(X)$. Отже,

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i =$$
$$= \big(x_1 - M(X)\big)^2 p_1 + \big(x_2 - M(X)\big)^2 p_2 + \ldots + \big(x_n - M(X)\big)^2 p_n. \quad (1.4.11)$$

Відповідно до означення математичного сподівання, щоб обчислити дисперсію випадкової величини X за формулою (1.4.11), потрібно знайти суму добутків можливих значень квадрата відхилення на їх ймовірності. Звідси випливає, якщо великі за абсолютною величиною значення відхилення беруться з великими ймовірностями, то дисперсія $D(X)$ матиме велике значення, а якщо великі за абсолютною величиною значення відхилення малоймовірні, то дисперсія $D(X)$ матиме порівняно невелике значення. Отже, дисперсія $D(X)$ характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини X.

Середнім квадратичним відхиленням σ_x випадкової величини X називають арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (1.4.12)$$

Розглянемо властивості дисперсії.

Теорема 1.14. *Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю:*

$$D(C) = 0.$$

Теорема 1.15. *Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрату:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Теорема 1.16. *Дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини:*

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (1.4.13)$$

Для обчислення дисперсії деякої випадкової величини часто зручніше користуватись формулою (1.4.13), ніж означенням дисперсії.

Теорема 1.17. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій:*

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Наслідок 1. Якщо X і Y — незалежні випадкові величини, то

$$D(X-Y) = D(X) - D(Y).$$

Наслідок 2. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — попарно незалежні випадкові величини, то

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots D(X_n).$$

Приклад 1.38. *Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення щоденної продажі скутерів за даними прикладу 1.37.*

Розв'язання. Запишемо закон розподілу випадкової величини X^2:

x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$P(x^2)$	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X^2:

$$\begin{aligned} M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n = \\ = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}1 + \\ + 36 \cdot 0{,}05 + 49 \cdot 0{,}05 + 64 \cdot 0{,}025 + 81 \cdot 0{,}025 = 13{,}475. \end{aligned}$$

Математичне сподівання $M(X) = 2{,}675$. Отже, за формулою (1.4.13), *отримуємо шукану величину дисперсії:*

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 13{,}475 - 2{,}675^2 = 6{,}319.$$

За формулою (1.4.12) *знайдемо середнє квадратичне відхилення:*

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6{,}319} = 2{,}514.$$

Розглянемо теореми про математичні сподівання і дисперсії дискретних випадкових величин, які розподілені за біноміальним законом (1.4.1) і за законом Пуассона (1.3.4).

Теорема 1.18. *Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X, яка розподілена за біномним законом, тобто кількості настання події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких воно може відбутись з сталою ймовірністю p дорівнюють*

$$M(X) = np, \qquad D(X) = np(1-p) = npq. \tag{1.4.14}$$

Теорема 1.19. *Математичне сподівання і дисперсія відносної частоти події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких воно може відбутись з сталою ймовірністю p дорівнюють*

$$M\left(\frac{X}{n}\right)= p, \qquad D\left(\frac{X}{n}\right)= \frac{pq}{n}. \tag{1.4.15}$$

Теорема 1.20. *Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X, яка може приймати тільки цілі невід'ємні значення $m = 0, 1, 2, \ldots$ і розподілена за законом Пуассона, збігаються та дорівнюють параметру λ, який визначає цей закон:*

$$M(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda. \tag{1.4.16}$$

Приклад 1.39. *Банк видав кредити n різним позичальникам у розмірі S кожному під процентну ставку r. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення прибутку банку, а також умову на процентну ставку, якщо ймовірність повернення кредиту позичальником дорівнює p.*

Провести розрахунки при $n = 1\,000$, $p = 0{,}8$, $S = 100$ тис. грн та $r = 30\,\%$.

Розв'язання. Оскільки позичальники між собою не зв'язані, то можна припустити, що ми маємо n незалежних випробувань. Ймовірність втрати кредиту для банку у кожному випробуванні дорівнює $q = 1 - p$. Нехай X — кількість позичальників, які повернули позику з процентною ставкою, тоді прибуток банку визначається формулою

$$R = \left(1 + \frac{r}{100}\right)SX - nS,$$

де X є випадковою величиною з біномним законом розподілу. Для визначення математичного сподівання і дисперсії випадкової величини X скористаємось формулами (1.4.14).

Математичне сподівання очікуваного прибутку:

$$M(R) = M\left(\left(1+\frac{r}{100}\right)SX - nS\right) = \left(1+\frac{r}{100}\right)SM(X) - nS =$$

$$= \left(1+\frac{r}{100}\right)Snp - Sn = Sn\left(\frac{rp}{100} - q\right).$$

Оскільки видача кредиту має сенс лише при додатному математичному сподіванні прибутку, то з умови $M(R) > 0$ знайдемо умову на процентну ставку:

$$r > \frac{100q}{p}, \qquad \textit{або} \qquad r > \frac{100(1-p)}{p}.$$

Дисперсія прибутку:

$$D(R) = D\left(\left(1+\frac{r}{100}\right)SX - nS\right) = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 S^2npq.$$

Обчислимо шукані характеристики для заданих значень. Процентна ставка задовольняє умові додатного значення математичного сподівання прибутку:

$$30 > \frac{100(1-0{,}8)}{0{,}8}.$$

Математичне сподівання прибутку:

$$M(R) = 100 \cdot 1\,000\left(\frac{30 \cdot 0{,}8}{100} - 0{,}2\right) = 4\,000\,\textit{тис. грн.}$$

Середнє квадратичне відхилення прибутку:

$$\sigma_R = \sqrt{D(R)} = \left(1+\frac{r}{100}\right)S\sqrt{npq} =$$

$$= \left(1+\frac{30}{100}\right)\cdot 100\sqrt{1\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 1644{,}38\,\textit{тис. грн.}$$

Крім математичного сподівання і дисперсії для оцінки випадкової величини використовують й інші числові характеристики. Всі ці числові характеристики мають загальну назву — моменти випадкової величини. Розрізняють початкові і центральні моменти.

Початковим моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{1.4.17}$$

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\big(X - M(X)\big)^k. \tag{1.4.18}$$

Початковий момент першого порядку є математичним сподіванням самої випадкової величини X:

$$\nu_1 = M(X).$$

Центральний момент першого порядку є математичним сподіванням відхилення випадкової величини X, яке дорівнює нулю:

$$\mu_1 = M\big(X - M(X)\big) = 0.$$

Центральний момент другого порядку є дисперсією випадкової величини X:

$$\mu_2 = M\big(X - M(X)\big)^2 = D(X).$$

Для дискретних випадкових величин мають місце формули:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i\,, \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - M(X)\big)^k p_i\,. \tag{1.4.19}$$

Питання для самоконтролю

1. Яку випадкову величину називають дискретною?
2. Назвіть способи задання дискретної випадкової величини.
3. Що називають функцією розподілу випадкової величини?
4. Які математичні операції виконують над дискретними випадковими величинами?
5. Сформулюйте означення математичного сподівання дискретної випадкової величини та його властивості.
6. Запишіть формули для обчислення дисперсії та середнього квадратичного відхилення.
7. Сформулюйте властивості дисперсії.
8. Що називають початковим та центральним моментами випадкової величини?

1.5. Неперервні випадкові величини

Наведемо, ще одне визначення неперервної випадкової величини.

Випадкову величину X називають *неперервною*, якщо її функція розподілу неперервна у будь-якій точці і диференційовна скрізь, крім, можливо, окремих точок.

На рис. 1.3 показана функція розподілу неперервної випадкової величини X, яка диференційовна у всіх точках, крім трьох точок злому (x_1, x_2, x_3).

Неперервна випадкова величина на відміну від дискретної не може характеризуватись ймовірністю її конкретного значення, так як таких значень нескінченна множина. Отже, має місце теорема.

Теорема 1.21. *Ймовірність будь-якого окремо взятого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю*

$$P(X = x_1) = 0.$$

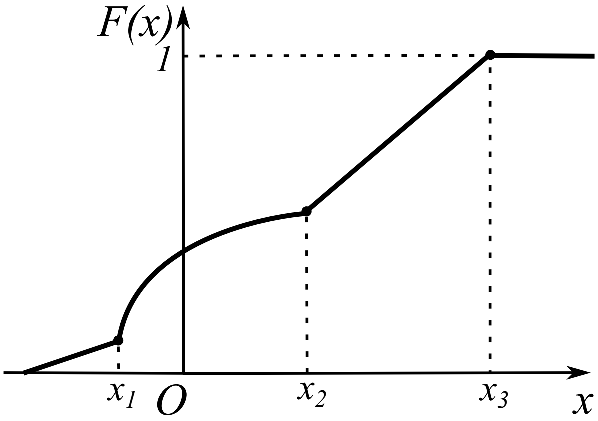

Рис. 1.3. Функція розподілу неперервної випадкової величини X

У попередніх параграфах ми розглядали такі випробування, в яких нульову ймовірність мали лише неможливі події. З теореми 1.21 випливає, що нульову ймовірність можуть мати і можливі події. Подія яка полягає в тому, що неперервна випадкова величина X прийняла конкретне значення x_1, є можливою. Значення будь-якої неперервної випадкової величини може бути визначеним лише з певною точністю, тобто можна розглядати лише події виду $a \leqslant X \leqslant b$, які мають не нульову ймовірність та являють собою суму подій, які полягають у тому, що неперервна випадкова величина приймає будь-яке конкретне значення на відрізку $[a, b]$ та які мають нульову ймовірність. Це можна порівняти з тим, що відрізок, який має певну довжину, складається з точок, які мають нульову довжину.

Наслідок. Якщо X — неперервна випадкова величина, то ймовірність попадання випадкової величину у інтервал (x_1, x_2) не залежить від того, є цей інтервал відкритим або закритим, тобто

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(x_1 < X \leqslant x_2) = P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2).$$

Неперервна випадкова величина не задається законом розподілу як дискретна випадкова величина. Для характеристики неперервної випадкової величини використовується функція розподілу ймовірностей, яка аналогічна функції розподілу дискретної випадкової величини, тобто являє собою ймовірність події $X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

На відміну від дискретної випадкової величини у даному випадку X пробігає всю неперервну множину значень, а сама функція $F(x)$ зростає монотонно.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина міститься між x_1 і x_2, дорівнює різниці відповідних значень функції розподілу:

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Крім функції розподілу для неперервних випадкових величин використовують поняття *щільності розподілу ймовірності* або *щільності ймовірності*.

Щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають похідну від її функції розподілу ймовірностей

$$f(x) = F'(x). \tag{1.5.1}$$

Наведемо властивості щільності розподілу неперервної випадкової величини.

1. Щільність ймовірності невід'ємна функція:

$$f(x) \geqslant 0.$$

2. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини в інтервал $[a, b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності у межах від a до b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Функція розподілу неперервної випадкової величини може бути виражена через щільність ймовірності:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Невласний інтеграл у нескінченних границях від щільності ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Наведемо визначення числових характеристик неперервних випадкових величин.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають значення інтегралу

$$M(X) = M_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.2}$$

Дисперсією неперервної випадкової величини X, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають значення інтегралу

$$D(X) = D_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.3}$$

Приклад 1.40. *Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x) = 2x$ в інтервалі $(0,1)$, поза цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти її математичне сподівання і дисперсію.*

Розв'язання. Математичне сподівання:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x\cdot 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію знайдемо за формулою $D_x = M(X^2) - (M(X))^2$.

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Звідки значення дисперсії

$$D_x = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Основні властивості математичного сподівання і дисперсії для неперервних випадкових величин є такими ж, як і для дискретних випадкових величин.

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини X знаходиться як корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Модою $Mo(X)$ розподілу неперервної випадкової величини X із щільністю розподілу $f(x)$ називають кожне значення x, за якого $f(x)$ має максимум. Розподіли, які мають одну моду, називають *унімодальними*.

Медіаною $Me(X)$ розподілу неперервної випадкової величини X називають можливе значення x, за якого пряма $x = Me(X)$ ділить криволінійну трапецію, обмежену кривою розподілу та віссю Ox, на частини рівної площі, тобто для $Me(X)$ має місце рівність

$$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 1.41. *Знайти моду і медіану неперервної випадкової величини з щільністю розподілу* $f(x) = 3x^2$ *при* $X \in [0, 1]$.

Розв'язання. На інтервалі $[0, 1]$ *щільність розподілу монотонно зростає та досягає свого максимального значення* $f(1) = 3$. *Отже мода дорівнює* $Mo(X) = 1$.

Позначимо медіану $Me(X) = d$. *З означення медіани отримуємо рівняння:*

$$P(X < Me(X)) = \int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5.$$

Розіб'ємо інтеграл на два:

$$\int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{d} 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^d = d^3.$$

З рівняння $d^3 = 0{,}5$ *знаходимо значення медіани*

$$Me(X) = d = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}794.$$

Початкові і центральні моменти для неперервної випадкової величини X знаходяться за формулами:

$$\nu_k = M(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.5.4}$$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.5}$$

Розглянемо основні закони розподілу неперервних випадкових величин.

Розподіл ймовірностей називають *рівномірним*, якщо на інтервалі $[a, b]$ можливих значень неперервної випадкової величини щільність розподілу є сталою та задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a < x \leqslant b; \\ 0, & \text{якщо} \quad x > b. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Приклад 1.42. *Радіус кола, який виміряний наближено, може мати значення на інтервалі* (a, b)*. У припущені, що радіус є неперервною випадковою величиною* X*, яка розподілена рівномірно у цьому інтервалі, знайти математичне сподівання і дисперсію.*

Розв'язання. За формулою (1.5.2) *знайдемо математичне сподівання:*

$$M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсію знайдемо за формулою $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$$M(X^2) = \int\limits_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Звідки значення дисперсії

$$D(X) = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}\,.$$

Експоненціальним (показниковим) розподілом неперервної випадкової величини називають розподіл, що задається наступним виразом для щільності ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.5.7}$$

Знайдемо функцію розподілу експоненціального закону:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}x + \lambda\int\limits_0^x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

Математичне сподівання випадкової величини, яка має експоненціальний розподіл, отримуємо на основі загальної формули (1.5.2) з урахуванням того, що $f(x) = 0$ при $x < 0$:

$$M_x = \int\limits_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$M_x = \frac{1}{\lambda}\,. \tag{1.5.9}$$

Дисперсію для експоненціального розподілу отримуємо за формулою

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - M_x^2 = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x - M_x^2.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$D_x = \frac{1}{\lambda^2}\,. \qquad (1.5.10)$$

Приклад 1.43. *Неперервна випадкова величина X розподілена за експоненціальним законом*

$$f(x) = 2e^{-2x} \quad \textit{при} \quad x \geqslant 0; \qquad f(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x < 0.$$

Знайти ймовірність того, що при випробуванні X попаде у інтервал $(0{,}3; 1)$.

Розв'язання. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини у інтервал (a, b):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Для експоненціального розподілу $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$. Тоді

$$P(a < X < b) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

За умовою $\lambda = 2$. Отже,

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0{,}3} - e^{-2\cdot 1} = e^{-0{,}6} - e^{-2} \approx 0{,}414.$$

Найважливішими є неперервні випадкові величини, які розподілені за *нормальним законом* (або *законом Гаусса*). Щільність ймовірності випадкових величин такого типу визначається рівністю:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \qquad (1.5.11)$$

де σ_x і M_x — середнє квадратичне відхилення і математичне сподівання випадкової величини.

В прикладних задачах математичної статистики доводиться розглядати емпіричні розподіли випадкових величин, які мають певні відмінності від нормального. Для оцінки цих відмінностей введені спеціальні характеристики. До них відносяться, зокрема, асиметрія та ексцес.

Асиметрією розподілу випадкової величини називають відношення центрального моменту третього порядку до кубу середнього квадратичного відхилення:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}\,. \tag{1.5.12}$$

Графіки функцій розподілу з різними значеннями асиметрії представлені на рис. 1.4 та рис. 1.5.

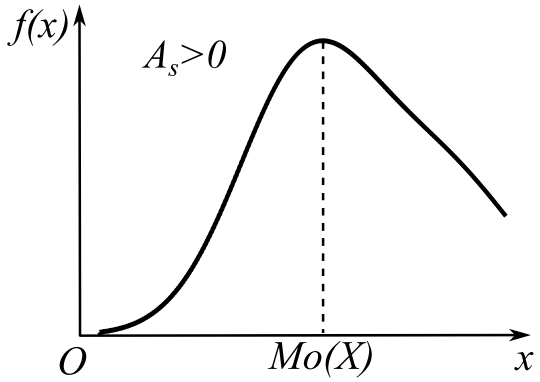

Рис. 1.4. Функція розподілу з додатною асиметрією

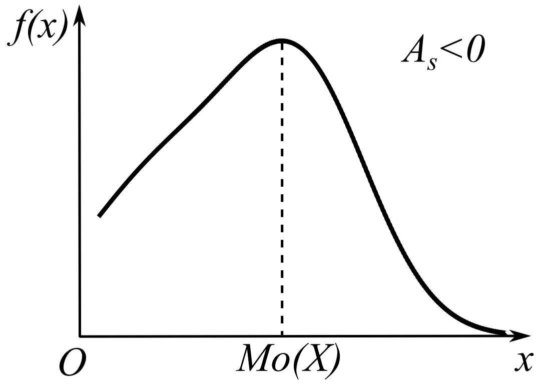

Рис. 1.5. Функція розподілу з від’ємною асиметрією

Ексцесом розподілу випадкової величини називають число, яке визначається виразом

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \tag{1.5.13}$$

Для нормального розподілу $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3$, тому його ексцес дорівнює нулю.

Графіки функцій щільності ймовірності з додатним і від’ємним ексцесом представлені на рис. 1.6 та рис. 1.7, на яких для порівняння зображені також криві нормального розподілу (штрихові лінії).

У багатьох задачах необхідно знайти ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал. Ця ймовірність може бути виражена у вигляді різниці значень функції розподілу в граничних точках цього інтервалу:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

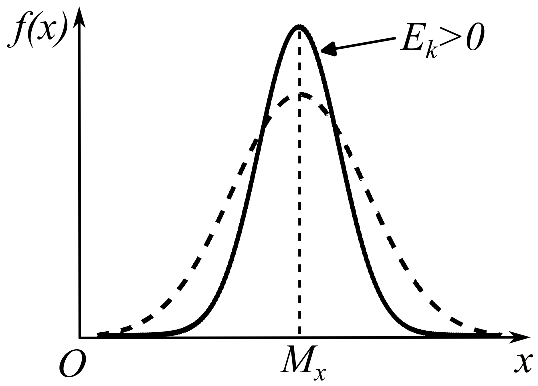

Рис. 1.6. Функція розподілу з додатним ексцесом

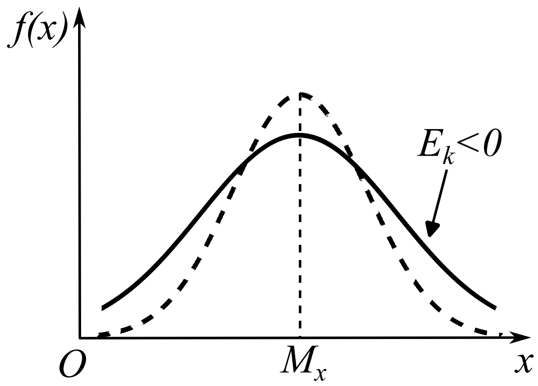

Рис. 1.7. Функція розподілу з від’ємним ексцесом

У випадку нормального розподілу

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Зробимо заміну змінної

$$t = \frac{x - M_x}{\sigma_x}, \qquad x = t\sigma_x + M_x, \qquad \mathrm{d}x = \sigma_x\,\mathrm{d}t.$$

Тоді

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

де $\quad z_1 = \dfrac{a - M_x}{\sigma_x}, \qquad z_2 = \dfrac{b - M_x}{\sigma_x}.$

Розіб’ємо цей інтеграл на два:

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{z_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right).$$

Інтеграли від функції $e^{-\frac{t^2}{2}}$ не можна виразити через елементарні функції, тому визначають їх чисельні значення, які розміщують у спеціальних таблицях (див. Додаток Б).

Інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{1.5.14}$$

називають *нормованою функцією Лапласа* або просто *функцією Лапласа.*

Шукана ймовірність через функцію Лапласа записується у вигляді

$$P(a < X < b) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi\left(\frac{b - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - M_x}{\sigma_x}\right). \tag{1.5.15}$$

Функція Лапласа є непарною функцією, для неї

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Приклад 1.44. *Випадкова величина X є нормально розподіленою. Її математичне сподівання дорівнює 10, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення з інтервалу* $(9, 12)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (1.5.15)*:*

$$P(9 < X < 12) = \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9 - 10}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5).$$

У таблиці для значень функції Лапласа знаходимо

$$\Phi(1) = 0{,}3413, \qquad \Phi(0{,}5) = 0{,}1915.$$

Тоді $P(9 < X < 12) = 0{,}5328.$

Приклад 1.45. *Випадкова величина X є нормально розподіленою. Її математичне сподівання дорівнює 18, а ймовірність попадання в інтервал* $(16, 20)$ *дорівнює 0,98. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини.*

Розв'язання. Ймовірність

$$P(16 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20 - 18}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{16 - 18}{\sigma_x}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right).$$

Звідки $2\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) = 0{,}98,$ $\quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) = 0{,}49.$

Знайдемо значення аргументу z *функції Лапласа. У нашому прикладі* $z = \dfrac{2}{\sigma_x}$. *З таблиці отримуємо* $z = 2{,}33$. *Отже,*

$$\sigma_x = \frac{2}{2{,}33} = 0{,}86.$$

Питання для самоконтролю

1. Яку величину називають неперервною випадковою величиною?
2. Чим характеризується неперервна випадкова величина?
3. Що називають щільністю розподілу ймовірності?
4. Сформулюйте властивості щільності ймовірності.
5. Дайте означення числових характеристик неперервної випадкової величини.
6. Назвіть основні розподіли неперервних випадкових величин.
7. Запишіть формули математичного сподівання і дисперсії для рівномірного та експоненціального розподілів.
8. Що називають асиметрією та ексцесом розподілу?
9. Як визначити імовірність попадання в заданий інтервал неперервної випадкової величини, яка задана нормальним розподілом?

1.6. Системи випадкових величин

Досі ми розглядали випадкові величини, можливі значення яких визначались одним числом. Такі величини називають *одновимірними*. При досліджені випадкових явищ часто розглядають одночасно декілька випадкових величин. Їх сукупність можна представити як багатовимірну випадкову величину. Отже, *багатовимірною* випадковою величиною називають сукупність (систему) декількох випадкових величин, які можуть бути як дискретними так і неперервними.

На практиці частіше доводиться зустрічатись з *двовимірними* випадковими величинами. Всі характеристики, які будуть у подальшому розглянуті для двовимірних випадкових величин, можуть бути поширені й на багатовимірні.

Двовимірну випадкову величину позначають (X, Y) та геометрично інтерпретують як випадкову точку на площині.

Приклад 1.46. *Біржові торги характеризуються двовимірною випадковою величиною, яка є системою двох випадкових величин: X — валютний курс, Y — обсяг продажів .*

Законом розподілу двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини, тобто пар чисел (x_i, y_j) та їх ймовірностей $P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_i, y_j)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Зазвичай закон розподілу двовимірної випадкової величини задається у вигляді таблиці (матриці).

X	Y				
	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	$\sum\limits_{j=1}^{m}$
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\ldots$	$p(x_1, y_m)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\ldots$	$p(x_2, y_m)$	$p(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\ldots$	$p(x_n, y_m)$	$p(x_n)$
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	$p(y_1)$	$p(y_2)$	$\ldots$	$p(y_m)$	1

Так як події $(X = x_i, Y = y_j)$ несумісні та утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$$

Підсумкові стовпець та рядок таблиці закону розподілу (X, Y) є відповідно законами розподілу одномірних складових $(x_i, p(x_i))$ та $(y_j, p(y_j))$.

Функція розподілу двовимірної випадкової величини являє собою ймовірність події $(X < x, Y < y)$, тобто

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \tag{1.6.1}$$

Як відомо, ймовірність сумісної появи значень дискретних випадкових величин x_i, y_j можна виразити у вигляді

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) p(y_j / x_i), \tag{1.6.2}$$

де $p(y_j/x_i)$ — умовна ймовірність.

Аналогічно можна представити щільність розподілу ймовірностей для неперервних величин:

$$f(x, y) = f(x)f(y/x), \tag{1.6.3}$$

де $f(y/x)$ — умовна щільність ймовірності.

Для неперервної двовимірної випадкової величини функція розподілу виражається у вигляді інтегралу від її щільності розподілу:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{1.6.4}$$

Теорема 1.22. *Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи (X, Y) дорівнювала добутку функцій її складових:*

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Наслідок. Для незалежних неперервних випадкових величин X і Y їх сумісна щільність $f(x, y)$ дорівнює добутку щільностей ймовірності $f_1(x)$, $f_2(y)$ цих випадкових величин:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Функціональна залежність між двома змінними X і Y характеризується тим, що кожному значенню x однієї змінної відповідає точно певне значення y іншої. Доволі часто зустрічаються більш складні залежності, ніж функціональні. Такою залежністю, наприклад, є зв'язок між опадами та врожаєм.

Дві випадкові величини X і Y знаходяться у *кореляційній* залежності, якщо кожному значенню будь-якої з цих величин відповідає певний розподіл ймовірностей іншої величини.

Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини Y при $X = x$ називають суму добутків можливих значень Y на їх умовні ймовірності:

$$M(Y/X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x). \tag{1.6.5}$$

Умовне математичне сподівання неперервної випадкової визначається інтегралом

$$M(Y/X = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)\,\mathrm{d}y. \qquad (1.6.6)$$

Значення умовного математичного сподівання випадкової величини Y є функцією від x. Таку функцію називають *функцією регресії* Y на X:

$$M(Y/X = x) = g(x).$$

Аналогічно визначається функція регресії X на Y:

$$M(X/Y = y) = h(y).$$

Якщо на площині зобразити значення випадкового вектора X, Y, то отримуємо множину випадково розміщених точок (рис. 1.8). Для кожного фіксованого значення $x = x_i$ величина Y є випадковою. Її математичне сподівання являє собою умовне математичне сподівання $M(Y/x = x_i)$. Якщо задати різні значення x, то можна побудувати *криву регресії* Y на X.

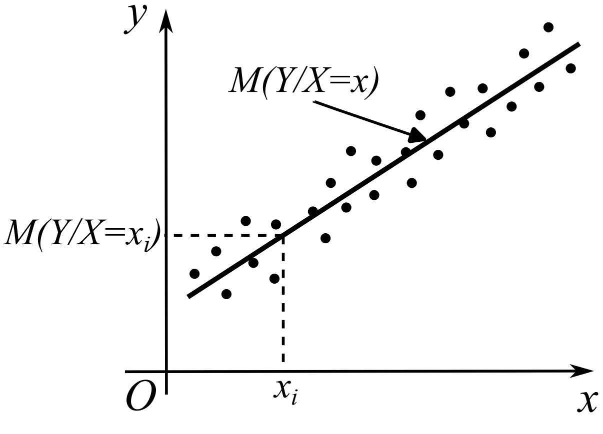

Рис. 1.8. Крива регресії

Коваріацією, або *кореляційним моментом,* випадкових величин X і Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від їх математичних сподівань, тобто мішаний центральний момент другого порядку

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mu_{xy} = M((X - M_x)(Y - M_y)). \qquad (1.6.7)$$

Для дискретних випадкових величин коваріація має вигляд

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M_x)(y_j - M_y)p(x_i, y_j). \qquad (1.6.8)$$

Для неперервних випадкових величин вона записується через інтеграл

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - M_x)(y - M_y)f(x_i, y_j)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (1.6.9)$$

Коваріацію можна представити у вигляді

$$\mu_{xy} = M(XY - M_xY - M_yX + M_xM_y) = M(XY) - M_xM_y - M_yM_x + M_xM_y,$$

або

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mu_{xy} = M(XY) - M_xM_y. \qquad (1.6.10)$$

Коефіцієнтом кореляції r_{xy} випадкових величин X і Y називають відношення коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad (1.6.11)$$

де $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

Дві випадкові величини називають *корельованими*, якщо їх коваріація або коефіцієнт кореляції відмінні від нуля, та *некорельованими*, якщо вони дорівнюють нулю.

Розглянемо двомірну випадкову величину (X, Y). Припустимо, що деяка величина $\tilde{Y}$ наближено зображає величину Y та може бути записана як функція від X у вигляді лінійної залежності

$$\tilde{Y} = g(X) = \alpha X + \beta, \qquad (1.6.12)$$

де α і β — невідомі параметри, які необхідно знайти.

Необхідно так підібрати параметри α і β, щоб функція $g(x)$ була найкращим наближенням до випадкових значень Y.

В якості міри відхилення множини випадкових значень величини Y від значень $\tilde{Y}$ можна взяти математичне сподівання квадрату різниці $Y - \tilde{Y}$, тобто $M(Y - g(x))^2$.

Мінімізація цієї міри дозволяє отримати вирази для визначення параметрів α і β. Функцію $g(X) = \alpha X + \beta$, яка визначена таким способом, називають найкращім наближенням Y за *методом найменших квадратів*, а функцію $y_x = M(Y/X = x) = \alpha x + \beta$ називають *лінійною середньо квадратичною регресією* Y на X.

Лінійна середньо квадратична регресія Y на X має вигляд

$$y_x = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M_x) + M_y. \tag{1.6.13}$$

Приклад 1.47. *Знайти лінійну середньо квадратичну регресію Y на X при наступних вихідних даних: математичні сподівання $M_x = 3$, $M_y = 6$, коваріація $\mu_{xy} = -10$, середні квадратичні відхилення $\sigma_x = 5$, $\sigma_y = 8$.*

Розв'язання. Знаходимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -\frac{10}{5 \cdot 8} = -0{,}25.$$

Підставимо всі відомі значення у вираз (1.6.13)*:*

$$y_x = -\frac{0{,}25 \cdot 8}{5}(x - 3) + 6 = -0{,}4x + 7{,}2.$$

Питання для самоконтролю

1. Яку випадкову величину називають багатовимірною?
2. Що називають законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини?
3. Що таке функція розподілу двовимірної випадкової величини?
4. Чому дорівнює функція розподілу системи двох незалежних випадкових величин?
5. Запишіть вираз для умовного математичного сподівання дискретної випадкової величини.
6. Запишіть вираз для умовного математичного сподівання неперервної випадкової величини.
7. Що таке функція регресії?
8. Що називають кореляційним моментом?
9. Що таке коефіцієнт кореляції? Що він визначає?
10. Запишіть вираз для лінійної середньо квадратичної регресії.

1.7. Граничні теореми теорії ймовірностей

Досвід, який накопичений людством, дає підстави у практичній діяльності керуватись *принципом практичної впевненості*: якщо при певних умовах ймовірність події дуже мала, то при одноразовому їх виконанні можна бути впевненим у тому, що ця подія не відбудеться. Отже, у практичній діяльності можна вважати, що ця подія є неможливою.

Якщо ймовірність події A дуже мала і вона вважається практично неможливою, то ймовірність протилежної події $\bar{A}$ наближається до одиниці та її можна вважати вірогідною.

Ймовірність, якою вирішено нехтувати у даному досліджені, називають *рівнем значущості*.

У статистиці зазвичай рекомендують користуватись рівнем значущості $0{,}05$ при попередніх дослідженнях та $0{,}001$ при остаточних висновках. Відповідно, при попередніх дослідженнях за вірогідні приймають такі події, ймовірності яких не менші $0{,}95$, а при остаточних висновках — ймовірності яких не менші $0{,}999$.

Отже, у практичних дослідженнях важливо знати, при яких умовах можна гарантувати, що ймовірність події буде або достатньо мала, або прямує до одиниці. Такі умови, що дають змогу передбачити вірогідні або неможливі події при великій кількості величин, дістали назву *закону великих чисел*, або *граничних теорем*.

Під *законом великих чисел* розуміють сукупність пропозицій, у яких стверджується, що з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці (або нуля), відбудеться подія, яка залежить від дуже великої кількості випадкових подій, кожна з яких має незначний вплив на цю подію.

Розглянемо допоміжні теореми, які приводять до закону великих чисел: лему та нерівність Чебишова.

Лема Чебишова. *Якщо серед значень випадкової величини X немає від'ємних, то ймовірність того, що вона набуде якесь значення, яке більше додатного числа A, не більше від дробу, чисельник якого — математичне сподівання випадкової величини, а знаменник — число A:*

$$P(X > A) \leqslant \frac{M_x}{A}\,. \tag{1.7.1}$$

Нерівність Чебишова. *Ймовірність того, що відхилення випадко-*

вої величини X від її математичного сподівання буде за абсолютною величиною більше додатного числа ε не більше дробу, чисельник якого — дисперсія випадкової величини, а знаменник — квадрат ε:

$$P(|X - M_x| > \varepsilon) \leqslant \frac{D_x}{\varepsilon^2}. \tag{1.7.2}$$

Нерівність Чебишова можна записати в іншій формі: *ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання буде за абсолютною величиною менше додатного числа ε не менше різниці між одиницею і дробом, чисельник якого — дисперсія випадкової величини, а знаменник — квадрат ε:*

$$P(|X - M_x| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}. \tag{1.7.3}$$

Приклад 1.48. *Схожість насіння деякої рослини складає 70%. Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що при посіві $10\,000$ насіння відхилення частки тих, які зійшли, від ймовірності того, що зійде кожне з них, не буде більше за абсолютною величиною $0{,}01$.*

Розв'язання. Відносна частота події у n незалежних випробуваннях є випадковою величиною. Її математичне сподівання дорівнює ймовірності p настання події у кожному випробуванні, а дисперсія дорівнює $\frac{pq}{n}$ (див. формули (1.4.15)*). Тому нерівність Чебишова* (1.7.3) *для відносної частоти має вигляд:*

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

При $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $n = 10\,000$ та $\varepsilon = 0{,}01$ знаходимо:

$$P\left(\left|\frac{X}{10\,000} - 0{,}7\right| \leqslant 0{,}01\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{10\,000 \cdot 0{,}01^2} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

Отже, ймовірність того, що при посіві $10\,000$ насіння відхилення частини тих, які зійшли, від ймовірності того, що зійде кожне з них, не буде більше за абсолютною величиною $0{,}01$, не менше $0{,}79$.

Розглянемо закон великих чисел у формі Чебишова. Так називають важливу теорему Чебишова, яка є узагальненням його нерівності.

Теорема 1.23. *(Теорема Чебишова).*

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно незалежні, а їхні дисперсії обмежені одним і тим самим числом, то ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного значення цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань менша від деякого наперед заданого додатного числа ε, яким би малим воно не було, із зростанням n, прямує до одиниці:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\leqslant \varepsilon\right)>1-\delta, \tag{1.7.4}$$

де δ — будь-яке додатне число.

Якщо математичні сподівання випадкових величин однакові і дорівнюють M_x, то нерівність 1.7.4 матиме вигляд:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-M_x\right|\leqslant \varepsilon\right)>1-\delta. \tag{1.7.5}$$

Якщо кількість випадкових величин достатньо велика та вони задовольняють деяким загальним умовам, то, як би вони не були розподілені, практично вірогідно, що середня арифметична їх зневажливо мало відхиляється від сталої величини — середньої арифметичної їх математичних сподівань, тобто є практично сталою величиною. У цьому полягає зміст теорем, які відносяться до закону великих чисел.

Можна навести дуже багато прикладів застосування закону великих чисел.

У фізиці існує велика кількість прикладів виникнення нових якісних станів як прояв закону великих чисел. Наприклад, об'єднаний газовий закон, який стверджує сталість тиску газу при незмінних умовах, є проявом закону великих чисел.

Закон великих чисел лежить в основі різних видів страхування.

При плануванні асортименту товарів широкого вжитку враховується попит на них населення. У цьому попиті проявляється дія великих чисел.

Вибірковий метод, який широко застосовується у статистиці, знаходить своє наукове обґрунтування в законі великих чисел.

Достатньої умовою застосування закону великих чисел до послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин є існування у них математичного сподівання.

Закон великих чисел можна застосовувати до залежних випадкових величин, якщо тільки сильна залежність існує між випадковими величинами з близькими номерами, а між випадковими величинами з далекими номерами залежність досить слабка. Прикладами випадкових величин такого типу є числові характеристики зміни клімату. На погоду кожного дня помітно впливає погода попередніх днів, при тому вплив помітно послаблюється з віддаленням днів один від іншого. Отже, багаторічна середня температура, тиск та інші характеристики клімату даної місцевості у відповідності до закону великих чисел практично повинні бути близькими до своїх математичних сподівань.

Закономірності, які виникають у результаті сумарної дії випадкових величин не обмежуються тільки законом великих чисел.

Сума будь-якої скінченної кількості незалежних нормально розподілених випадкових величин також розподілена за нормальним законом.

Якщо незалежні випадкові величини не розподілені за нормальним законом, то можна накласти на них деякі обмеження, та їх сума буде розподілена за нормальним законом. Умови, за яких виникає нормальний закон розподілу, наприклад, встановлює *центральна гранична теорема Ляпунова*.

Теорема 1.24. *(Теорема Ляпунова).*

Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— незалежні випадкові величини, для кожної з яких існують математичні сподівання* $M_{x1}, M_{x2}, \ldots, M_{xn}$, *дисперсії* $D_{x1} = \sigma^2_{x1}, D_{x2} = \sigma^2_{x2}, \ldots, D_{xn} = \sigma^2_{xn}$, *абсолютні центральні моменти третього порядку* $M(|X_i - M_{xi}|^3) = \mu_{3i}$ *та при необмеженому зростанні* n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{31} + \mu_{32} + \ldots + \mu_{3n}}{(\sigma^2_{x1} + \sigma^2_{x2} + \ldots + \sigma^2_{xn})^{\frac{3}{2}}} = 0, \tag{1.7.6}$$

то закон розподілу суми $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *при* $n \to \infty$ *необмежено наближається до нормального розподілу з параметрами:*

$$M_x = M_{x1} + M_{x2} + \ldots + M_{xn}; \tag{1.7.7}$$

$$\sigma^2_x = \sigma^2_{x1} + \sigma^2_{x2} + \ldots + \sigma^2_{xn}. \tag{1.7.8}$$

Умову (1.7.6) називають *умовою Ляпунова*. Її зміст полягає в тому, що вага кожного доданку (випадкової величини) мала порівняно з сумарною вагою їх усіх. Багато випадкових величин, які зустрічаються в природі та в людській діяльності, відбуваються саме за такою схемою. Отже, теорема Ляпунова має велике значення, а нормальний закон розподілу є одним з основних законів в теорії ймовірностей.

Для обґрунтування вибіркового методу важливою є теорема, що є наслідком теореми Ляпунова.

Теорема 1.25. *Сума достатньо великої кількості однаково розподілених випадкових величин, які мають абсолютні центральні моменти третього порядку, розподілена за нормальним законом.*

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає зміст принципу практичної впевненості?
2. Яку величину називають рівнем значущості?
3. Що являє собою закон великих чисел?
4. Запишіть нерівність Чебишова.
5. Сформулюйте теорему Чебишова.
6. Наведіть приклади застосування закону великих чисел.
7. Сформулюйте граничну теорему Ляпунова. Яке її значення?

Розділ 2.

Математична статистика

2.1. Вибірка та її характеристики

Безперервне спостереження, тобто вивчення всіх об'єктів (елементів) сукупності, в багатьох випадках незручно або неможливо провести. Економічно невигідно проводити обстеження всіх об'єктів, якщо за результатами вивчення порівняно невеликої їх частини можна отримати з достатньою для практики вірогідністю необхідну інформацію про всю сукупність. Такий метод дослідження називають *вибірковим*.

Всю сукупність об'єктів, яку необхідно вивчити, називають *генеральною сукупністю*. Ту частину об'єктів, які попали на обстеження, називають *вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою*. Кількість елементів у генеральній сукупності та у вибірці називають їх *об'ємами*.

Для того щоб мати право робити висновок про генеральну сукупність по вибірці, остання повинна бути отримана випадково. Це можна досягти різними способами. Розрізняють наступні типи вибірок: *власно-вибіркова, типова, серійна, механічна*.

Члени генеральної сукупності перед утворенням вибірки повинні бути занумеровані.

Найкращий спосіб здійснення власно-вибіркової вибірки — використання випадкових вибіркових чисел.

Повторною власно-вибірковою або просто *повторною* називають вибірку, за якої відібраний об'єкт повертають до генеральної сукупності перед відбором іншого об'єкта.

Вибірку називають *безповторною власно-вибірковою* або просто *безповторною*, якщо взятий об'єкт до генеральної сукупності не повертається перед відбором наступного об'єкта.

Якщо генеральну сукупність попередньо розбити на групи, які не перетинаються, а потім утворити власно-вибіркові вибірки з кожної групи та всі відібрані об'єкти взяти у вибіркову сукупність, то її називають *типовою*.

Генеральну сукупність попередньо розіб'ємо на групи, які не перетинаються. Будемо розглядати ці групи як елементи. Якщо утворити з цих елементів власно-вибіркову вибірку та всі об'єкти відібраних груп взяти у вибіркову сукупність, то її називають *серійною*.

Приклад 2.1. *Припустимо, що на заводі 80 станків, які виготовляють однакові деталі.*

Якщо відібрати деталі у вибірку з продукції всіх станків, яка попередньо ретельно перемішана, то утворюється власно-вибіркова вибірка.

Якщо розділити продукцію станків та відбирати деталі окремо з продукції кожного з усіх 80 станків, то отримуємо типову вибірку.

Утворимо власно-вибіркову вибірку з генеральної сукупності, яка складається з 80 об'єктів — станків, наприклад, відберемо 10 станків. Якщо вважати всю продукцію цих відібраних станків елементами вибіркової сукупності, то це буде серійна вибірка.

Механічною називають вибірку, в яку об'єкти з генеральної сукупності відбираються через певний інтервал.

Механічну вибірку можна утворити, якщо є визначений порядок слідування елементів генеральної сукупності.

Приклад 2.2. *Прилади з конвеєра з'являються в певній послідовності у часі. Якщо об'єм вибірки приладів повинен складати 5% об'єму генеральної сукупності, то потрібно відбирати кожен двадцятий прилад.*

За результатами статистичного спостереження потрібно дослідити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якісної (вид продукції, колір продукції, спеціальність робітника, національність) або кількісної ознаки (продуктивність праці робітника, собівартість виробу, об'єм продукції).

Різні значення ознаки, яка спостерігається у об'єктів сукупності x_i, називають *варіантами*. Числа n_i, які показують, скільки раз зустрічається кожна варіанта називають *частотою*.

Нехай з генеральної сукупності отримана вибірка. При цьому варіанта x_1 спостерігається n_1 раз, x_2 спостерігається n_2 раз і т. д., x_k спостерігається n_k раз. Об'єм вибірки можна визначити так:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Відношення частоти варіанти n_i до об'єму вибірки n називають *відносною частотою варіанти*:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \tag{2.1.1}$$

Ряд варіант, розміщених у порядку зростання з відповідними їм частотами або відносними частотами називають *варіаційним рядом* або *статистичним розподілом вибірки*.

В залежності від того, які значення може приймати ознака, варіаційні ряди поділяються на дискретні і неперервні (інтервальні). Варіаційний ряд називають *дискретним*, якщо значення ознаки (варіанти) відрізняються одне від одного не менше, ніж на деяку скінченну величину. Варіаційний ряд називають *неперервним* (*інтервальним*), якщо варіанти можуть відрізнятись одна від одної на скільки завгодно малу величину.

Нехай, був отриманий статистичний розподіл вибірки. Позначимо через n_x кількість спостережень, при яких значення варіант буде меншим за x. *Емпіричною функцією розподілу* випадкової величини або *функцією розподілу вибірки* називають функцію F_x^* відносної частоти кількості спостережень n_x, тобто відносної частоти події $X < x$:

$$F_x^* = \frac{n_x}{n}. \tag{2.1.2}$$

Цю функцію використовують для наближеного представлення про теоретичну функцію розподілу випадкової величини.

Приклад 2.3. *Побудувати емпіричну функцію розподілу за даними вибірки:*

x_i	2	6	8	10
n_i	6	16	18	20

Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 6 + 16 + 18 + 20 = 60$. *За формулою* (2.1.2) *складемо функцію розподілу вибірки:*

$$F_x^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 2; \\ \frac{6}{60} = \frac{1}{10}, & \text{якщо} \quad 2 < x \leqslant 6; \\ \frac{22}{60} = \frac{11}{30}, & \text{якщо} \quad 6 < x \leqslant 8; \\ \frac{40}{60} = \frac{2}{3}, & \text{якщо} \quad 8 < x \leqslant 10; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 10. \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції (рис. 2.1).

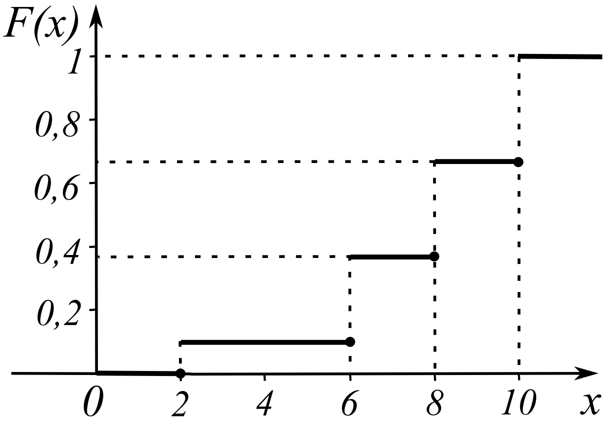

Рис. 2.1. Емпірична функція розподілу

Для графічного зображення статистичного розподілу вибірки використовують полігони і гістограми. Полігоном зазвичай користуються для зображення дискретних варіаційних рядів коли кількість варіант невелика. У випадку великої кількості варіант та у випадку неперервного варіаційного ряду використовують гістограму.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_i, n_i). На осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат — відповідні значення частоти n_i. Якщо замість частот n_i взяти відносні частоти w_i, то отримуємо *полігон відносних частот*. Приклад полігону частот показаний на рис. 2.2

Для побудови гістограми інтервал, в якому містяться всі варіанти розбивається на декілька частинних інтервалі шириною h та для кожного частинного інтервалу знаходять суму частот варіант n_i, які попали у i-ий інтервал.

Гістограмою частот називають східчасту фігуру (рис. 2.3), яка складається з прямокутників, основами яких є відрізки h, а висоти дорівнюють $\frac{n_i}{h}$. Величину $\frac{n_i}{h}$ називають *щільністю частот*.

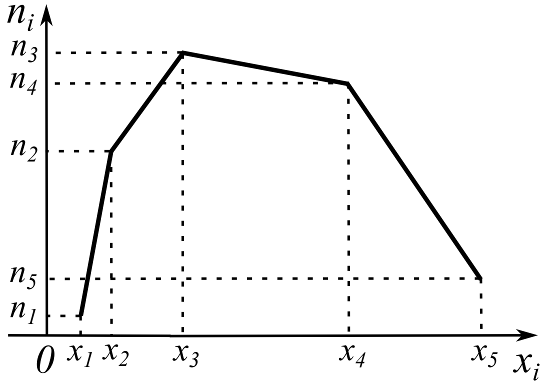

Рис. 2.2. Полігон частот статистичного розподілу

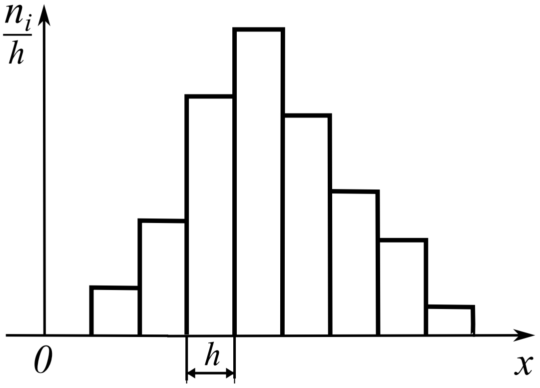

Рис. 2.3. Гістограма частот статистичного розподілу

Площа i-го прямокутника дорівнює $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$ — сумі частот варіант i-го інтервалу. Отже, площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об’єму вибірки.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є відрізки h, а висоти дорівнюють $\frac{w_i}{h}$. Величину $\frac{w_i}{h}$ називають *щільністю відносних частот*. Площа i-го прямокутника дорівнює $\frac{w_i}{h} \cdot h = w_i$ — відносної частоти варіант, які попали у i-й інтервал. Отже, площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

Питання для самоконтролю

1. Який метод дослідження називають вибірковим?
2. Що називають генеральної і вибірковою сукупностями їх об’ємами?
3. Які є типи вибірок?
4. Дайте означення наступних величин: варіанта, частота, відносна частота.
5. Дайте означення варіаційного ряду.
6. Які варіаційні ряди називають дискретними, інтервальними?
7. Що являє собою емпірична функція розподілу?
8. Що таке полігон частот та відносних частот статистичного розподілу?

9. Що таке гістограма частот та відносних частот статистичного розподілу?
10. Чому дорівнюють площі гістограм частот і відносних частот статистичного розподілу?

2.2. Статистичні оцінки

Однією з головних задач математичної статистики є оцінка теоретичного розподілу випадкової величини на основі вибіркових даних. При цьому припускається, що закон розподілу генеральної сукупності відомий, але невідомі його параметри, наприклад математичне сподівання і дисперсія. Необхідно знайти наближені значення цих параметрів, тобто отримати їх статистичні оцінки.

Позначимо через θ^* оцінку деякого теоретичного параметру θ закону розподілу випадкової величини X. Будемо розглядати вибіркові значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ як реалізації випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які отримали конкретні значення в результаті дослідів. Оцінку θ^* можна представити як функцію цих випадкових величин

$$\theta^* = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Це означає, що оцінка також є випадковою величиною.

Якщо для оцінки деякого параметру θ взяти декілька k вибірок, то у загальному випадку отримуємо стільки ж різних випадкових оцінок $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$. Математичне сподівання випадкової величини θ^*, яка має отримані реалізації, може як збігтися, так і не збігтися з параметром θ, який оцінюється.

Незміщеною називають статистичну оцінку θ^*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру $M(\theta^*) = \theta$.

Зміщеною називають статистичну оцінку θ^*, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюваному параметру.

Ефективною називають статистичну оцінку, яка при однакових об'ємах вибірок має найменшу дисперсію.

У деяких випадках цікавою є поведінка оцінки при необмеженому зростанні об'єму вибірки.

Слушною називають статистичну оцінку, яка при збільшені об'єму вибірки n прямує до оцінюваного параметра. Через ймовірність це можна записати так:

$$P(\theta^* = \theta / n \to \infty) = 1.$$

Нехай проведена вибірка об'єму n, а об'єм генеральної сукупності — N. Позначимо частоти варіант $x_1, x_2, \ldots, x_k$ генеральної сукупності — N_i, а вибірки — n_i.

Середню арифметичну $\bar{x}$ розподілу ознаки у генеральній сукупності називають *генеральною середньою*, а дисперсію σ_x^2 цього розподілу — *генеральною дисперсією*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i N_i, \tag{2.2.1}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 N_i. \tag{2.2.2}$$

Середню арифметичну $\bar{x}_\text{в}$ розподілу ознаки у вибірковій сукупності називають *вибірковою середньою*, а дисперсію $d_\text{в}$ цього розподілу — *вибірковою дисперсією*:

$$\bar{x}_\text{в} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \tag{2.2.3}$$

$$d_\text{в} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_\text{в})^2 n_i. \tag{2.2.4}$$

У деяких випадках вибіркові значення випадкової величини доцільно розбити на окремі групи. У кожній групі можна знайти її середню, яку називають *груповою середньою*. За груповими середніми можна знайти середнє для всієї вибірки.

Вибіркова середня $\bar{x}_\text{в}$ є незміщеною оцінкою генеральної середньої $\bar{x}$:

$$M(\bar{X}_\text{в}) = \bar{x}.$$

Вибіркова дисперсія $d_\text{в}$ є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії σ_x^2:

$$M(\bar{D}_\text{в}) = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2.$$

Для усунення зміщеності вибіркової дисперсії вводиться поправка $\frac{n}{n-1}$:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_{\text{в}}, \tag{2.2.5}$$

де s^2 називають *виправленою вибірковою дисперсією*.

Початковим емпіричним моментом порядку k називають величину:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i x_i^k. \tag{2.2.6}$$

Для першого порядку отримуємо вибіркову середню:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \bar{x}_{\text{в}}.$$

Центральним емпіричним моментом порядку k називають величину:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^k. \tag{2.2.7}$$

Зокрема, для другого порядку отримуємо вибіркову дисперсію:

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 = d_{\text{в}}.$$

Вибіркові середні та вибіркові дисперсії наближаються до генеральних, але не збігаються з ними. Різниці обумовлені тим, що існують похибки вибіркового спостереження. Ц похибки репрезентативності і похибки реєстрації.

Похибкою репрезентативності називають відхилення характеристики ознаки у вибірковій сукупності від відповідної характеристики її у генеральній сукупності, яке обумовлене тільки тим, що досліджується не вся сукупність, а лише її частина.

Похибки репрезентативності бувають систематичними і випадковими. Систематична похибка репрезентативності виникає при порушені випадковості відбору членів у вибіркову сукупність. Наприклад, якщо у вибірку, яка утворена з метою прогнозування врожайності, будуть включені лише найбільш врожайні ділянки.

Якщо вимога випадковості при відборі членів у вибіркову сукупність була виконана, то вибіркові та генеральні характеристики, як правило, не збігаються. Різниця між ними і буде випадковою похибкою репрезентативності. Вона виникає тільки тому, що досліджується не вся сукупність, а тільки її частина.

Похибкою реєстрації називають різницю між дійсним значенням ознаки у члена сукупності та значенням, яке зареєстроване при спостережені.

Похибки реєстрації також бувають систематичними і випадковими. Систематичні похибки реєстрації виникають при навмисному або ненавмисному спотворені у один і той же бік (завищення або заниження) значень ознаки у членів сукупності.

Випадкові похибки реєстрації не мають певної спрямованості та виникають під дією випадкових факторів (похибки при заповнені бланків, нечітка відповідь на нечітке запитання, помилка у відповіді та інші).

Похибки реєстрації можуть виникати як при вибірковому, так і при суцільному досліджені. Похибки репрезентативності характерні лише для вибіркового спостереження.

Питання для самоконтролю

1. Які статистичні оцінки називають незміщеними, зміщеними, ефективними і слушними?
2. Дайте визначення генеральних середнього і дисперсії.
3. Запишіть формули для визначення вибіркових середньої і дисперсії.
4. Яку дисперсію називають виправленою?
5. Яку величину називають початковим емпіричним моментом?
6. Що таке центральний емпіричний момент?
7. Які похибки називають похибками репрезентативності?
8. Що являють собою похибки реєстрації?

2.3. Методи знаходження статистичних оцінок

Статистичні оцінки параметрів теоретичного розподілу є випадковими величинами, оскільки їх отримують на основі випадкової вибірки. Для багатьох задач математичної статистики потрібно розглядати закони розподілу статистичних оцінок або їх комбінацій. При цьому широко використовують наступні закони розподілу: хі-квадрат (χ^2), Фішера–Снедокера, Стьюдента.

У вирази вказаних законів входять величини, які називають *ступенями вільності*. Це поняття тісно пов'язане з поняттям ступенів вільності тіла, яке використовується в механіці. Так, якщо у просторі рухається абсолютно тверде тіло, то його рух характеризується шістьма ступенями вільності, три з яких визначають положення центру мас тіла (три координати) та три — визначають повороти тіла відносно центру мас.

Будь-яка композиція k незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, зокрема їх сума, має k ступенів вільності, так як кожна складова може змінювати своє значення незалежно від інших значень. Різні незалежні вимірювання однієї і тієї ж величини можна розглядати як різні випадкові величини з кількістю ступенів вільності, яка дорівнює кількості вимірювань. Так, наприклад, послідовність вимірювань $X_1, X_2, \ldots, X_k$ та їх сума, а також сума їх квадратів, має k ступенів вільності.

Якщо для системи випадкових величин заданий деякий зв'язок, то кількість ступенів вільності зменшується. Зокрема, якщо знайти вибіркове середнє

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}$$

та зафіксувати це значення для відповідних k випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, тобто вважати вірним вираз

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}{k}$$

для усіх значень цих величин, то одну з них завжди можна виразити через інші. Це означає, що вона виявилась зв'язаною та система випадкових величин втратила один ступінь вільності.

Отже, якщо розглядати випадкову величину вибіркової середньої як суму незалежних випадкових вимірювань, то кількість її ступенів вільності дорівнює кількості цих вимірювань. Якщо ж розглядати вибіркову дисперсію як випадкову величину

$$\bar{D}_{\text{в}} = \frac{(X_1 - \bar{x}_{\text{в}})^2 + (X_2 - \bar{x}_{\text{в}})^2 + \ldots + (X_k - \bar{x}_{\text{в}})^2}{k},$$

то вона буде мати вже на один ступінь вільності менше, так як $\bar{x}_{\text{в}}$ тут фіксоване і зв'язує випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Якщо при фіксації вибіркового середнього і вибіркової дисперсії $(\bar{x}_{\text{в}}, \bar{d}_{\text{в}})$ розглядати випадкову величину, яка залежить від k незалежних випадкових величин та від $\bar{x}_{\text{в}}$ і $\bar{d}_{\text{в}}$, то кількість її ступенів вільності буде меншою ще на одиницю.

Розглянемо деякі види розподілів. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини з нульовим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням, яке дорівнює одиниці.

Розподіл хі-квадрат. Закон розподілу суми квадратів випадкових величин

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

називають *законом хі-квадрат* з n ступенем вільності.

Щільність розподілу випадкової величини χ^2 має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

де $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ — *гама-функція*, для якої виконується рівність

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Для випадкової величини χ щільність розподілу має вигляд

$$f(\chi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \chi < 0; \\ \dfrac{e^{-\frac{\chi}{2}} \chi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, & \text{якщо} \quad \chi \geqslant 0. \end{cases}$$

Розподіл Стьюдента. Випадкова величина

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{X_i^2}{n}}}$$

має *розподіл Стьюдента* (*T-розподіл*) з n ступенями вільності.

У практичних задачах також використовують випадкову величину

$$T = \frac{X_0 - \bar{x}_{\text{в}}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n}}},$$

яка має розподіл Стьюдента з $n-1$ ступеню вільності.

Щільність ймовірності випадкової величини T має вигляд

$$f(x) = b_n\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{де} \qquad b_n = \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{n}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\sqrt{\pi n}}\,.$$

Розподіл Фішера–Снедекора. Випадкова величина

$$F_{nm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i^2}{n}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{Y_j^2}{m}}$$

має *розподіл Фішера–Снедекора* з n та m ступенями вільності.

Щільність розподілу випадкової величини F_{nm} має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0; \\ C_0\dfrac{x^{\frac{n-2}{2}}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}, & \text{якщо} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$\text{де} \qquad C_0 = \frac{\Gamma\big(\frac{n+m}{2}\big)n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}\,.$$

Якщо випадкові величини X та Y зв'язані, наприклад, за допомогою вибіркових середніх, то випадкова величина

$$F_{kl} = \frac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x}_{\text{в}})^2}{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}(Y_j-\bar{y}_{\text{в}})^2}$$

має *розподіл Фішера–Снедекора* з ступенями вільності $k = n-1$ та $l = m-1$.

Точковою називають оцінку, яка характеризується одним числом. Розглянуті вище оцінки $(\bar{x}_{\text{в}}, \bar{d}_{\text{в}})$ є точковими.

При вибірці малого об'єму точкова оцінка може суттєво відрізнятись від параметра, який оцінюється. У цьому випадку доцільно використати інтервальні оцінки.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами — кінцями інтервалу.

Нехай знайдена за даними вибірки величина θ^* є оцінкою невідомого параметру θ. Оцінка θ^* тим точніше визначає θ, чим менше різниця $|\theta - \theta^*|$, тобто чим менше величина δ у нерівності $|\theta - \theta^*| < \delta$ $(\delta > 0)$.

Так як θ^* — випадкова величина, то і різниця $|\theta - \theta^*|$ — випадкова величина. Тому нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$ при заданій величині δ може виконуватись тільки з деякою ймовірністю.

Довірчою ймовірністю (*надійністю*) оцінки θ^* параметра θ називають ймовірність γ, з якою оцінюється нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Довірча ймовірність γ та рівень значущості α доповнюють одне одного до одиниці та визначають надійність статистичного твердження.

Зазвичай задається надійність γ та визначається δ. Як правило, ймовірність γ задається значеннями від $0{,}95$ і вище. Нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$ можна записати у вигляді

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \qquad \text{або} \qquad \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta.$$

Довірчим інтервалом називають інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який покриває невідомий параметр θ із заданою точністю.

Розглянемо методи знаходження статистичних оцінок.

Метод моментів точкової оцінки параметрів розподілу полягає у прирівнюванні теоретичних моментів та відповідних емпіричних моментів того самого порядку.

Нехай відомий вид функції щільності розподілу ймовірностей випадкової величини, яка залежить від одного невідомого параметру θ.

Наприклад, $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ — експоненціальний розподіл $(x \geqslant 0)$. Необхідно знайти точкову оцінку параметра θ. У випадку експоненціального розподілу $\theta = \lambda$.

Для отримання оцінки одного параметра можна використати одне рівняння з одним невідомим. У методі моментів в якості такого рівняння пропонується рівність

$$\nu_1 = M_1,$$

де ν_1 — початковий теоретичний момент першого порядку; M_1 — початковий емпіричний момент першого порядку.

Теоретичний момент першого порядку являє собою математичне сподівання, а емпіричний момент першого порядку — це вибіркове середнє. Отже,

$$M_x = \bar{x}_{\text{в}}. \tag{2.3.1}$$

Математичне сподівання можна розглядати як функцію параметра θ:

$$M_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \theta)\,\mathrm{d}x = \varphi(\theta).$$

З рівняння (2.3.1) можна отримати не сам параметр θ, а тільки його оцінку, так як $\bar{x}_{\text{в}}$ є реалізацією випадкової величини $\bar{X}_{\text{в}}$. Тоді отримуємо рівність

$$\varphi(\theta^*) = \bar{x}_{\text{в}}.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо оцінку θ*, яка є функцією від вибіркової середньої. Так, для експоненціального розподілу

$$M_x = \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Звідки $\dfrac{1}{\lambda^*} = \bar{x}_{\text{в}}, \quad \lambda^* = \dfrac{1}{\bar{x}_{\text{в}}}\,.$

Якщо щільність розподілу ймовірностей залежить від двох параметрів, то θ потрібно розглядати як двовимірний вектор. Для оцінки цих параметрів необхідно скласти не одне, а два рівняння. Такими рівняннями можуть бути наступні рівності:

$M_x = \bar{x}_{\text{в}}, \qquad D_x = d_{\text{в}}$ або, якщо більш точніше, $D_x = s^2$.

Оцінки методу моментів зазвичай є слушними, але за ефективністю вони не є найкращими. Не зважаючи на це, метод моментів часто використовують на практиці, так як він приводить до порівняно нескладних обчислень.

Ідея *методу найбільшої правдоподібності* полягає в тому, що за оцінку θ^* беруть таке значення параметру θ, для якого ймовірність отримання вже наявної вибірки максимальна.

Нехай X — дискретна випадкова величина, яка у вибірці об'ємом n набула значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо, що відомий вид закону розподілу ймовірностей, але невідомий параметр θ.

Позначимо через $p(x_i, \theta)$ ймовірність того, що величина X матиме значення x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини називають функцію аргументу θ

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \theta). \tag{2.3.2}$$

Точковою оцінкою параметра θ вважається таке значення θ^*, при якому функція L приймає найбільше значення. Цю оцінку називають *оцінкою найбільшої правдоподібності*.

Так як функції L та $\ln L$ зазвичай мають найбільші значення при одному й тому ж θ, то оцінку θ^* визначають на основі максимізації функції $\ln L$. Для цього функцію досліджують на максимум за допомогою необхідної умови екстремуму.

Цей метод є ефективним у випадку малих вибірок, оскільки вимагає доволі складних обчислень.

Приклад 2.4. *Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінку параметра* λ *у розподілі Пуассона*

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

за результатами проведених досліджень.

Розв'язання. Будемо називати дослідом групу з n *випробувань. У кожному досліді фіксується кількість появ події, яка розглядається. Нехай таких дослідів буде* k. *Тоді кількість появ події у* i*-му досліді буде* m_i. *Підставимо значення* m_i *у формулу Пуассона:*

$$P_n(m_i) = \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}e^{-\lambda}.$$

Ці ймовірності для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$ *підставимо у функцію правдоподібності*

$$L = p_n(m_1, \lambda)p_n(m_2, \lambda) \cdot \ldots \cdot p_n(m_k, \lambda) =$$

$$= \frac{\lambda^{m_1}}{m_1!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m_2}}{m_2!}e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{m_k}}{m_k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}}{m_1!m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}e^{-k\lambda}.$$

Знайдемо логарифм цієї функції

$$\ln L = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)\ln\lambda - k\lambda - \ln(m_1!m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!).$$

Візьмемо першу похідну за λ та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}{\lambda} - k = 0.$$

Звідки

$$\lambda^* = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i = \bar{m}_в.$$

Якщо взяти другу похідну

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}{\lambda^2},$$

то видно, що вона від'ємна. Це означає, що отримане значення λ^* *є точкою максимуму.*

Нехай випадкова величина X має нормальний розподіл та відоме її середнє квадратичне відхилення σ_x. З урахуванням отриманого значення вибіркового середнього $\bar{x}_в$, потрібно знайти довірчий інтервал, який покриває математичне сподівання M_x з надійністю γ.

Як вже відмічалось, вибіркове середнє є випадковою величиною, тому його можна позначити $\bar{X}_в$.

Математичне сподівання вибіркового середнього дорівнює M_x:

$$M(\bar{X}_в) = M_x.$$

Середнє квадратичне відхиляння вибіркової середньої

$$\sigma(\bar{X}_в) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Будемо вважати, що ймовірність попадання вибіркового середнього у деякий поки ще не відомий δ-окіл математичного сподівання задана і дорівнює γ:

$$P\big(|\bar{X}_в - M_x| < \delta\big) = \gamma.$$

Як відомо (див. формулу (1.5.15) і приклад 1.45), для нормального розподілу випадкової величини X

$$P\big(|\bar{X} - M_x| < \delta\big) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right), \tag{2.3.3}$$

де $\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma_x}\right)$ — функція Лапласа в точці $\dfrac{\delta}{\sigma_x}$.

Якщо врахувати те, що вибіркове середнє, як середнє арифметичне нормально розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, має нормальний розподіл, то можна скористатись формулою (2.3.3). Але замість σ_x потрібно взяти середнє квадратичне відхилення вибіркового середнього

$$\sigma(\bar{X}_\text{в}) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Отже, для $\bar{X}_\text{в}$ отримуємо

$$P\big(|\bar{X}_\text{в} - M_x| < \delta\big) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = 2\Phi(z), \tag{2.3.4}$$

де $z = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_x}$.

Тоді $\delta = \dfrac{z\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Підставимо вираз для δ у ліву частину рівності (2.3.4):

$$P\left(|\bar{X}_\text{в} - M_x| < z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(z)$$

або

$$P\left(\bar{X}_\text{в} - z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < M_x < \bar{X}_\text{в} + z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Довірчий інтервал $\left(\bar{X}_\text{в} - z\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < M_x < \bar{X}_\text{в} + z\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідоме M_x з надійністю γ. Число z визначаємо з виразу $2\Phi(z) = \gamma$, тобто

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{2}.$$

За таблицею функції Лапласа знаходимо z, яке відповідає значенню $\Phi(z) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Приклад 2.5. *Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 3$. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання по вибірковому середньому $\bar{x}_в$, якщо об'єм вибірки $n = 36$, а надійність оцінки $\gamma = 0{,}95$.*

Розв'язання. Спочатку знаходимо z:

$$2\Phi(z) = 0{,}95, \Phi(z) = 0{,}475,$$

за таблицею функції Лапласа (див. Додаток Б) $z = 1{,}96$. *Потім визначаємо* δ*:*

$$\delta = z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}} = 0{,}98.$$

Довірчий інтервал запишемо у вигляді

$$(\bar{x}_в - 0{,}98, \bar{x}_в + 0{,}98).$$

При різних значеннях $\bar{x}_в$ *границі довірчого інтервалу змінюються.*

Розглянемо наступну задачу статистичної оцінки параметрів випадкової величини X, яка розподілена за нормальним законом. По-перше, оцінимо невідоме середнє квадратичне відхилення σ_x за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s. По-друге, знайдемо довірчий інтервал, в який попадає σ_x із заданою надійністю γ.

Будемо вважати, що ймовірність попадання випадкової оцінки S у δ-окіл середнього квадратичного відхилення σ_x задана та дорівнює γ $(0 < \delta < \sigma_x)$:

$$P\big(|S - \sigma_x| < \delta\big) = \gamma$$

або

$$P(\sigma_x - \delta < S < \sigma_x + \delta) = \gamma.$$

Запишемо нерівність

$$\sigma_x - \delta < S < \sigma_x + \delta$$

у вигляді

$$\sigma_x\left(1 - \frac{\delta}{\sigma_x}\right) < S < \sigma_x\left(1 + \frac{\delta}{\sigma_x}\right),$$

потім поділимо на σ_x:

$$1 - \frac{\delta}{\sigma_x} < \frac{S}{\sigma_x} < 1 + \frac{\delta}{\sigma_x}. \qquad (2.3.5)$$

Помножимо на $\sqrt{n-1}$ та отримуємо

$$\left(1 - \frac{\delta}{\sigma_x}\right)\sqrt{n-1} < \frac{S}{\sigma_x}\sqrt{n-1} < \left(1 + \frac{\delta}{\sigma_x}\right)\sqrt{n-1}. \qquad (2.3.6)$$

Введемо заміну

$$q = \frac{\delta}{\sigma_x}, \qquad \chi = \frac{S}{\sigma_x}\sqrt{n-1}.$$

Тоді нерівність (2.3.6) матиме вигляд

$$(1-q)\sqrt{n-1} < \chi < (1+q)\sqrt{n-1}. \tag{2.3.7}$$

Як видно з нерівності (2.3.7), випадкова величина χ має обмеження

$$\chi_1 = (1-q)\sqrt{n-1}, \qquad \chi_2 = (1+q)\sqrt{n-1}.$$

Ймовірність попадання χ в інтервал (χ_1, χ_2) можна виразити через інтеграл

$$P(\chi_1 < \chi < \chi_2) = \int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} f(\chi, n)\, \mathrm{d}\chi,$$

де $f(\chi, n)$ — щільність ймовірності випадкової величини χ.

Цей інтеграл необхідно прирівняти до значення заданої надійності:

$$\int\limits_{(1-q)\sqrt{n-1}}^{(1+q)\sqrt{n-1}} f(\chi, n)\, \mathrm{d}\chi = \gamma.$$

Значення цього інтеграла обчислюється для різних значень n, q, γ (див. Додаток В).

Якщо задати значення n і γ, то можна знайти q.

Нерівність (2.3.5)

$$1-q < \frac{S}{\sigma_x} < 1+q$$

представимо так:

$$\frac{1}{1-q} > \frac{\sigma_x}{S} > \frac{1}{1+q} \qquad \text{або} \qquad \frac{S}{1-q} > \sigma_x > \frac{S}{1+q}.$$

Запишемо цю нерівність у вигляді

$$\frac{S}{1+q} < \sigma_x < \frac{S}{1-q}.$$

Шуканий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення обчислюється, якщо замість випадкового значення S підставити знайдене за вибіркою s

$$\left(\frac{s}{1+q}; \frac{s}{1-q}\right).$$

Приклад 2.6. *Нехай випадкова величина X має нормальний розподіл. Проведена вибірка, об'єм якої $n = 25$, та знайдено виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 0{,}8$. Знайти довірчий інтервал, який покриває σ_x з надійністю $\gamma = 0{,}95$.*

Розв'язання. За таблицею залежності n, q і γ (див. Додаток В) знаходимо значення величини $q = 0{,}32$. Після цього визначаємо довірчий інтервал

$$\left(\frac{0{,}8}{1+0{,}32}; \frac{0{,}8}{1-0{,}32}\right), \qquad \textit{тобто} \qquad (0{,}6;\ 1{,}18).$$

Питання для самоконтролю

1. Що являють собою ступені вільності випадкових величин?
2. Які статистичні оцінки називають точковими?
3. Які статистичні оцінки називають інтервальними?
4. Що таке надійність статистичної оцінки?
5. Який інтервал називають довірчим?
6. У чому полягає метод моментів точкової оцінки параметрів розподілу?
7. Яка ідея методу найбільшої правдоподібності?

2.4. Перевірка статистичних гіпотез

У деяких випадках потрібно знайти закон розділу генеральної сукупності, який невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вид (наприклад, експоненціальний). Тоді висувають гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за експоненціальним законом.

В інших випадках закон розподілу відомий, але невідомі його параметри. Якщо є підстави припустити, що невідомий параметр θ дорівнює певному значенню θ_0, то висувається гіпотеза: $\theta = \theta_0$.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомого розподілу.

Поряд з даною гіпотезою розглядають і протилежну їй гіпотезу. У випадку коли висунута гіпотеза відкидається, зазвичай приймається протилежна їй гіпотеза.

Нульовою (*основною*) називають гіпотезу H_0, яка висунута. *Конкуруючою* (*альтернативною*) називають гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій.

Наприклад, якщо нульова гіпотеза H_0: $M_x = 8$ (тобто математичне сподівання нормально розподіленої величини дорівнює восьми, тоді конкуруюча гіпотеза H_1 може мати вигляд H_1: $M_x \neq 8$.

Перевірку вірності або невірності висунутої гіпотези проводять статистичними методами. Після такої перевірки може бути прийняте правильне або помилкове рішення. Розрізняють помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відхилена вірна гіпотеза. Так, в якійсь незначній частині випадків нульова гіпотеза H_0 може виявитися відхиленою, тоді як дійсно в генеральній сукупності вона є справедливою. Ймовірність помилки першого роду називають *рівнем значущості* і позначають α.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята невірна гіпотеза. В якійсь невеликій кількості випадків нульова гіпотеза H_0 приймається, тоді як в генеральній сукупності вона помилкова, а справедливою є конкуруюча гіпотеза H_1. Ймовірність помилки другого роду позначають β, а ймовірність $1 - \beta$ називають *потужністю критерію*.

Наприклад, основна гіпотеза полягає в тому, що підприємство отримує прибуток. Якщо це вірна гіпотеза, то помилка першого роду полягає в тому, що дана гіпотеза не приймається. Якщо приймається рішення про те, що прибуток підприємство не отримує, то це помилка другого роду.

Зазвичай помилка першого роду тягне за собою помилку другого роду: якщо відкинута гіпотеза про те, що підприємство отримує прибуток, то, зазвичай, приймається рішення про те, що воно не має прибутку.

Але на практиці можливі й інші ситуації. У більшості випадків розглядаються гіпотези про закони розподілу. Якщо відкидається вірний закон розподілу, то робиться помилка першого роду. Але після цього може бути прийнято рішення уточнити дані, тобто конкуруюча гіпотеза не приймається. Якщо ж приймається інший розподіл, то відбувається помилка другого роду.

При перевірці нульової гіпотези вводять спеціально підібрану випадкову величину, розподіл якої відомий. Її позначають U або Z, якщо вона розподілена нормально, F або ν^2 — за законом Фішера–Снедекора, T — за законом Стьюдента, χ^2) — за законом хі-квадрат. Для узагальнення її можна позначити K.

Випадкову величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези називають *статистичним критерієм*. Наприклад, якщо перевіряють гіпотезу про рівність двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей, то в якості статистичного критерію K приймають відношення виправлених вибіркових дисперсій

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\,.$$

Ця величина випадкова, так як у різних вибірках дисперсії приймають різні (випадкові) значення. Відомо також, що таке відношення розподілено за законом Фішера–Снедекора.

Для перевірки гіпотези спочатку за даними вибірок обчислюють значення величин, які входять до статистичного критерію, а потім і сам критерій. Обчислене за вибірками значення статистичного критерію називають *спостережуваним значенням критерію* $k_{\text{спост}}$.

Множину можливих значень статистичного критерію розбивають на дві області: в одній знаходяться ті значення, при яких гіпотеза приймається, в іншій — ті, при яких вона відкидається.

Областю прийняття гіпотези називають сукупність значень статистичного критерію, при яких нульова гіпотеза приймається.

Критичною областю називають сукупність значень статистичного критерію, при яких нульова гіпотеза відкидається.

Критичними точками (*границями*) $k_{\text{кр}}$ називають точки, які відокремлюють область прийняття гіпотези від критичної області.

Розрізняють *односторонню* (*правосторонню* або *лівосторонню*) та двосторонню критичні області.

Якщо конкуруюча гіпотеза — правостороння, наприклад, $H_1 : M_x > \bar{x}_{\text{в}}$, то й критична область — правостороння. При правосторонній конкуруючій гіпотезі критична точка набуває додатних значень ($k_{\text{кр}} > 0$).

Якщо конкуруюча гіпотеза — лівостороння, наприклад, $H_1 : M_x < \bar{x}_{\text{в}}$, то й критична область — лівостороння. При лівосторонній конкуруючій гіпотезі критична точка набуває від'ємних значень ($k_{\text{кр}} < 0$).

Якщо конкуруюча гіпотеза — двостороння, наприклад, $H_1 : M_x \neq \bar{x}_{\text{в}}$, то й критична область — двостороння. При двосторонній конкуруючій гіпотезі визначаються дві критичні точки ($k_{\text{кр}1} < 0$, $k_{\text{кр}2} > 0$).

Для відшукання критичної області необхідно знайти критичні точки з відповідних умов:

$P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha$ (для правосторонньої області);

$P(K < k_{\text{кр}}) = \alpha$ (для лівосторонньої області);

$P(K < k_{\text{кр}}) + P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha$ (для двосторонньої області).

Як правило, для двосторонньої критичної області обирають симетричні відносно нуля точки. Тоді умову для двосторонньої критичної області можна записати у вигляді

$P(K > k_{\text{кр}}) = \dfrac{\alpha}{2}.$

Можна прийняти рішення щодо нульової гіпотези H_0 шляхом порівняння спостережуваного $k_{\text{спост}}$ та критичного значення критерію $k_{\text{кр}}$.

При правосторонній конкуруючій гіпотезі: якщо $k_{\text{спост}} > k_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

При лівосторонній конкуруючій гіпотезі: якщо $k_{\text{спост}} < -k_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

При двосторонній конкуруючій гіпотезі: якщо $k_{\text{спост}} > k_{\text{кр}}$ або $k_{\text{спост}} < -k_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

Для кожного критерію, тобто відповідного розподілу, складені таблиці, за якими знаходять $k_{\text{кр}}$ (див. Додатки Г, Д, Е).

На практиці часто потрібно порівняти дисперсії генеральних сукупностей.

Нехай є дві нормально розподілені сукупності X і Y. З цих генеральних сукупностей беруть вибірки об'ємами n_1 і n_2 та знаходять виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 і s_y^2.

Задамо рівень значущості α. За даними значень s_x^2, s_y^2 і α перевіримо нульову гіпотезу, яка полягає у тому, що генеральні дисперсії рівні:

$H_0 : D(X) = D(Y).$

Виправлені дисперсії є незміщеними оцінками генеральних дисперсій, тобто

$M(S_x^2) = D(X), \quad M(S_y^2) = D(Y).$

Тому нульова гіпотеза має вигляд:

$H_0 : M(S_x^2) = M(S_y^2).$

Отже, необхідно перевірити рівність математичних сподівань виправлених вибіркових дисперсій.

Припустимо, що сукупність X має більшу виправлену вибіркову дисперсію, а сукупність Y — меншу. В якості критерію перевірки нульової гіпотези візьмемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, тобто випадкову величину

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}\,.$$

Величина F має розподіл Фішера–Снедекора з ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$.

В якості конкуруючої гіпотези можна прийняти

$H_1 : D(X) > D(Y)$.

У цьому випадку критичну область знаходять з умови для правосторонньої області:

$$P\big(F > f_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)\big) = \alpha.$$

Критичну точку знаходять за таблицею розподілу Фішера–Снедекора (див. Додаток Д).

Приклад 2.7. *За двома незалежними вибірками об'ємами* $n_1 = 10$ *і* $n_2 = 15$ *знайдені виправлені вибіркові дисперсії* $s_x^2 = 12{,}5$, $s_y^2 = 7{,}3$. *При рівні значущості* $\alpha = 0{,}05$ *перевірити нульову гіпотезу про рівність дисперсій генеральних сукупностей:* $H_0 : D(X) = D(Y)$.

Розв'язання. Знаходимо $f_{\textit{спост}}$*:*

$$f_{\textit{спост}} = \frac{12{,}5}{7{,}3} = 1{,}71.$$

За таблицею Фішера–Снедекора (див. Додаток Д) при $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 10-1 = 9$, $k_2 = 15-1 = 14$ *знаходимо* $f_{\textit{кр}} = 2{,}65$. *Так як* $f_{\textit{спост}} < f_{\textit{кр}}$, *то немає підстав відкидати нульову гіпотезу.*

Приклад 2.8. *За двома незалежними вибірками об'ємами* $n_1 = 10$ *і* $n_2 = 15$, *які отримані з нормальних сукупностей* X *і* Y, *знайдені виправлені вибіркові дисперсії* $s_x^2 = 1{,}23$, $s_y^2 = 0{,}41$. *При рівні значущості* $\alpha = 0{,}1$ *перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі:*

$H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Розв'язання. Знаходимо $f_{\textit{спост}}$*:*

$$f_{\textit{спост}} = \frac{1{,}23}{0{,}41} = 3.$$

Тут критична область двостороння, тому рівень значущості приймаємо $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$. *За таблицею Фішера–Снедекора при* $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$ *знаходимо* $f_{кр} = 2{,}5$. *Так як* $f_{спост} > f_{кр}$, *то нульову гіпотезу відхиляємо. Якщо при цьому розглядається питання про вибір генеральної сукупності, то перевагу має та, у якій вибіркова дисперсія менша, тобто* Y.

Однією з важливих задач математичної статистики є встановлення теоретичного закону розподілу випадкової величини за даними вибірки. Припущення про вид закону розподілу може бути висунуте виходячи з теоретичних передумов, досвіду аналогічних попередніх досліджень, на основі графічного зображення емпіричного розподілу.

Критерієм узгодженості називають критерій перевірки гіпотези про вид закону невідомого розподілу.

Нехай для перевірки певного розподілу $f(x, \theta)$ з невідомими параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ є вибірка, об'єм якої n.

Якщо розглядається неперервний розподіл, то інтервал можливих значень випадкової величини розбивається на m неперетинних інтервалів, в кожному з яких фіксується кількість попадань варіант вибірки $n_1, n_2, \dots, n_m$.

Якщо відомі границі кожного інтервалу та прийнятий закон розподілу, то можна знайти ймовірність попадання p_i випадкової величини у кожний інтервал. Після цього з формули

$$p_i = \frac{n_i^*}{n}$$

знаходять теоретичну частоту появи події n_i^*:

$$n_i^* = np_i.$$

В якості критерію вибирають *критерій Пірсона*, в якому мірою розбіжності береться випадкова величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}\,. \tag{2.4.1}$$

Ця випадкова величина при $n \to \infty$ прямує до закону розподілу χ^2 з k ступенями вільності.

Кількість ступенів вільності визначається за формулою

$$k = m - 1 - r,$$

де m — кількість інтервалів, r — кількість параметрів розподілу, який пропонується в якості теоретичного.

Для експоненціального розподілу $k = m - 2$, для нормального $k = m - 3$.

Далі, за заданим рівнем значущості α та знайденою кількістю ступенів вільності k з таблиць розподілу χ^2 (див. Додаток Г) знаходять критичне значення $\chi^2_{\text{кр}}$, для якого виконується умова

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)) = \alpha.$$

Рішення щодо значущості допустимої гіпотези про розподіл випадкової величини приймається після порівняння обчисленого за формулою (2.4.1) значення $\chi^2_{\text{спост}}$ зі значенням $\chi^2_{\text{кр}}$.

Приклад 2.9. *Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності за отриманими в результаті дослідження даними (табл. 2.1).*

Табл. 2.1.

Номер інтер-валу	Границі інтер-валу		Частота	Сере-дина интер-валу	Квадрат	Різниці		Границі	
i	x_i	x_{i+1}	n_i	x_i^*	$(x_i^*)^2$	$x_i - \bar{x}_{\text{в}}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}_{\text{в}}^*$	z_i	z_{i+1}
1	4	6	15	5	25	-8,63	-6,63	-1,84	-1,41
2	6	8	26	7	49	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	25	9	81	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	30	11	121	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	26	13	169	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	21	15	225	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	24	17	289	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	20	19	361	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	13	21	441	7,37	9,37	1,57	1,99
Сума			$n = 200$						

В таблиці вказані границі часткових інтервалів і частоти попадання варіант у кожний інтервал n_i.

Розв'язання. Обчислюємо середні значення інтервалів

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

та знаходимо вибіркове середнє

$$\bar{x}_в^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^*.$$

Після підставлення відповідних значень отримуємо

$$\bar{x}_в^* = 12{,}63.$$

Далі знаходимо $\overline{(x_в^*)^2}$:

$$\overline{(x_в^*)^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_в^*)^2.$$

Підставивши дані, отримуємо

$$\overline{(x_в^*)^2} = 181{,}56.$$

Для знаходження вибіркової дисперсії скористаємось формулою

$$d_в = \overline{(x_в^*)^2} - (\bar{x}_в^*)^2:$$

$$d_в = 181{,}56 - 159{,}52 = 22{,}04.$$

Звідки $\sigma_в = 4{,}695$.

Для того щоб за таблицями функції Лапласа обчислити теоретичні ймовірності попадання випадкової величини в інтервали (x_i, x_{i+1}), необхідно знайти значення

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}_в^*}{\sigma_в}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_в^*}{\sigma_в}.$$

В табл. 2.1 записуємо спочатку різниці $x_i - \bar{x}_в^*$ і $x_{i+1} - \bar{x}_в^*$, а потім z_i і z_{i+1}.

Після цього складаємо ще одну таблицю розрахунку теоретичних частот (табл. 2.2). У цій таблиці $\Phi(z_i)$ — значення функції Лапласа для відповідного значення z_i.

Табл. 2.2.

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i^* = nP_i$
1	-1,84	-1,41	-0,4671	-0,4207	0,0464	9,28
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-03389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-03389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	1,99	0,4418	0,4767	0,0349	6,98

Тепер складаємо таблицю для визначення $\chi^2_{спост}$ *(табл. 2.3).*

Табл. 2.3.

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1	15	9,28	5,72	32,7	3,52
2	26	16,36	9,64	92,9	5,68
3	25	25,32	-0,32	0,1	0
4	30	32,12	-2,12	4,5	0,14
5	26	33,16	-7,16	52,3	1,58
6	21	30,02	-9,02	81,4	2,75
7	24	21,74	2,26	5,1	0,23
8	20	13,78	6,22	38,7	2,8
9	13	6,98	6,02	36,2	5,2

За формулою (2.4.1) знаходимо $\chi^2_{спост} = 21{,}9$.

Кількість ступенів вільності $k = 9 - 3 = 6$. *За рівнем значущості* $\alpha = 0{,}05$ *та* $k = 6$ *з таблиці розподілу* χ^2 *(див. Додаток Г) знаходимо* $\chi^2_{кр} = 12{,}6$. *Так як* $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$, *то нульова гіпотеза відкидається. Отже, необхідно або змінити вид закону розподілу, або повторити дослідження.*

Питання для самоконтролю

1. Яку гіпотезу називають статистичною?
2. Що таке основна та альтернативна гіпотези?
3. Що являють собою помилки першого роду?
4. У чому полягають помилки другого роду?
5. Що таке статистичний критерій?
6. Яку величину називають спостережуваним значенням критерію?
7. Що таке область прийняття гіпотези?
8. Що називають критичною областю і критичними точками?
9. Які є види критичних областей?
10. Умови знаходження критичних точок.
11. Правила прийняття рішення щодо нульової гіпотези.
12. Алгоритм порівняння дисперсій генеральних сукупностей.
13. Що таке критерій узгодженості?
14. Алгоритм перевірки гіпотези про теоретичний закон розподілу випадкової величини.

2.5. Кореляційно-регресійний аналіз

Поняття регресії і кореляції вже були введені в параграфі 1.6. У даному параграфі розглянемо кореляційно-регресійний аналіз з урахуванням того факту, що в математичній статистиці мають справу не з числовими характеристиками законів розподілу, а з їх оцінками.

В економіці у більшості випадків між змінними величинами існують залежності, коли кожному значенню однієї змінної відповідає не якесь одне певне значення, а множина можливих значень іншої змінної. Таку залежність називають *статистичною*. Статистичний зв'язок між двома випадковими величинами полягає в тому, що кожному значенню однієї випадкової величини відповідає певний умовний розподіл іншої.

Частковим випадком статистичної залежності є кореляційна залежність. *Кореляційна залежність* між двома випадковими величинами — це функціональний зв'язок між значеннями однієї з них та умовним математичним сподіванням іншої.

В якості оцінки умовного математичного сподівання приймають умовне середнє. *Умовним середнім* називають середнє арифметичне значень спостереження величини Y, які відповідають значенню $X = x$.

Приклад 2.10. *Знайти умовне середнє, якщо при $x = 2$ величина Y прийняла значення $y_1 = 3$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$.*

Розв'язання.

$$\bar{y}_x = \frac{3+7+8}{3} = 6.$$

Умовні середні $\bar{y}_x$ або $\bar{x}_y$ є функціями відповідно від x та y:

$$\bar{y}_x = g^*(x), \tag{2.5.1}$$

$$\bar{x}_y = h^*(y). \tag{2.5.2}$$

Рівняння (2.5.1) називають вибірковим рівнянням регресії Y на X, а рівняння (2.5.2) — вибірковим рівнянням регресії X на Y.

Для заданого значення $X = x$ спостерігається розсіювання Y навколо середнього значення $\bar{y}_x$. Мірою цього розсіювання є *умовна дисперсія Y* при даному x, яку позначають $\sigma^2_{y/x}$.

Основною задачею регресійного аналізу є встановлення форми та вивчення закономірності між змінними. Завданням кореляційного аналізу є виявлення зв'язку між випадковими величинами та оцінка його тісноти.

Особливе практичне значення має лінійна регресія. Слід зазначити, що деякі нелінійні зв'язки, які використовуються в економічних дослідженнях, можуть бути зведені до лінійної залежності шляхом алгебраїчних перетворень та введення замін змінних (Додаток Є).

Нехай є дві випадкові величини X, Y для яких проводиться спостереження. Після проведення n незалежних дослідів були отримані n пар незалежних чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n).

Будемо шукати лінійне вибіркове рівняння регресії Y на X у вигляді

$$\bar{y}_x = kx + b. \tag{2.5.3}$$

Так як за вибірковими даними можна отримати лише оцінки параметрів, то оцінку коефіцієнта k позначимо α, а оцінку b — через β, тобто

$$\bar{y}_x = \alpha x + \beta. \tag{2.5.4}$$

Параметри α і β знаходяться *методом найменших квадратів*.

Позначимо через y_i значення величини Y, яке відповідає x_i, а через $\bar{y}_i$ — значення $\bar{y}_x$, яке можна отримати з виразу (2.5.4) при $X = x_i$. Візьмемо різницю $\bar{y}_i - y_i$, піднесемо її до квадрату та просумуємо. Отримуємо функцію від α і β:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x + \beta - y_i)^2.$$

Для знаходження параметрів α і β скористаємось необхідними умовами екстремуму функції. Для цього візьмемо частинні похідні від отриманої функції за α і β та прирівняємо отримані вирази до нуля. Маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x + \beta - y_i) x_i = 0; \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x + \beta - y_i) = 0. \end{cases}$$

Після елементарних перетворень ця система матиме вигляд

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\alpha + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\alpha + n\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Звідси отримуємо

$$\alpha = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{2.5.6}$$

$$\beta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{2.5.7}$$

Для оцінки зв’язку між випадковими величинами зазвичай використовують вибірковий коефіцієнт кореляції.

Введемо до розгляду *вибірковий емпіричний кореляційний момент*

$$\mu^*_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

де $\bar{x}$ та $\bar{y}$ — вибіркові середні.

Розкриємо дужки та врахуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}.$$

Тоді

$$\mu^*_{xy} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}\bar{y}\right) = \\ = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}n\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} + n\bar{x}\bar{y}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right).$$

Та остаточно

$$\mu^*_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}. \tag{2.5.8}$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції є відношенням

$$r_{\text{в}} = \frac{\mu^*_{xy}}{\sigma_{x\text{в}}\sigma_{y\text{в}}}. \tag{2.5.9}$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевищує одиниці $|r_{\text{в}}| \leqslant 1$.

Якщо $r_{\text{в}} = 0$, то випадкові величини X і Y не пов’язані лінійною кореляційною залежністю, але інша залежність при цьому можлива.

Якщо $|r_{\text{в}}| = 1$, то випадкові величини X і Y строго пов’язані лінійною кореляційною залежністю.

Залежність тим ближче до лінійної, чим $|r_{\text{в}}|$ ближчий до одиниці.

Приклад 2.11. *У магазині постільної білизни протягом п’яти днів підрахували кількість покупок простирадл X та подушок Y:*

x_i	10	20	25	28	30
y_i	4	8	7	12	14

В даній таблиці значення X розміщені у порядку зростання.

Знайти вибіркове рівняння лінійної регресії та вибірковий коефіцієнт кореляції.

Розв'язання. Складемо таблицю підрахунків.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	10	4	100	40	16
2	20	8	400	160	64
3	25	7	625	175	49
4	28	12	784	336	144
5	30	14	900	420	196
сума	113	45	2809	1131	469

Знаходимо α і β:

$$\alpha = \frac{5 \cdot 1131 - 113 \cdot 45}{5 \cdot 2809 - 113^2} = 0{,}447,$$

$$\beta = \frac{2809 \cdot 45 - 113 \cdot 1131}{5 \cdot 2809 - 113^2} = -1{,}1.$$

Рівняння регресії запишемо у вигляді

$$\bar{y}_x = 0{,}447x - 1{,}1.$$

Обчислимо кореляційний момент:

$$\mu_{xy}^* = \frac{1131}{5} - \frac{113}{5}\frac{45}{5} = 22{,}8.$$

Знаходимо $\overline{y^2}$:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{469}{5} = 93{,}8.$$

Визначимо вибіркові дисперсії величин X і Y:

$$d_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{2809}{5} - \left(\frac{113}{5}\right)^2 = 51,$$

$$d_y = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{469}{5} - \left(\frac{45}{5}\right)^2 = 12{,}8.$$

Звідки $\sigma_{x в} = \sqrt{d_x} = 7{,}14$; $\sigma_{y в} = \sqrt{d_y} = 3{,}58$;

$$r_в = \frac{22{,}8}{7{,}14 \cdot 3{,}58} = 0{,}89.$$

За значенням вибіркового коефіцієнта кореляції можна зробити висновок про те, що випадкові величини X і Y досить тісно зв'язані лінійною кореляційною залежністю.

При великій кількості дослідів одне й те ж значення x_i може зустрічатись n_{xi} раз, а одне й те ж значення y_i відповідно n_{yi} раз. Одна й та ж пара значень (x_i, y_j) може спостерігатись n_{ij} раз. Тому спостережувані значення можуть бути згруповані. Для цього підраховують частоти та всі результати заносять у таблицю, яку зазвичай називають *кореляційною*. Прикладом кореляційної таблиці є табл. 2.4.

Табл. 2.4.

y_j	x_i				n_{yj}
	10	20	30	40	
4	5	–	7	14	26
6	–	6	6	4	16
8	3	15	–	–	18
n_{xi}	8	21	13	18	60

На перетині рядків та стовпців, тобто для пари значень (x_i, y_j), вказується частота n_{ij}. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{k_1} n_{xi} = \sum_{j=1}^{k_2} n_{yj} = n,$$

де k_1 — кількість значень x_i, k_2 — кількість значень y_j.

Для згрупованих даних рівняння лінійної регресії частіше записується з використанням вибіркового коефіцієнта кореляції, який може бути знайдений за формулою:

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1} \sum\limits_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_{x\text{в}}\sigma_{y\text{в}}}. \qquad (2.5.10)$$

Рівняння лінійної регресії можна записати у вигляді

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \alpha(x - \bar{x}).$$

Параметр α можна виразити через вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{в}}$:

$$\alpha = \frac{\sigma_{y\text{в}}}{\sigma_{x\text{в}}} r_{\text{в}}.$$

З урахуванням цього отримуємо рівняння лінійної регресії:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sigma_{y\text{в}}}{\sigma_{x\text{в}}} r_{\text{в}}(x - \bar{x}). \tag{2.5.11}$$

Приклад 2.12. *За даними табл. 2.4 знайти рівняння лінійної регресії.*

Розв'язання. Знайдемо величини, які необхідні для підставлення у формули (2.5.10) *і* (2.5.11).

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 8 + 20 \cdot 21 + 30 \cdot 13 + 40 \cdot 18}{60} = 26{,}8;$$

$$\bar{y} = \frac{4 \cdot 26 + 6 \cdot 16 + 8 \cdot 18}{60} = 5{,}7;$$

$$\overline{x^2} = \frac{10^2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 21 + 30^2 \cdot 13 + 40^2 \cdot 18}{60} = 828{,}3;$$

$$\overline{y^2} = \frac{4^2 \cdot 26 + 6^2 \cdot 16 + 8^2 \cdot 18}{60} = 35{,}7;$$

$$\sigma_{x\text{в}} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{828{,}3 - 26{,}8^2} = 10{,}5;$$

$$\sigma_{y\text{в}} = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{35{,}7 - 5{,}7^2} = 1{,}8;$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j = (5 \cdot 10 + 7 \cdot 30 + 14 \cdot 40) \cdot 4 +$$

$$+ (6 \cdot 20 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 40) \cdot 6 + (3 \cdot 10 + 15 \cdot 20) \cdot 8 = 8\,680.$$

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{в}}$*:*

$$r_{\text{в}} = \frac{8\,680 - 60 \cdot 26{,}8 \cdot 5{,}7}{60 \cdot 10{,}5 \cdot 1{,}8} = -0{,}43.$$

Запишемо рівняння лінійної регресії:

$$\bar{y}_x - 5{,}7 = -0{,}43 \cdot \frac{1{,}8}{10{,}5}(x - 26{,}8)$$

та остаточно

$$\bar{y}_x = -0{,}074x + 7{,}7.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке статистична залежність?
2. Яку залежність називають кореляційною?
3. Що таке умовне середнє?
4. Які основні задачі кореляційно-регресійного аналізу?
5. У чому полягає метод найменших квадратів знаходження рівняння лінійної регресії?
6. Що таке вибірковий коефіцієнт кореляції?
7. Які властивості вибіркового коефіцієнту кореляції?
8. Що таке кореляційна таблиця?
9. Як частіше записується рівняння лінійної регресії для згрупованих даних?

2.6. Дисперсійний аналіз

В багатьох економічних задачах необхідно оцінити ступінь впливу різних факторів (незалежних змінних) на досліджувану величину X. Наприклад, різні форми організації виробництва можуть суттєво впливати на прибуток підприємства. Іншим прикладом може бути задача оцінки ефективності різних видів добрив.

Даний фактор *Ф* можна поділити на ряд рівнів, в якості яких можуть бути, наприклад, різні форми організації виробництва або різні види добрив.

Суть методу полягає в тому, що дисперсія величини X поділяється на дві частини: одна частина — *факторна дисперсія*, яка викликана дією фактора *Ф*, а друга — *залишкова дисперсія*, яка обумовлена випадковими причинами. Якщо з'ясовується, що факторна дисперсія невелика порівняно із залишковою, то фактор *Ф* не впливає суттєво на величину X.

Якщо розглядається один фактор, то дисперсійний аналіз називають *однофакторним*, якщо більше одного — *багатофакторним*.

Розглянемо схему однофакторного дисперсійного аналізу.

Нехай на досліджувану величину X впливає фактор *Ф*, який має p рівнів. На кожному рівні, тобто для одного з видів фактору *Ф* проводять вимірювання величини X. Кількість таких вимірювань для всіх рівнів однакова та дорівнює q.

Складемо таблицю отриманих результатів вимірювань. У останньому рядку розміщені середні значення вимірювань для кожного рівня (групові середні).

Номер вимірювання	Рівні фактора			
	Φ_1	Φ_2	$\dots$	Φ_p
1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	x_{q1}	x_{q2}	$\dots$	x_{qp}
Групова середня	$\bar{x}_{г1}$	$\bar{x}_{г2}$	$\dots$	$\bar{x}_{гp}$

Загальне середнє є величиною, яка дорівнює

$$\bar{x} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_{гj}.$$

Загальною сумою квадратів відхилень виміряних значень x_{ij} від загального середнього називають вираз

$$r_{заг} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2. \tag{2.6.1}$$

Факторною сумою відхилень групових середніх від загального середнього називають вираз

$$r_{факт} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{гj} - \bar{x})^2. \tag{2.6.2}$$

Залишковою сумою відхилень спостережуваних значень від групових середніх є сума

$$r_{зал} = \sum_{i=1}^{q}(x_{i1} - \bar{x}_{г1})^2 + \sum_{i=1}^{q}(x_{i2} - \bar{x}_{г2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q}(x_{ip} - \bar{x}_{гp})^2. \tag{2.6.3}$$

Зазвичай залишкову суму знаходять як різницю

$$r_{зал} = r_{заг} - r_{факт}. \tag{2.6.4}$$

Після підрахунку $r_{\text{заг}}$, $r_{\text{факт}}$ та $r_{\text{зал}}$ можна знайти факторну і залишкову дисперсії.

Так як факторна дисперсія залежить від p складових і є зміщеною оцінкою, то формула для незміщеної оцінки факторної дисперсії має вигляд

$$s^2_{\text{факт}} = \frac{r_{\text{факт}}}{p-1}\,. \tag{2.6.5}$$

Залишкова дисперсія залежить від x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, q; j = 1, 2, \ldots, p)$, тобто від pq складових. Отже, для незміщеної залишкової дисперсії маємо вираз

$$s^2_{\text{зал}} = \frac{r_{\text{зал}}}{p(q-1)}\,. \tag{2.6.6}$$

В формулі (2.6.6) кількість ступенів вільності порівняно з pq зменшено на p, так як у кожній групі за рахунок групового середнього кількість ступенів вільності зменшується на одиницю.

Приклад 2.13. *Проведені вимірювання для кожного з трьох рівнів деякого фактора Ф. В якості рівня значущості приймається величина $\alpha = 0{,}05$. Перевірити нульову гіпотезу про незначний вплив фактора Ф.*

Вихідні дані розміщені у таблиці.

Номер вимірювання	Рівні фактора		
	Ф$_1$	*Ф*$_2$	*Ф*$_3$
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\bar{x}_{\text{г}j}$	35	25	27

Розв'язання. Знаходимо загальну середню

$$\bar{x} = \frac{35 + 25 + 27}{3} = 29.$$

Обчислюємо різниці $y_{ij} = x_{ij} - \bar{x}$ і квадрати цих різниць та розміщуємо результати в таблицю:

Номер вимірювання	Рівні фактора					
	Φ_1		Φ_2		Φ_3	
	y_{11}	y_{11}^2	y_{12}	y_{12}^2	y_{13}	y_{13}^2
1	9	81	-9	81	-8	64
2	7	49	-5	25	-7	49
3	6	36	-3	9	2	4
4	2	4	1	1	5	25
Сума	–	170	–	116	–	142

Потім знаходимо загальну і факторну суми:

$$r_{\text{зал}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} y_{ij}^2 = 170 + 116 + 142 = 428,$$

$$r_{\text{факт}} = 4\sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_{\text{г}j} - \bar{x})^2 = 4\big((35-29)^2 + (25-29)^2 + (27-29)^2\big) = 224.$$

Обчислюємо залишкову суму

$$r_{\text{зал}} = r_{\text{заг}} - r_{\text{факт}} = 428 - 224 = 204.$$

Визначаємо факторну і залишкову дисперсії:

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{r_{\text{факт}}}{p-1} = \frac{224}{2} = 112,$$

$$s_{\text{зал}}^2 = \frac{r_{\text{зал}}}{p(q-1)} = \frac{204}{3\cdot 3} = 22{,}67.$$

Для перевірки нульової гіпотези скористаємось критерієм Фішера–Снедекора, тобто випадковою функцією

$$F = \frac{S_{\text{б}}^2}{S_{\text{м}}^2},$$

яка дорівнює відношенню вибіркових дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин. У даному випадку припускаємо, що факторна і залишкова дисперсії розподілені нормально.

Знаходимо спостережуване значення критерію

$$f_{\text{спост}} = \frac{s^2_{\text{факт}}}{s^2_{\text{зал}}} = \frac{112}{22{,}67} = 4{,}96.$$

За таблицею розподілу Фішера–Снедекора для $\alpha = 0{,}05$ *та ступенів вільності* $k_1 = p - 1 = 2$, $k_2 = p(q-1) = 3\dot{3} = 9$ *знаходимо* $f_{\text{кр}}(0{,}05; 2; 9) = 4{,}26$ *(див. Додаток Д).*

Так як $f_{\text{кр}} < f_{\text{спост}}$, *то робимо висновок про те, що фактор суттєво впливає та нульову гіпотезу відхиляємо.*

У деяких випадках для розрахунку $r_{\text{заг}}$ і $r_{\text{факт}}$ зручніше користуватись іншими співвідношеннями.

Перетворимо вираз для $r_{\text{заг}}$:

$$r_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}^2 - 2x_{ij}\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2 - 2\bar{x}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij} + pq\bar{x}^2 = \\ = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2 - 2\bar{x}\bar{x}pq + pq\bar{x}^2,$$

звідки

$$r_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2 - pq\bar{x}^2. \qquad (2.6.7)$$

Перетворимо також вираз для $r_{\text{факт}}$:

$$r_{\text{факт}} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{\text{г}j} - \bar{x})^2 = q\left(\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_{\text{г}j}^2 - 2\bar{x}\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_{\text{г}j} + p\bar{x}^2\right),$$

звідки

$$r_{\text{факт}} = q\left(\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_{\text{г}j}^2 - p\bar{x}^2\right). \qquad (2.6.8)$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке факторна і залишкова дисперсії?
2. Який дисперсійний аналіз називають однофакторним?

3. Що називають загальною сумою квадратів відхилень виміряних значень?
4. Що таке факторна сума відхилень групових середніх?
5. Що називають залишковою сумою відхилень спостережуваних значень?
6. Як визначається факторна дисперсія?
7. Як визначається залишкова дисперсія?

Додатки

Додаток А

Значення функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	00096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Нормована функція Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49634	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Додаток В

Значення чисел q в залежності від об'єму вибірки n та надійності γ для визначення довірчого інтервалу середнього квадратичного відхилення σ

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
7	0,92	–	–	25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	–	–	30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	–	–	35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	–	–	40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	–	45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	–	50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	–	60	0,188	0,269	0,38
14	0,48	0,78	–	70	0,174	0,245	0,34
15	0,46	0,73	–	80	0,161	0,226	0,31
16	0,44	0,70	–	90	0,151	0,211	0,29
17	0,42	0,66	–	100	0,143	0,198	0,27
18	0,39	0,60	0,92	150	0,115	0,160	0,211
19	0,39	0,60	0,92	200	0,099	0,136	0,185
20	0,37	0,58	0,88	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Г

Критичні точки розподілу χ^2 (хі-квадрат)

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,5	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,98	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,6	14,0	12,3	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Додаток Д

Значення чисел $f_{\text{кр}}$, при яких з ймовірністю не більше 5% випадкова величина F, що розподілена за законом Фішера–Снедекора, перевищує величину $f_{\text{кр}}$

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	9	12	∞
1	161	200	216	225	239	234	239	240	244	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,38	19,41	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,81	8,74	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	6,00	5,91	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,77	4,68	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,10	4,00	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,68	3,57	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,39	3,28	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,18	3,07	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	3,02	2,91	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,90	2,79	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,80	2,69	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,71	2,60	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,65	2,53	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,59	2,48	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,54	2,42	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,49	2,38	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,46	2,34	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,42	2,31	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,39	2,28	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,37	2,25	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,34	2,23	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,32	2,20	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,30	2,18	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,28	2,16	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,27	2,15	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,25	2,13	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,24	2,12	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,22	2,10	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,21	2,09	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,12	2,00	1,52
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,88	1,75	1,00

Додаток Е

Критичні точки розподілу Стьюдента (значення $t_{\text{кр}}$, які відповідають ймовірності $\alpha = P(|T| > t_{\text{кр}})$ з k ступенями вільності)

k	α				
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,33	1,64	2,11	2,57	2,90
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Додаток Є

Зведення деяких функціональних залежностей до лінійної виду $y = kx + b$

Функціональна залежність	Аналітичний вираз	Перетворення	Позначення
Степенева	$y = ax^{\lambda}$	$\ln y = \lambda \ln x + \ln a$	$\ln x = X$, $\ln y = Y, \lambda = K$, $\ln a = B$
Показникова	$y = ap^{x}$	$\ln y = x \ln p + \ln a$	$\ln y = Y$, $\ln p = K$, $\ln a = B$
Модифікована експоненціальна	$y = ae^{kx}$	$\ln y = kx + \ln a$	$\ln y = Y$, $\ln a = B$
Логістична	$y = \dfrac{p}{1 + ae^{-kx}}$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = -kx + \ln a$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = Y$, $\ln a = B$
	$y = \dfrac{p}{1 + \left(\dfrac{a}{x}\right)^{k}}$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = -k \ln x + k \ln a$	$\ln x = X$, $\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = Y$, $k \ln a = B$
Ірраціональна	$y = \sqrt[n]{kx + b}$	$y^{n} = kx + b$	$y^{n} = Y$
Гіперболічна	$y = \dfrac{1}{kx + b}$	$\dfrac{1}{y} = kx + b$	$\dfrac{1}{y} = Y$
Дрібно-раціональна	$y = \dfrac{1}{(kx + b)^{n}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}} = kx + b$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}} = Y$
Функція Джонсона	$\ln y = -\dfrac{p}{q + x} + c$	$\dfrac{1}{\ln y - c} = -\dfrac{1}{p}x - \dfrac{q}{p}$	$-\dfrac{1}{p} = K$, $-\dfrac{q}{p} = B$, $\dfrac{1}{\ln y - c} = Y$

Бібліографія

1. Advanced Linear Models for Data Science 1: Least Squares Url : https://www.coursera.org/learn/linear-models
2. Advanced Linear Models for Data Science 2: Statistical Linear Models Url : https://www.coursera.org/learn/linear-models-2
3. John E. Freund's Mathematical Statistics with Applications: Pearson New International Edition. Pearson Education, 2013. 480 p.
4. Klenke A. Probability theory: a comprehensive course (3nd ed.). New York, Berlin : Springer, 2020. 716 p.
5. Neskorodieva T., Fedorov E. Izonin I. Forecast Method for Audit Data Analysis by Modified Liquid State Machine. Proceedings of the 1st International Workshop on Intelligent Information Technologies & Systems of Information Security (IntelITSIS 2020). In: CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2623. P. 25-35. URL : http://ceur-ws.org/Vol-2631/paper11.pdf
6. Бідюк П. І. Прикладна статистика / П. І. Бідюк, О. М. Терентьєв, Т. І. Просянкіна–Жарова. Вінниця : ПП «ТД «Едельвейс і К», 2013, 288 с.
7. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
8. Горбачук В. М., Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 351 с.

9. Дослідження операцій. Практичний курс : навч. посіб. / В. Є. Березовський, М .М. Гузій, В. М. Дякон, Л. Є. Ковальов, М. О. Медведєва. Умань : Видавець «Сочінський», 2011. 238 с.
10. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Математичне програмування : навч. посіб. 2-ге вид. К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2007. 497 с.
11. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : підручник. К. : АНФ ГРУП, 2013. 603 с.
12. Електронний посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики. Url : http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/
13. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник. Видання четверте, доповнене. К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2020. 750 с.
14. Збірник задач з теорії ймовірностей: навч. посібник / П. І. Каленюк, П. А. Костробій, Ю. К. Рудавський та ін. / за ред. проф. П. І. Каленюка. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. 248 с.
15. Математична статистика: навч. посіб./ П. І. Бідюк, Б. П. Ткач, Т. Харрінгтон. К : ДП «Вид. дім. Персонал», 2018. 348 с.
16. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. К. : Вид-во «Ліра-К», 2008. 536 с.
17. Найко Д. А, Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. ВНАУ. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2020. 384 с.
18. Овчинников П. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 : Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. 3-тє вид., випр. К. : Техніка, 2004. 792 с.
19. Прикладна математика на основі MathCAD : Навчальний посібник / В. Г. Дзісь, О. В. Левчук, О. М. Дячинська. Вінниця : ВНАУ, 2020. 378 с.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Л. Є. Ковальов, С. В. Лещенко, В. П. Мелех,
Т. В. Нескородєва, І. І. Побережець

Основи теорії ймовірностей і математичної статистики

Видається в авторській редакції

Підписано до друку 26.05.2025. Формат 60х84/16.
Папір офсет. Друк цифров. Ум. друк. арк. 6,68.
Тираж 300 пр. Зам. № 856 (0910)

Видавець і виготівник «Сочінський М. М.»
20300, м. Умань, вул. Тищика, 18/19
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 2521 від 08.06.2006.
тел. (093) 117-08-86, (067) 104-64-88
vizavi-print.jimdo.com
e-mail: vizavi008@gmail.com