

ПРО ПЛОЩУ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ ТА ЧИСЛО π

В. Є. Березовський, С. В. Лещенко, Р. В. Ненька

Уманський національний університет садівництва, Умань, Україна

berez.volod@rambler.ru, leshchenko_63@mail.ru, ruslana66@i.ua

Відомо, що площу плоскої фігури, яка обмежена зверху графіком неперервної, невід'ємної функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$ ($b > a$) можна знайти за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Надалі будемо вважати, що поняття визначеного інтегралу введено в розгляд класичним чином. На формулу (1) спробуємо подивитися як на означення площі плоскої фігури, при цьому не проводячи строгі математичні викладки і не розглядаючи загальні випадки.

Для спрощення припустимо, що плоска фігура D обмежена гладкою, замкненою кривою без точок само перетину.

На деякій прямій L вкажемо напрям відліку і виберемо в якості початку відліку точку O , яка розташована зліва відносно фігури D .

Нехай пряма F_t (t — довільне задане число) перпендикулярна до прямої L і перетинає її в точці, яка віддалена від точки O на відстані t .

Для спрощення будемо також вважати, що плоска фігура D розташована між прямими F_a і F_b ($b > a$). Позначимо через $S(t)$ ту частину площі фігури D , яка лежить зліва від прямої F_t (рис. 1).

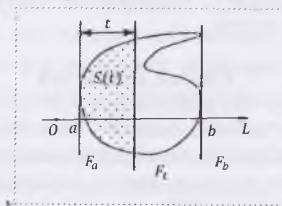


Рис. 1

Очевидно, що площа плоскої фігури D дорівнює $S = S(b) - S(a)$.

В силу формули Ньютона-Лейбніца маємо

$$S = \int_a^b S'(t) dt.$$

Звичайно, будемо вважати, що функція $S(t)$ має обмежену, кусково-неперервну похідну.

У силу того, що $S(t) = 0$ при $t < a$ і $S(t) = S$ при $t > b$, можна записати

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} S'(t) dt.$$

З'ясуємо, що собою являє функція $S'(t)$.

Позначимо через $l(t)$ довжину перетину плоскої фігури D з прямою F_t (перетином є або порожня множина, або окремі точки, або відрізок, або декілька відрізків).

Нехай Δt досить мале додатне число. Тоді різниця $S(t + \Delta t) - S(t)$ дорівнює площі тієї частини плоскої фігури D , яка знаходиться між прямими F_t і $F_{t+\Delta t}$ (рис.2).

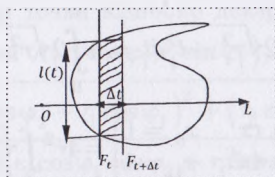


Рис.2

При досить малих значеннях Δt , очевидно, має місце наближена рівність (площі наближено рівні)

$$S(t + \Delta t) - S(t) \approx l(t) \Delta t,$$

або

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \approx l(t).$$

Тому

$$l(t) = S'(t).$$

Отже,

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) dt. \quad (2)$$

Цікавим є порівняння формули (2) з формулою для знаходження об'ємів тіл за допомогою площ поперечних перерізів

$$V = \int_a^b \theta(x) dx.$$

Формулу (2) можна, в принципі, вважати означенням площі плоскої кривої.

В якості прикладу обчислимо площу круга, обмеженого колом $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 3).

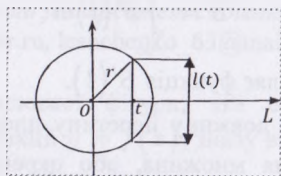


Рис.3

Очевидно, застосувавши теорему Піфагора, маємо

$$l(t) = 2\sqrt{r^2 - t^2}, \quad -r \leq t \leq r.$$

Тоді

$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - t^2} dt = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = rx & x_0 = 0 \\ dt = 4dx & x_1 = 1 \end{array} \right| = 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Число π за означенням визначимо як площу круга радіуса 1.

Отже,

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$