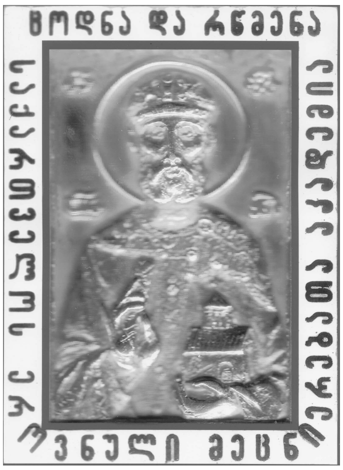
ISSN 1512–1712

Национальная академия наук Грузии

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 96

ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ



Тбилиси
2015

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Гиоргадзе (Национальная академия наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)
Е. С. Голод (Московский государственный университет)
А. Д. Иоффе (Технион, Израиль)
И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе)
А. Лашхи (Грузинский технический университет)
А. В. Овчинников (Московский государственный университет)
В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
А. В. Сарычев (Университет Флоренции)
Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе)
Г. Г. Чоговадзе (Национальная академия наук Грузии)

©Национальная академия наук Грузии, 2015

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 96

ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

საქართველოს ეროვნული მეცნიერებათა აკადემია
თბილისი
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том xx (2015). С. 81–96

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ

© 2015 г. Й. МИКЕШ, В. БЕРЕЗОВСКИЙ, Е. СТЕПАНОВА, Г. ХУДА

Аннотация. Работа посвящена дальнейшему исследованию теории геодезических отображений и их обобщений, в том числе конформных, голоморфно-проективных, F-планарных и почти геодезических отображений пространств аффинной связности.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Работа посвящена дальнейшему исследованию теории геодезических отображений и их обобщений, в том числе конформных, голоморфно-проективных, F-планарных и почти геодезических отображений пространств аффинной связности. Эти теории идейно восходит к работе Т. Леви-Чивита [115]. Он поставил и решил (в специальной системе координат) задачу о нахождении римановых пространств с общими геодезическими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем.

Затем теория геодезических отображений развивалась в работах Томаса, Вейля, Широкова, Кагана, Врэнчану, Рашевского, Шапиро, Веденяпина, Солодовникова, Синюкова, Микеша и др. [21, 27, 40, 42, 43, 48, 48, 55, 96, 112, 119, 129, 142, 143].

А. З. Петровым [41] было введено понятие квазигеодезических отображений. Специальными квазигеодезическими отображениями, в частности, являются голоморфно-проективные отображения келеровых пространств, рассмотренные первоначально Оцуки, Тасиро [130, 141], Прванович [131] и др. (см. [1, 25, 28, 34, 48, 49, 61, 62, 111, 112, 120, 129, 142, 143]).

Естественным обобщением этих классов отображений являются почти геодезические отображения, введенные Н. С. Синюковым (см. [44–49]). Им же выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3.

В последнее время были получены новые результаты, которые не включены в обзорные статьи Н. С. Синюкова [49], Й. Микеша [119, 120], а также работы [19, 105].

Предполагаем, что все изучаемые пространства односвязны; предполагаем, что размерность пространств $n > 2$, если не сказано иначе. Исследуемые геометрические объекты предполагаем непрерывными и достаточно гладкими.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Чешской Республики POST-UP CZ 1.07/2.3.00/30.0004, CZ 1.07/2.3.00/30.0035 и IGA-PrF-2015-010.

ISSN 1512–1712 © Национальная академия наук Грузии, 2015

2. Первый интеграл геодезических

Задача о первом интеграле геодезических, как показано в многих работах (см., например, [69, 89, 96, 97]), тесно связана с аффинными, геодезическими, голоморфно-проективными и другими (в том числе псевдо-римановыми) отображениями римановых пространств. Собственно римановы и псевдо-римановы пространства V_n будем кратко называть *римановы*.

Пусть A_n — пространство с аффинной связностью ∇. Кривая $\gamma : x = x(s)$ пространства A_n называется *геодезической*, если она является интегральной кривой в A_n дифференциального уравнения

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0, \tag{1}$$

где $\dot{x}$ — касательный вектор γ, точка обозначает дифференцирование относительно канонического параметра s кривой γ (см. [42, 48, 69, 96, 97, 119, 129, 143]).

Первым квадратичным интегралом геодезических (однородным) называется выражение

$$a(\dot{x}, \dot{x}) = \text{const}, \tag{2}$$

где a — симметрическая билинейная форма на A_n.

Дифференцированием (21) получим

$$\nabla_{\dot{x}} a(\dot{x}, \dot{x}) = 0. \tag{3}$$

Билинейная форма допускает первый квадратичный интеграл геодезических тогда и только тогда, когда условие

$$\nabla_X a(X, X) = 0 \tag{4}$$

(см. [69,96]) выполняется для всех касательных векторов $X \in TA_n$, что равносильно выполнению уравнения

$$\nabla_X a(Z, Y) + \nabla_Y a(X, Z) + \nabla_Z a(Y, X) = 0$$

для всех касательных векторов $X, Y, Z \in TA_n$.

Если пространство A_n является римановым пространством V_n с метрикой g, то $\text{const} \cdot g$ является первым квадратичным интегралом геодезических. Этот интеграл принято называть *тривиальным*.

Канонический геодезический каркас $G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Связную область V в V_n будем называть *каноническим геодезическим каркасом*, если ее граница ∂V является липшицевой кривой (см. [98, с. 46]) и в V выполняются следующие условия.

Пусть x — некоторая внутренняя точка области V, т.е. $x \in \operatorname{int} V$. Метрика g пространства V_n в этой точке является билинейной формой $g_x : T_x \times T_x \to \mathbb{R}$, где T_x — касательное пространство в точке x, $\dim T_x = n$. С другой стороны $g_x : S^2T_x \to \mathbb{R}$, где S^2T_x — симметрическая часть второго порядка пространства T_x. Очевидно,

$$\dim S^2T_x = N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Построим в точке x такие векторы $v_1, v_2, \dots, v_N \in T_x$, что

(1) $v_1 \circ v_1$, $v_2 \circ v_2$, $\dots$, $v_N \circ v_N$ образуют базис S^2T_x,

(2) $g(v_i, v_i) \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Очевидно,

$$\bar{g}(v_i, v_i) = k\, g(v_i, v_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{g} = k\, g.$$

Далее построим N геодезических путей $\gamma_i(s)$, $i = 1, \dots, N$, для которых $x \in \gamma_i$ и векторы v_i являются касательными к γ_i в точке x. Построим точки x_i на каждой из этих геодезических γ_i и предположим, что дуга геодезической (x, x_i) находится целиком в области V.

Через γ_{ij} обозначим геодезические дуги, соединяющие точки x_i и x_j. Предположим, что γ_{ij} являются неизотропными и дуги (x_i, x_j) находятся в области V. Эта система геодезических γ_{ij} может быть «неполной». Достаточно, чтобы любые две точки x_i и x_j было можно соединить геодезическими дугами этой системы. Это означает, что необязательно, чтобы все точки x_i и x_j были соединены геодезической γ_{ij} (так как она может не существовать). Этим конструкция канонического геодезического каркаса завершена.

Построенный канонический геодезический каркас будем обозначать $G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Отметим, что существует такая открытая окрестность $U \subset V$ данной точки x, что для всех точек $y \in U$ существуют неизотропные геодезические дуги ($\subset V$), соединяющие y с точками x_i, для которых касательные векторы являются базисом в S^2T_y.

Теорема 1 (Худа, Микеш [89]). *Пусть в V_n существует выше описанная область V и в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, выполняются условия*

$$a_{x_i} = k_i\, g_{x_i},$$

Тогда первый интеграл геодезических является тривиальным, т.е. $a = k\, g$, $k = \mathrm{const}$, на всем пространстве V_n.

3. Геодезические отображения при начальных условиях

Напомним определение, восходящее к Бельтрами и Леви-Чивита (см. [48, 96, 97, 119, 129]).

Определение 1. Диффеоморфизм между (псевдо-) римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ называют *геодезическим отображением*, если при нем геодезические кривые V_n отображаются на геодезические линии $\bar{V}_n$. Геодезическое отображение называется *аффинным*, если сохраняютсяя канонические параметры геодезических линий.

Вопросам геодезических, голоморфно-проективных F-планарных отображений «в целом» посвящено много работ (см. [119, 120]). Большинство этих исследований проведено для собственно римановых пространств без края.

Используя метод А. Швеца [68], Й. Микеш (см. [117,119,120,129]) получил следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть компактное ориентируемое собственно риманово пространство V_n с краем ∂V допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$. Если во всех точках $m \in V_n$ секционная кривизна неположительна и во всех точках $m \in \partial V$ выполняется условие $\bar{g}(X, Y) = f\, g(X, Y)$ для метрик V_n и $\bar{V}_n$, где X, Y — произвольные касательные векторы, то это отображение является гомотетическим.*

Эта теорема была обобщена в нескольких направлениях. И. Гинтерлейтнер [102] доказала следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть V_n — компактное собственно риманово пространство без края. Если в каждой точке $x \in V_n$ секционные кривизны удовлетворяют неравенству $K(e_i, e_j) \leqslant 0$ для двумерных направлений $e_i \wedge e_j$ ортогонального базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ главных направлений тензора Риччи, то любое геодезическое отображение V_n является аффинным.*

Теорема 4. *Пусть V_n — компактное собственно риманово пространство без края. Если в каждой точке $x \in V_n$ секционные кривизны удовлетворяют неравенству $K(e_i, e_j) \leqslant 0$ и если существует точка x_0, в которой $K(e_i, e_j) < 0$ для двумерных направлений $e_i \wedge e_j$ ортогонального базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ главных направлений тензора Риччи, то любое геодезическое отображение V_n является гомотетическим.*

Поскольку известно, что существование геодезических отображений связано с существованием первого интеграла геодезических (см. [69, 97, 129]), то из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть пространство V_n с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в V_n существует описанная выше область V канонического геодезического каркаса и в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$,* *выполняются условия*

$$\bar{g}_{x_i} = k_i\, g_{x_i},$$

то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k\, g$, $k = \mathrm{const}$, *на всем пространстве* V_n.

Детальным анализом основных уравнений геодезических отображений Синюкова (см. [48,129]) доказана следующая теорема.

Теорема 6 (Худа, Микеш [92]). *Пусть пространство* V_n *с метрическим тензором* g *допускает геодезическое отображение на пространство* $\bar{V}_n$ *с метрическим тензором* $\bar{g}$. *Если в точке* x_0, *в окрестности которой* V_n *не имеет постоянной кривизны, имеет место равенство* $\bar{g} = k\, g$, *то отображение является гомотетическим, т.е.* $\bar{g} = k\, g$, $k = \mathrm{const}$, *на всем пространстве* V_n.

4. F-Планарные отображения

4.1. Определение и основные уравнения. Как в теории геодезических отображений, подобные результаты имеют место и для более общих отображений, в частности, для голоморфно-проективных и более общих F_2-планарных отображений.

Рассмотрим n-мерное аффинно-связное пространство A_n со связностью ∇ без кручения и с аффинорной структурой F, т.е. с тензорным полем типа $(1,1)$.

Кривая $x(t)$ называется *F-планарной* (см. [38,120]), если ее касательный вектор $\lambda = dx(t)/dt$ при параллельном перенесении остается в площадке, образованной касательным вектором λ и сопряженным ему вектором $F\lambda$, т.е.

$$\nabla_\lambda \lambda = \varrho_1\, \lambda + \varrho_2\, F\lambda,$$

где ϱ_1, ϱ_2 — функции параметра t, ∇_λ — ковариантная производная вдоль вектора λ.

F-Планарные кривые естественным образом обобщают геодезические, аналитически планарные (см. [48,119,120,143]) и квази-геодезические кривые (см. [42]).

Рассмотрим два пространства A_n и $\bar{A}_n$ аффинной связности без кручения со связностями ∇ и $\bar{\nabla}$ соответственно. На A_n и $\bar{A}_n$ определены аффинорные структуры F и $\bar{F}$ соответственно.

Определение 2. ([38,120]) Диффеоморфизм $f : A_n \to \bar{A}_n$ называется *F-планарным отображением*, если при f все F-планарные кривые пространства A_n отображаются на $\bar{F}$-планарные кривые $\bar{A}_n$.

Примем следующее соглашение: при диффеоморфизме f будем предполагать, что ∇, $\bar{\nabla}$, F и $\bar{F}$ определены на одном многообразии A_n.

При условии, что $\operatorname{rank}\|F - \varrho I\| > 1$ во всех точках $x \in A_n$ (ϱ — некоторый инвариант, I — тождественный оператор), отображение A_n на $\bar{A}_n$ является F-планарным тогда и только тогда, когда условия

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X\psi(Y) + Y\psi(X) + FX\varphi(Y) + FY\varphi(X), \tag{5}$$

$$\bar{F}X = \alpha F X + \beta X \tag{6}$$

выполняются для всех касательных векторов X и Y, где ψ и φ — линейные формы, α и β — инварианты (см. [38,103,118,120]).

F-Планарные отображения обобщают геодезические, квазигеодезические, голоморфно-проективные, планарные и почти геодезические (типа π_2) отображения (см. [38,42,45–49,120]). Если A_n допускает F-планарное отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрикой $\bar{g}$, то условия (5) равносильны уравнениям

$$\nabla_Z \bar{g}(X,Y) = 2\psi(Z)\bar{g}(X,Y) + \psi(X)\bar{g}(Y,Z) + \psi(Y)\bar{g}(X,Z) + \\ + \varphi(Z)(\bar{g}(X,FY) + \bar{g}(Y,FX)) + \varphi(X)\bar{g}(Y,FZ) + \varphi(Y)\bar{g}(X,FZ). \tag{7}$$

При условии $\operatorname{rank}\|F - \varrho I\| > 5$ уравнения (7) можно привести к виду системы типа Коши, общее решение которой зависит от $r \leqslant n(n+5)/2 + 3$ параметров (см. [118,120]).

Известно, что (6) и (7) при $\varphi = 0$ характеризуют *геодезическое отображение* (*уравнения Леви-Чивита*), и при $\psi = \varphi = 0$ — *аффинное отображение* (или *тривиальное геодезическое*; см. [42, 48, 69, 96, 97, 119, 120, 129, 143]).

4.2. F_2-Планарные отображения и их первый квадратичный интеграл геодезических. При изучении вопросов моделирования физических полей А. З. Петров (см. [41]) ввел в рассмотрение *квази-геодезические отображения* псевдоримановых пространств $V_4 \to \bar{V}_4$. По существу, эти отображения определяются тем, что все геодезические пространства V_4 отображаются на квазигеодезические кривые пространства $\bar{V}_4$ (в нашей терминологии — F-планарные) при дополнительных условиях.

Если пространство V_4 допускает квазигеодезическое отображение на $\bar{V}_4$, то для всех X выполняются условия (5) и $\bar{g}(X, FX) = 0$, причем эти условия не являются достаточными. Я. Шапиро [60] обобщил идею квазигеодезических отображений на случай $A_n \to \bar{A}_n$. Многие геометры изучали квазигеодезические отображения $A_n \to \bar{A}_n$ и $A_n \to \bar{V}_n$ в смысле Шапиро. В [113] отображения (псевдо)римановых пространств $V_n \to \bar{V}_n$ при выполнении условий (5) и $\bar{g}(X, FX) = 0$ названы квазигеодезическими.

F-Планарное отображение A_n на (псевдо)риманово пространство $\bar{V}_n$ называется *F_1-планарным*, если для всех X выполняется условие

$$\bar{g}(X, FX) = 0.$$

Доказано, что основные уравнения F_1-планарных отображений A_n на $\bar{V}_n$ можно привести к системе типа Коши, и общее решение зависит от $r \leqslant (n+1)(n+2)/2$ числовых параметров.

Далее предполагаем, что форма $\psi(X)$ является градиентом некоторой функции Ψ, т.е.

$$\psi(X) = \nabla_X \Psi.$$

Такие F_1-планарные отображения называются *F_2-планарными* (см. [118]).

Теорема 7. *Пусть пространство A_n допускает F_2-планарное (или геодезическое) отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$. Тогда*

$$\exp(-4\Psi(x))\, \bar{g}(\dot{x}, \dot{x}) \tag{8}$$

является первым квадратичным интегралом геодезических пространства A_n, где $\dot{x} = dx/ds$ — касательный вектор геодезических $x(s)$ пространства A_n и s — канонический параметр.

4.3. Об F_2-планарных отображениях при специальных краевых условиях. Используя метод А. Швеца [68], Й. Микеш (см. [117, 119, 120, 129]) получил следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть компактное ориентируемое собственно риманово пространство V_n с краем ∂V допускает F_2-планарное отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$. Если во всех точках $m \in V_n$ секционная кривизна неположительна и во всех точках $m \in \partial V$ выполняется условие $\bar{g}(X, Y) = f\, g(X, Y)$ для метрик V_n и $\bar{V}_n$, где X, Y — произвольные касательные векторы, то это отображение является гомотетическим.*

Учитывая результат о первом интеграле, Худа и Микеш доказали следующую теорему [57].

Теорема 9. *Пусть $f : V_n \to \bar{V}_n$ — F_2-планарное (или геодезическое) отображение. Предположим, что в V_n существует описанная выше область V (канонический геодезический каркас) и в точках x_i, $i = 1, 2, \dots, N$, выполняются условия*

$$\bar{g}_{x_i} = k_i\, g_{x_i}. \tag{9}$$

Тогда отображение f является гомотетическим.

Сформулированная теорема существенно обобщает теорему 8, сформулированную выше, так как не требует ограничений на кривизну V_n. С другой стороны, теорема 8 интересна для случая, когда $\partial V = 0$ (что не исключается) или когда граница ∂V более специфическая.

4.4. Голоморфно-проективные отображения келеровых и эллиптически келеровых пространств. Как было уже сказано, голоморфно-проективные отображения келеровых и эллиптически келеровых пространств являются специальным случаем F_2-планарными отображениями. Детальный анализ основных уравнений этих отображений, полученых Й. Микешем и И. Гинтерлейтнер (см. [120, 129]) приводит к следующей теореме.

Теорема 10 (Худа, Микеш [92]). *Пусть (эллиптическое) келерово пространство K_n с метрическим тензором g допускает голоморфно-проективное отображение на $\bar{K}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в точке x_0, в окрестности которой K_n не имеет постоянной голоморфной кривизны, имеет место равенство $\bar{g} = k\,g$, то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k\,g$, $k = \mathrm{const}$, на всем пространстве K_n.*

Подобный результат имеет место для F_2^{ε}-планарных отображений (см. [109]).

5. Конформно-проективные и конформно-голоморфно-проективные отображения

5.1. Конформно-проективные отображения. В работах И. Гинтерлейтнер [100,101] исследовалась композиция конформного и геодезического отображений. Это привело к рассмотрению конформно-проективных отображений.

Диффеоморфизм $f : V_n \to \bar{V}_n$ называется *конформно-геодезическим отображением*, если

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3,$$

где

$$\begin{aligned} &f_1 : V_n = (M, g) \to {}^1V_n = (M, {}^1g) && \text{— конформное отображение,}\\ &f_2 : {}^1V_n = (M, {}^1g) \to {}^2V_n = (M, {}^2g) && \text{— геодезическое отображение,}\\ &f_3 : {}^2V_n = (M, {}^2g) \to \bar{V}_n = (M, \bar{g}) && \text{— конформное отображение.} \end{aligned}$$

Теорема 11. *Диффеоморфизм $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ является конформно-геодезическим тогда и только тогда, когда для любого векторного поля X имеют место следующие уравнения*:

$$\big(\bar{\nabla} - \nabla\big)_X X = 2\psi(X)\cdot X + g(X,X)\cdot\Sigma + \bar{g}(X,X)\cdot\Omega,$$

где ψ — дифференциальная 1-форма, Σ и Ω — векторные поля, для которых существуют функции ϱ_1, ϱ_2 и ϱ_3 на M, для каждого векторного поля X удовлетворяющие условиям

$$\nabla_X \varrho_1 = g(X,\Sigma), \quad \nabla_X \varrho_2 = \bar{g}(X,\Omega), \quad \nabla_X \varrho_3 = \psi(X).$$

Теорема 12 (Худа, Микеш [93]). *Пусть пространство V_n с метрическим тензором g допускает конформно-проективное отображение на пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в точке x_0, в окрестности которой V_n не имеет нулевого тензора конформной кривизны, имеет место равенство $\bar{g} = k\,g$, то отображение является конформным.*

5.2. Конформно-голоморфно-проективные отображения. Г. Худа и М. Шиха провели подобные исследования для отображений эрмитовых пространств.

Напомним, что риманово пространство $H^n = (M, g, F)$ называется (почти) *эрмитовым*, если в нем наряду с метрическим тензором g существует структура F, удовлетворяющая условиям $F^2 = -\,\mathrm{Id}$ и $g(X, FX) = 0$ для любого X (см. [110]). Более того, если $\nabla F = 0$, то пространство является кэлеровым. Классификацию почти эрмитовых пространств привели А. Грей и Л. М. Гервелла (см. [99]).

Диффеоморфизм $f : H_n \to \bar{H}_n$ называется *конформно-голоморфно-проективным отображением*, если

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3,$$

где

$$\begin{aligned} &f_1 : H_n = (M, g, F) \to {}^1H_n = (M, {}^1g, F) && \text{— конформное отображение,}\\ &f_2 : {}^1H_n = (M, {}^1g, F) \to {}^2H_n = (M, {}^2g, F) && \text{— гогоморфно-проективное отображение,}\\ &f_3 : {}^2H_n = (M, {}^2g, F) \to \bar{H}_n = (M, \bar{g}, F) && \text{— конформное отображение.} \end{aligned}$$

Теорема 13. *Диффеоморфизм $f : H_n \to \bar{H}_n$ является конформно-голоморфно-проективным тогда и только тогда, когда для любого векторного поля X имеют место следующие уравнения*:

$$\left(\bar{\nabla} - \nabla\right)_X X = 2\psi(X) \cdot X - 2\psi(FX) \cdot FX + g(X, X) \cdot \Sigma + \bar{g}(X, X) \cdot \Omega,$$

где ψ — дифференциальная 1-форма, Σ и Ω — векторные поля, для которых существуют функции ϱ_1, ϱ_2 и ϱ_3 на M, для каждого векторного поля X удовлетворяющие условиям

$$\nabla_X \varrho_1 = g(X, \Sigma), \quad \nabla_X \varrho_2 = \bar{g}(X, \Omega), \quad \nabla_X \varrho_3 = \psi(X).$$

Следующая теорема вытекает из теоремы 10 и результатов, полученных в [95] для голоморфно-проективных отображений конформно кэлеровых пространств.

Теорема 14. *Пусть f — конформно-голоморфно-проективное отображение почти эрмитовых пространств (M, g, F) и $(M, \bar{g}, \bar{F})$. Если метрики пропорциональны в x_0, т.е.*

$$\bar{g}_{ij}(x_0) = \mu \cdot g_{ij}(x_0), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

и не существует такого $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$C^h_{ijk}(x_0) = \alpha \cdot Q^h_{ijk}(x_0)$$

и $\nabla F = 0$ на U_{x_0}, то f — конформное отображение, где

$$Q^h_{ijk} = \delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij} + \frac{n-1}{3}(F^h_j F_{ik} - F^h_k F_{ij} + 2F^h_i F_{jk}).$$

6. Почти геодезические отображения пространств аффинной связности

Напомним основные понятия и теоремы теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, изложенные Н. С. Синюковым в [44, 45, 47–49].

Рассмотрим пространство аффинной связности A_n без кручения, отнесенное к локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ с объектом связности $\Gamma^h_{ij}(x)$.

Кривая $\ell : x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n $(n > 2)$ называется почти геодезической линией, если ее касательный вектор $\lambda^h = dx^h/dt$ удовлетворяет уравнениям

$$\lambda^h_2 = a(t) \cdot \lambda^h + b(t) \cdot \lambda^h_1, \tag{10}$$

где

$$\lambda^h_1 \equiv \lambda^h_{,\alpha}\, \lambda^\alpha, \quad \lambda^h_2 \equiv \lambda^h_{1,\alpha}\, \lambda^\alpha,$$

запятая обозначает ковариантное дифференцирование по связности пространства A_n, $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции указанного аргумента.

Отображение π пространства аффинной связности A_n на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ называется *почти геодезическим отображением*, если каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую линию пространства $\bar{A}_n$.

Теорема 15 (Н. С. Синюков, [48])**.** *Для того чтобы отображение A_n на $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей*

$$P^h_{ij} = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}$$

удовлетворял тождественно относительно $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ условиям

$$(P^h_{\alpha\beta,\gamma} + P^h_{\delta\alpha} P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = b\, P^h_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta + a\, \lambda^h, \tag{11}$$

где Γ^h_{ij}, $\bar\Gamma^h_{ij}$ — *компоненты объекта аффинной связности пространств* A_n *и* $\bar A_n$, $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ — *компоненты некоторого вектора,* a *и* b — *некоторые инварианты, зависящие от* $x^1, x^2, \dots, x^n$ *и* $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$.

В соответствии с характером зависимости инвариантов a и b от $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ Синюков выделил три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3:

1) Отображение $\pi : A_n \to \bar A_n$ является почти геодезическим типа π_1, если выполняются условия
$$P^h_{(ij,k)} + P^\alpha_{(ij} P^h_{k)\alpha} = \delta^h_{(i} a_{jk)} + b_{(i} P^h_{jk)}, \tag{12}$$
где a_{ij} — некоторый симметрический тензор, b_i — некоторый ковектор.
2) Отображение $\pi : A_n \to \bar A_n$ является почти геодезическим типа π_2, если выполняются условия
$$P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}, \tag{13}$$
$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\varphi_{j)} = \delta^h_{(i}\mu_{j)} + F^h_{(i}\rho_{j)}, \tag{14}$$
где ψ_i, φ_i, μ_i, ρ_i — некоторые векторы, F^h_i — аффинор.
3) Отображение $\pi : A_n \to \bar A_n$ является почти геодезическим типа π_3, если выполняются условия
$$P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \varphi^h\,\omega_{ij}, \tag{15}$$
$$\varphi^h_{,i} = \varphi^h\theta_i + \rho\delta^h_i, \tag{16}$$
где φ^h, ψ_i, θ_i — некоторые векторы, ω_{ij} — некоторый симметрический тензор и ϱ — некоторый инвариант.

Вопрос о полноте классификации почти геодезических отображений пространств аффинной связности долгое время был открыт.

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 16 (Березовский, Микеш [71,75])**.** *При размерности пространств* $n > 5$ *других типов почти геодезических отображений пространств аффинной связности, кроме* π_1, π_2 *и* π_3, *не существует.*

В силу того, что условия, характеризующие три типа бесконечно малых почти геодезических преобразований, аналогичны условиям, характеризующим три типа π_1, π_2 и π_3 почти геодезических отображений, имеет место следующая теорема.

Теорема 17 (Березовский, Микеш [71])**.** *При размерности пространств* $n > 5$ *других типов бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности, кроме* π_1, π_2 *и* π_3, *не существует.*

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 18 (Березовский, Микеш [71])**.** *При размерности пространств* $n > 5$ *существует только три типа* $(n-2)$*-проективных пространств* A_n.

Для общих пространств аффинной связности имеет место следующая теорема.

Теорема 19 (Березовский, Микеш [71])**.** *При размерности пространств* $n > 5$ *существует только три типа* π_1, π_2 *и* π_3 *почти геодезических отображений и бесконечно малых преобразований общих пространств аффинной связности* A_n.

Типы почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3 могут пересекаться. Укажем условия, при которых это происходит.

Типу π_2 принадлежат аналитически планарные отображения почти комплексных многообразий (со связностью без кручения) (С. Исихара [111], Я. Тасиро [141]), голоморфно проективные отображения классических, гиперболических и параболически кэлеровых пространств (Т. Оцуки, Я. Тасиро [111], М. Прванович [131]). См. также [1, 48, 51, 120, 129, 133, 137–140, 143].

Алгебраическую структуру (13) имеет также тензор деформации связности при отображении пространств аффинной связности с сохранением линейного комплекса геодезических линий (В. М. Чернышенко [56,58]). При этом на $\varphi_i(x)$ налагается условие дифференциального характера

$$\varphi_{(i,j)} = \chi_{(i}\varphi_{j)}, \tag{17}$$

где χ_i — некоторый ковариантный вектор. Для аффинора $F_i^h(x)$ никаких условий не появляется.

Типу π_3 принадлежат конциркулярные отображения римановых пространств (К. Яно [144]). Алгебраическую структуру (15) имеет также тензор деформации связности при отображении пространств аффинной связности с сохранением квадратического комплекса геодезических линий (В. М. Чернышенко [56,58]). При этом для тензора $\omega_{ij}(x)$ возникают условия дифференциального характера

$$\omega_{(ij,k)} = \theta_{(i}\omega_{jk)}, \tag{18}$$

где θ_i — некоторый ковариантный вектор. Для вектора φ^h в этом случае не появляется никаких условий.

Теорема 20 (Березовский, Микеш [10, 71])**.** *Если почти геодезическое отображение π является одновременно отображением типов π_1 и π_2, то π является отображением пространств аффинной связности с сохранением линейного комплекса геодезических линий.*

Теорема 21 (Березовский, Микеш [10, 71])**.** *Если почти геодезическое отображение π является одновременно отображением типов π_1 и π_3, то π является отображением пространств аффинной связности с сохранением квадратичного комплекса геодезических линий.*

Если в уравнениях (14) *аффинор F_i^h удовлетворяет неравенству*

$$F_i^h \neq \varrho\delta_i^h + \varphi^h a_i, \tag{19}$$

где φ^h, a_i — некоторые векторы, ϱ — некоторый инвариант, то отображения типов π_2 и π_3 не пересекаются.

Аналогичные теоремы имеют место для почти геодезических бесконечно малых преобразований пространств аффинной связности. Поэтому естественным образом выделяются отображения

$$\pi_{12} = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_{13} = \pi_1 \cap \pi_3.$$

Отображения π_{12} и π_{13} на основании теорем сохраняют линейный и квадратичный комплексы геодезических линий соответственно.

Отображения π_{12} характеризуются уравнениями (13), (14) и (17), а π_{13} — уравнениями (15), (16) и (18).

Таким образом, при определенных дополнительных условиях выделены попарно непересекающиеся типы почти геодезических отображений и преобразований:

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \pi_{12} = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_{13} = \pi_1 \cap \pi_3.$$

Выделенные типы при $n > 5$ дают полную попарно непересекающуюся классификацию почти геодезических отображений и бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности.

В силу того, что основные уравнения почти геодезических отображений первого типа нелинейны и достаточно сложны, они долгое время оставались наименее изученными.

Поэтому рассмотрим некоторые специальные почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности.

Теорема 22 (Березовский, Микеш). *Для того чтобы тензор Римана R^h_{ijk} являлся инвариантным геометрическим объектом относительно почти геодезических отображений пространств аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$A^h_{ijk} = A^h_{ikj}.$$

Пусть при отображении пространств аффинной связности A_n на $\bar{A}_n$ выполняются условия

$$P^h_{ij,k} + P^h_{ik,j} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k} - P^\alpha_{ik} P^h_{\alpha j} + \delta^h_{(i} a_{jk)}. \tag{20}$$

Такие отображения являются частным случаем почти геодезических отображений первого типа.

Уравнения (20) сведены к уравнениям вида

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k} + \delta^h_{(i} \tilde{a}_{jk)}, \tag{21}$$

где $\tilde{a}_{ij}$ — некоторый тензор.

Очевидно, для почти геодезических отображений, характеризующихся условиями (21), тензор A^h_{ijk} имеет вид

$$A^h_{ijk} = \delta^h_{(i} \tilde{a}_{ij)}.$$

Тогда на основании теоремы 22 получаем следующее утверждение.

Теорема 23 (Березовский, Микеш). *Тензор Римана R^h_{ijk} является инвариантным геометрическим объектом пространств аффинной связности относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями* (20).

Поскольку тензор Римана в аффинном пространстве обращается в нуль, то имеет место следующая теорема.

Теорема 24 (Березовский, Микеш). *Если аффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями* (20)*, на $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является аффинным пространством.*

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (20). Уравнения (20) сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных.

Рассматриваются канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности $A_n \to \bar{A}_n$, характеризующиеся следующими уравнениями (см. [48]):

$$P^h_{ij,k} + P^h_{ik,j} = -P^\alpha_{ij} P^h_{k\alpha} - P^\alpha_{ik} P^h_{j\alpha} + \delta^h_k a_{ij} + \delta^h_j a_{ik}, \tag{22}$$

где a_{ij} — некоторый симметрический тензор (запятая обозначает ковариантную производную в пространстве аффинной связности A_n).

Уравнения (22) сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных относительно функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$. Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает числа $n(n+1)^2/2$.

Теорема 25 (Березовский, Микеш). *Тензоры*

$$\overset{*}{W}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\Big(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j\Big), \quad W_{ij} = R_{ij} - R_{ji},$$

а также тензор проективной кривизны Вейля являются инвариантными геометрическими объектами относительно почти геодезических отображений первого типа, определяемых уравнениями (22).

Теорема 26 (Березовский, Микеш). *Если проективно-евклидово или эквиаффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение на $\bar{A}_n$, характеризующееся уравнениями* (22)*, то $\bar{A}_n$ является проективно-евклидовым или эквиаффинным пространством соответственно.*

Таким образом, проективно-евклидовы и эквиаффинные пространства образуют замкнутые классы относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (22).

В случае, когда тензор $a_{ij}(x)$ тождественно обращается в нуль, уравнения (22) вполне интегрируемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. Акад. наук СССР, ВИНИТИ, М. 1965, Геометрия, 1963. 165-212.
2. Березовский В.Е. Новая форма основных уравнений почти геодезических отображений типа π_1. Деп. в УкрНИИТИ 16.03.86. № 129, Ук 86.
3. Березовский В.Е. Почти геодезических отображениях пространств аффинной связности. Тез. сообщ. Всесоюзн. геометр. конф., Кишинев, 1986. С. 41.
4. Березовский В.Е. Почти геодезические отображения пространств аффинной связности первого типа, сохраняющие n-ортогональные системы гиперповерхностей. Тез. сообщ. Обл. конф. молодых ученых, Умань, 1990. С. 2.
5. Березовский В.Е. К вопросу о почти геодезических отображениях первого типа римановых пространств, при которых сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей. Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91. № 652, Ук 91.
6. Березовский В.Е. О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности типа π_1^*. Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91. № 654, Ук 91.
7. Березовский В.Е. О частном случае почти геодезических отображений пространств аффинной связности первого типа. Тез. докл. междунар. научной конф. «Лобачевский и современная геометрия», Казань, 1992. С. 12.
8. Березовский В.Е. Почти геодезические канонические отображения первого типа пространств аффинной связности. Материалы междунар. конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г.Ф. Лаптева, М. 1999. С. 6.
9. Березовский В.Е., Микеш Й. О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности. Тез. сообщ. Всесоюзн. геометр. конф., Одесса, 1984. С. 18.
10. Березовский В.Е., Микеш Й. Новая классификация почти геодезических отображений пространств аффинной связности. Деп. в УкрНИИТИ 08.05.91. № 653, Ук 91.
11. Березовский В.Е., Микеш Й. К классификации почти геодезических отображений. Тез. докл. респ. научно-метод. конф. посвященной 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского, Одесса, 1992. С. 54.
12. Березовский В.Е., Микеш Й. О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности. Тез. докл. 5-й междунар. конференции по геометрии и топологии памяти А.В. Погорелова, Черкассы, 2003. 14-15.
13. Березовский В.Е., Микеш Й. О частном случае почти геодезических отображений первого типа. Сб. трудов. Междунар. геометр. семинар. им. Г.Ф. Лаптева. Пенз. гос. пед. ун-т. Пенза, 2007, 7-17.
14. Березовский В.Е., Микеш Й. О почти геодезических канонических отображениях первого типа. Тез. докл. междунар. конференции «Геометрия в Одессе – 2009». Одесса, 2009. С. 43.
15. Березовський В.Е., Мікеш Й. Про майже геодезичні відображення першого типу. Український математичний конгрес, Київ. 2009. www.imath.kiev.ua/˜ congress2009/about.html
16. Березовский В.Е., Микеш Й. Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно риччи-симметрические пространства. Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-матем. науки, 151:4 (2009), 9-14.
17. Березовский В.Е., Микеш Й. (n-2)-проективные пространства первого типа. Тез. докл. междунар. конференции «Геометрия в Одессе – 2010». Одесса, 2010. С.
18. Березовский В.Е., Микеш Й. (n-2)-проективные пространства первого типа. Изв. Пензенск. гос. ун-та им. В.Г. Белинского. Физ.-мат. науки. 2011, 39-43.
19. Березовский В.Е., Микеш Й. Почти геодезические отображения пространств аффинной связности. Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и ее прилож. 126, 2013, 62–95.
20. Вавржикова Х., Микеш Й., Покорна О., Старко Г. Об основных уравнениях почти геодезических отображений $\pi_2(e)$. Изв. вузов, математика, 1 (536), 2007, 10–15. Перевод: Russ. Math. (Iz. VUZ) 51 (2007), no. 1, 8–12.

21. Веденяпин Д.В. О некоторых (n-2)-кратно проективных пространствах. Научн. докл. высш. школы, физ. матем. науки, 8, 1958, 119–125.
22. Гинтерлейтнер И., Микеш Й. Проективная эквивалентность и пространства эквиаффинной связности. Фундамент. и прикл. матем. 16:1 (2010), 47–54. Перевод: J. Math. Sci. 177:4 (2011), 546-550.
23. Гинтерлейтнер И., Микеш Й., Странска Я. Бесконечно малые F-планарные преобразования. Изв. вузов, математика, № 4, 2008, 13–18.
24. Домашев В.В., Микеш Й. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств. Мат. заметки 23:2 (1978), 297–303. Перевод: Math. Notes, 1978, 23:2, 160–163.
25. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1979. 246с.
26. Емельянов Ф.В., Кириченко В.Ф. О почти геодезических отображениях класса π_2 почти эрмитовых многообразий. Матем. заметки 90:4, 2011, 517–526. Перевод: Math. Notes, 90:4 (2011), 498–505.
27. Каган В.Ф. Субпроективные пространства. М.: Физматгиз, 1961.
28. Микеш Й. Геодезические и голоморфно-проективные отоображения специальных римановых пространств. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Одесский ун-т. 107 р. (1979).
29. Микеш Й. О геодезических отоображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств. Матем. заметки, 28:2, 1980, 313-317.
30. Микеш Й. О геодезических отоображениях пространств Эйнштейна. Матем. заметки, 28:6, 1980, 935-938.
31. Микеш Й. F-планарные отображения пространств аффинной связности. Arch. Math., Brno 27a, 53-56 (1991).
32. Микеш Й. Об F-планарных и f-планарных отображениях, преобразованиях и деформациях. Геом. обобщенных пространств. Пенза, 1992, 60-65.
33. Микеш Й. О специальных F-планарных отображениях пространств аффинной связности. Вестник Моск. ун-та, 1994, 3, 18-24.
34. Микеш Й. Геодезические, F-планарные голоморфно-проективные отображения римановых пространств и пространств аффинной связности. Дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук. Оломоуц, Прага, 180 с. (1995).
35. Микеш Й. F-планарные отображения на римановы пространства. Сб. трудов междунар. конф. “Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики”, том. 2, МГУ, ВИНИТИ, Москва, 138-145 (2001).
36. Микеш Й., Березовский В.Е. Геодезические отображения пространств аффинной связности на римановы пространства. Деп. в УкрНИИТИ 25.02.85. № 347, Ук 85.
37. Микеш Й., Гинтерлейтнер И. О фундаментальных уравнениях геодезических отображений и их обобщений. Итоги науки и техн., Сер. Совр. матем. и ее прилож. Тем. обзор 124. 2010, 7-34.
38. Микеш Й., Синюков Н.С. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. Изв. вузов, математика, 1983. 27, 1. 55–61.
39. Микеш Й., Юкл М., Юклова Л. Некоторые результаты о бесследовом разложении тензоров. Итоги науки и техники. Сер. совр. матем. и прилож. Тем. обз. 124, 2010, 139-158.
40. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. Наука, 1976.
41. Петров А.З. Моделирование физических полей. Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 4-5, 1968. 7-21.
42. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
43. Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М.Л. Геодезические отображения и деформации римановых пространств. Izd. CID, Podgorica, Изд. ОГУ, Одесса, 1997.
44. Синюков Н.С. Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств. Докл. АН СССР 151, 781–782 (1963). Перевод: Sov. Math., Dokl. 4, 1086–1088 (1963).
45. Синюков Н.С. Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и e-структуры. Матем. заметки, 7, 449-459 (1970).
46. Синюков Н.С. Бесконечно малые почти геодезические преобразования пространств аффинной связности и римановых пространств. Укр. геометр. сб. 9, 86–95 (1970).
47. Синюков Н.С. Теория геодезических отображений римановых пространств и ее обобщения. Дисс. на соиск. докт. физ.-мат. наук. Киев, 1971.

48. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
49. Синюков Н.С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 13 (1982), 3–26. Перевод: J. Sov. Math., 1984, 25:4, 1235–1249.
50. Синюков Н.С. Принципы теории почти геодезических отображений римановых пространств «в целом». Деп. ВИНИТИ, № 562-91В, 1991.
51. Синюков Н.С., Курбатова И.Н., Микеш Й. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств. Одесск. унив., 69с. 1985.
52. Синюков Н.С., Синюкова Е.Н. О голомофно-проективных отображениях специальных келеровых пространств. Матем. заметки, 36:3, 417-423 (1984).
53. Собчук В.С. Внутренние почти геодезические отображения. Изв. вузов. Матем. 324:5, 1989, 62-64.
54. Собчук В.С. Почти геодезические отображения римановых пространств на симметрические римановы пространства. Матем. заметки, 1975, 17, № 5, 757-783. Перевод: Math. Notes, 1975, 17:5, 450–454.
55. Солодовников А.С. Проективные преобразования римановых пространств. УМН 11:4(70) (1956), 45–116.
56. Чернышенко В.М. Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических. Днепр-к, Науч. зап. ун-та, 55, № 6, 1961, 105-110.
57. Худа Г., Микеш Й. Геодезические и F_2-планарные отображения при некоторых начальных условиях. Proc. Intern. Geom. Center 2008 1(1–2) 159–167 (2009).
58. Чернышенко В.М. Пространства со специальным комплексом геодезических линий. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1961, 253-268.
59. Шадный В.С. Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны. Мат. заметки, 25, № 2, 1979, 293-296. Перевод: Math. Notes, 1979, 25:2, 151–153.
60. Шапиро Я.Л. Геодезические поля направлений и проективные системы путей. Матем. сб. 36, 1955, 125–148.
61. Широков А.П. Пространства над алгебрами и их приложения. Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил., Тем. обзор. 73 (2002), 135–161. Перевод: J. Math. Sci., 2002, 108:2, 232–248.
62. Шиха М. Геодезические и голоморфно проективные отображения параболически келеровых пространств. Дисс. на соик. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Моск. пед. унив. 1992.
63. Яблонская Н.В. Почти геодезические оторажения пространства аффинной связности с кручением. Деп. в ВИНИТИ 19.06.79. № 2190 – 79 Деп.
64. Яблонская Н.В. Инвариантные геометрические объекты почти геодезических оторажений π_2 общих пространств аффинной связности. Деп. в ВИНИТИ 12.02.80. № 543 – 80 Деп.
65. Яблонская Н.В. О некоторых типах почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности. Укр. геом. сб., 27, (1984), 120–124.
66. Яблонская Н.В. О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности. Изв. вузов. Матем. 1986, 1, 78–80. Перевод: Sov. Math. 30:1, 105–108 (1986).
67. Adamów A. On reduced almost geodesic mappings in Riemannian spaces. Demonstr. Math. 15, 925-934 (1982).
68. Afwat M., Švec A. Global differential geometry of hypersurfaces. Rozpr. Cesk. Akad. Ved, Rada Mat. Prir. Ved 88:7, (1978) 75 pp.
69. Aminova A.V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. J. Math. Sci., New York, 113:3 (2003) 367-470.
70. Berezovski V.E. On special almost geodesic mappings of the type π_1. Satelite Conf. of ICM in Berlin, Brno, 1998, p. 7.
71. Berezovski V.E., Mikesh J. On classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces. Diff. geometry and its appl., Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl. 1988, 1989, 41–48.
72. Berezovski V.E., Mikeš J. On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. 35, 21–24 (1996).
73. Berezovski V.E., Mikeš J. On almost geodesic mappings of type π_1 which maintain a system n-orthogonal hypersurfaces. Conf. of Diff. Geom. Budapest, 1996. P. 21.
74. Berezovski V.E., Mikeš J. On almost geodesic mappings of the type π_1 of Riemannian spaces preserving a system n-orthogonal hypersurfaces. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Suppl. 59, 1999, 103-108.
75. Berezovski V.E., Mikeš J. On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. 43, 21-26 (2004).

76. Berezovski V.E., Mikeš J. On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection. Proc. of 11 Math. Conf. Kiev, 2006, p. 320.
77. Berezovski V.E., Mikeš J. On main equations in Cauchy type form of special almost geodesic mappings of type π_1. Proc. of 12 Math. Conf. Kiev, 2008, p. 500.
78. Berezovski V.E., Mikeš J. On special case of almost geodesic mappings of spaces with affine connection, where preserwing Ricci tensor. Proc. of 13 Math. Conf. Kiev, 2010, p. 55.
79. Berezovski V.E., Mikeš J. On almost geodesic mappings of type π_1 which preserve n-orthogonal system of hyperplanes of Riemannian spaces. Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе – 2010». Одесса, 2010, с. 71.
80. Berezovski V.E., Mikeš J., Vanžurová A. Canonical almost geodesic mappings of type π_1 onto pseudo-Riemannian manifolds. Diff. Geom. and its Appl. Proc. Conf., in Honour of L. Euler, Olomouc, August, 2007. World Sci. Publ. Comp., 2008, 65-76.
81. Berezovski V.E., Mikeš J., Vanžurová A. Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds. 9th Int. Conf. APLIMAT 2010, Bratislava, 2010.
82. Berezovski V.E., Mikeš J., Vanžurová A. Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 26, No. 2, 221-230 (2010).
83. A. Fundamental PDE's of the Canonical Almost Geodesic Mappings of Type $\tilde{\pi}_1$. arXiv:1006.3200, 2010, 18 pp.
84. Berezovski V.E., Mikeš J., Vanžurová A. On a class of curvature preserving almost geodesic mappings of manifolds with affine connection. 10th Int. Conf. APLIMAT 2011, Bratislava, 2011, 623–628.
85. Berezovski V.E., Mikeš J., Vanžurová A. Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type π_1. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37, No. 3, 647-659 (2014).
86. Brinkmann H.W. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. Math. Ann. 94, 119-145 (1925).
87. Chepurna O., Hinterleitner I. On the mobility degree of (pseudo-) Riemannian spaces with respect to concircular mappings. Miskolc Math. Notes 14:2 (2013) 561-568.
88. Chudá H., Mikeš J. F-planar mappings with certain initial conditions. 5th Int. Conf. APLIMAT 2006, Bratislava, 83–88.
89. Chudá H., Mikeš J. First quadratic integral of geodesics with certain initial conditions. 6th Int. Conf. APLIMAT 2007, Bratislava, 85–88.
90. Chudá H., Chodorov'a M., al Lami Raad J. On holomorphically projective mappings onto almost hermitian spaces. Aplimat, J. Appl. Math. Bratislava, 4 (2011), 667-672.
91. Chudá H., Chodorov'a M., Shiha M. On composition of conformal and holomorphically projective mappings between conformally Kählerian spaces. Aplimat, J. Appl. Math. (2012), 5:3, 91–96.
92. Chudá H., Mikeš J. On geodesic mappings with certain initial conditions. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 26:2 (2010) 337–341.
93. Chudá H., Mikeš J. Conformally geodesic mappings satisfying a certain initial condition. Arch. Math. (Brno) 47:5 (2011) 389–394.
94. Chudá H., Mikeš J., Chodorov'a M. On holomorphically projective mappings with certain initial conditions. APLIMAT – J. Appl. Math. Bratislava, (2011), 673–678.
95. Chudá H., Shiha M. Conformal holomorphically projective mappings satisfying a certain initial condition. Miskolc Math. Notes 14:2, 569–574 (2013).
96. Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton Univ. Press. (1926).
97. Eisenhart L.P. Non-Riemannian Geometry. Princeton Univ. Press. 1926., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 8 (2000).
98. Fučík S., Kufner A. Nonlinear differential equations. (Czech). TKI, SNTL, Praha, 1978.
99. Gray A., Hervella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 35–58.
100. Hinterleitner I. Special mappings of equidistant spaces. J. Appl. Math. (Bratislava) (2008).
101. Hinterleitner I. On holomorphically projective mappings of e-Kähler manifolds. Arch. Math. (Brno) 48:5 (2012) 333–338.
102. Hinterleitner I. Geodesic mappings on compact riemannian manifolds with conditions on sectional curvature. Publ. l'Inst. Math. 94, 108, 2013, 125–130.

103. Hinterleitner I., Mikeš J. On F-planar mappings of spaces with affine connections. Note Mat. 2007, 27:1, 111-118.
104. Hinterleitner I., Mikeš J. Projective equivalence and manifolds with equiaffine connection. J. Math. Sci. 2011, 177:4, 546–550.
105. Hinterleitner I., Mikeš J. On fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations. J. Math. Sci. 2011, 174:5, 537-554.
106. Hinterleitner I., Mikeš J. On holomorphically projective mappings from manifolds with equiaffine connection onto Kähler manifolds. Arch. Math., Brno 49:5, 295-302 (2013).
107. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic Mappings and Einstein Spaces. Geom. meth. in phys. Trends in Math. 331–335 (2013). arXiv:1201.2827v1 [math.DG].
108. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings of (pseudo-)Riemannian manifolds preserve class of differentiability. Miskolc Math. Notes 14:2 (2013) 575-582.
109. Hinterleitner I., Mikeš J., Peška P. On F_2^ε-planar mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds. Arch. Math. Brno, 50:5 (2014) 287-295.
110. Hrdina J. Almost complex projective structures and their morphisms. Arch. Math. (Brno) 45:4 (2009) 255–264.
111. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. Tohoku Math. J., II. Ser. 9, 273-297 (1957).
112. Kobayashi, S.; Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1, Interscience. Publ. N.Y.–London (1963), N.Y.–Dover, 1991.; Vol. 2, Interscince. Publ., N.Y.–London–Sydney (1969).
113. Kurbatova I.N. HP-mappings of H-spaces. Ukr. Geom. Sb. 27, (1984) 75–83.
114. al Lamy, Raad J.; Mikeš, J.; Škodová, M. On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kählerian spaces. Arch. Math. (Brno) 42, suppl., 291-299 (2006).
115. Levi-Civita, T. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. Ann. Mat. Milano, 24, Ser. 2, 255–300 (1886).
116. Mikeš J. F-planar mappings and transformations. Diff. Geometry and its Applications. Proc. of the Conference, August 24-30, 1986. Brno, Czechoslovakia, 1986, 245-254.
117. Mikeš J. Global geodesic mappings and their generalizations for compact Riemannian spaces. Proc. of Conf. Diff. Geom. and its Appl. Opava, (1992) 143–149.
118. Mikeš J. Special F-planar mappings of affinely connected spaces onto Riemannian spaces. Mosc. Univ. Math. Bull. 49:3, (1994) 15–21 ; transl. from Vestn. Mosk. Univ., Ser. I, No. 3, (1994) 18–24.
119. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces. J. Math. Sci., New York 78:3 (1996) 311-333.
120. Mikeš J. Holomorphically projective mappings and their generalizations. J. Math. Sci., New York 89:3 (1998) 1334–1353.
121. Mikeš J., Kiosak V., Vanžurová A. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Palacky University Press (2008) 220pp.
122. Mikeš J.; Báscó S.; Berezovski, V. Geodesic mappings of weakly Berwald spaces and Berwald spaces onto Riemannian spaces. Int. J. Pure Appl. Math. 45:3, 413-418 (2008).
123. Mikeš J., Berezovski V. Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces. Diff. geom. and its appl. Proc. of a colloq., Eger, Hungary, August 20-25, 1989. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 56, 491-494 (1992).
124. Mikeš J., Chodorová M. On concircular and torse-forming vector fields on compact manifolds. Acta Math. Acad. Paed. Nyiregyhaziensis (AMAPN), 2010, 27.
125. Mikeš J., Chudá, Hinterleitner I. Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 11:5, Article ID 1450044, 8p. (2014).
126. Mikeš J., Pokorná O., Vavříková H. On almost geodesic mappings $pi_2(e)$, $e = \pm 1$. Proc. Int. Conf. Aplimat, Bratislava, Part II, 315-321, (2005).
127. Mikeš J., Rachunek L. T-semisymmetric spaces and concircular vector fields. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Suppl. Ser. 69, 187–193 (2002).
128. Mikeš J., Škodová M. Concircular vector fields on compact manifolds, with affine connections. Publ. De la RSME, 10, 302–307 (2007).

129. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations. Olomouc: Publ. Palacky Univ. 2009, 304pp.
130. Otsuki T., Tashiro Y. On curves in Kaehlerian spaces. Math. J. Okayama Univ. 4, 57-78 (1954).
131. Prvanović M. Holomorphically projective transformations in a locally product space. Math. Balk. 1, 195-213 (1971).
132. Rachunek L., Mikeš J. On tensor fields semiconjugated with torse-forming vector fields. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. 44, 151–160 (2005).
133. Shiha, M. On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces. Diff. geometry and its appl. (Opava, 1992), 157–160, Math. Publ., 1, Silesian Univ. Opava, (1993).
134. Shiha M., Mikeš J. On holomorphically projective flat parabolically Kählerian spaces. Contemporary Geom. and Related Topics. Čigoja Publ. Comp. 250, 467–474 (2006).
135. Škodová M., Mikeš J., Pokorná O. On holomorphically projective mappings from equiaffine symmetric and recurrent spaces onto Kählerian spaces. Suppl. Rend. Circ. Matem. di Palermo. Ser. II 75, 309-316 (2005).
136. Sobchuk V.S., Mikeš J., Pokorná O. On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces. Novi Sad J. Math. 29:3, 309–312 (1999).
137. Stanković M.S., Zlatanović M.Lj., Velimirović Lj.S. Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the first kind. Czech. Math. J. 60:3, 635–653 (2010).
138. Stanković M.S., Zlatanović M.Lj., Velimirović Lj.S. Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind. Int. Electron. J. Geom. 3:2, 26–39, electronic only (2010).
139. Stanković M.S., Minćić S.M., Velimirović Lj.S. On equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces. Czech. Math. J. 54:3, 701–715 (2004).
140. Stanković M.S., Minćić S.M., Velimirović Lj.S. On holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces. Mat. Vesn. 54, No. 3-4, 195–202 (2002).
141. Tashiro Y. On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space. Math. J. Okayama Univ. 6, 147–152 (1957).
142. Vrănceanu G. Lecons de geometrie differentielle. Acad. RPR, Bucharest, 1957.
143. Yano K. Differential geometry of complex and almost comlex spaces. Pergamon Press, (1965).
144. Yano K. Concircular geometry, I, II, III, IV, V. Proc. Imp. Acad. Japan, 16 (1940) 195–200, 345–360, 442–448, 505–511; 18 (1942) 446–451.
145. Yano K. On the torse-forming directions in Riemannian spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 340-345 (1944).
146. Yano, K.; Bochner, S. Curvature and Betti numbers. Annals of Mathematics Studies 32, Princeton University Press, (1953).

Й. Микеш
Университет Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: josef.mikes@upol.cz

В. Березовский
Уманский национальный университет садоводства, Украина
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Е. Степанова
Palacky University, Olomouc, Czech Republic
E-mail: stephelena@list.ru

Г. Худа
Tomas Bata University, Zlin, Czech Republic
E-mail: chuda@ft.utb.cz