

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИЕ И РИЧЧИ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В. Е. Березовский¹, Й. Микеш², П. Пешка²

¹ Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

² Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская Республика

berez.volod@rambler.ru, josef.mikes@upol.cz, patrik_peska@seznam.cz

В данной работе основные уравнения геодезических отображений пространств аффинной связности на симметрические и Риччи симметрические пространства получены в виде замкнутой системы типа Коши в ковариантных производных. Найдены условия их интегрируемости. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение таких систем.

Ключевые слова: геодезические отображения, пространства аффинной связности, Риччи симметрические пространства

Напомним некоторые понятия теории геодезических отображений. Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n , называют *геодезической линией*, если ее касательный вектор параллелен вдоль нее.

Отображение $f : A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют *геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Известно (Berezovski, Bácsó, & Mikeš, 2015; Berezovski, Mikeš, & Peška, 2017), что для того чтобы отображение f пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ выполнялось условие

$$P_{ij}^h(x) = \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x),$$

где $P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$ — тензор деформации связностей при диффеоморфизме f , Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно, δ_i^h — символы Кронекера, $\psi_i(x)$ — некоторый ковектор.

Геодезическое отображение называют *нетривиальным*, если $\psi_i(x) \not\equiv 0$. Очевидно, что любое пространство аффинной связности A_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на некоторое другое пространство аффинной связности $\bar{A}_n$. Подобное предположение вообще говоря не верно в отношении геодезических отображений римановых пространств на римановы пространства. В частности, были выделены римановы пространства, не допус-

кающие нетривиальные геодезические отображения на римановы пространства (Berezovski et al., 2015, 2017).

Нами доказано в Mikeš, Berezovski et al (2015), что основные уравнения пространств аффинной связности на римановы пространства сводятся к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Основные уравнения геодезических отображений эквиаффинных пространств на римановы пространства сведены к замкнутой линейной системе уравнений типа Коши в ковариантных производных.

Пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ называют *симметрическим*, если тензор Римана в этом пространстве абсолютно параллелен (Berezovski et al., 2015, 2017). Симметрические пространства характеризуются условиями $\bar{R}_{ijk|m}^h = 0$, где «|» обозначает ковариантную производную по связности пространства $\bar{A}_n$.

Пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ называют *Риччи симметрическим*, если тензор Риччи в этом пространстве абсолютно параллелен. Риччи симметрические пространства характеризуются условиями $\bar{R}_{ij|m} = 0$.

Имеет место

Теорема 1. Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало геодезическое отображение на симметрическое пространство $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций $\bar{R}_{ijk}^h(x)$ и $\psi_i(x)$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ijk,m}^h &= 2\psi_m \bar{R}_{ijk}^h + \psi_i \bar{R}_{mjk}^h + \psi_j \bar{R}_{imk}^h + \psi_k \bar{R}_{ijm}^h - \delta_m^h \psi_\alpha \bar{R}_{ijk}^\alpha, \\ \psi_{i,j} &= \frac{1}{n-1} (\bar{R}_{ij} - R_{ij}) + \psi_i \psi_j - \frac{1}{n^2-1} (\bar{R}_{[ij]} - R_{[ij]}), \\ \bar{R}_{ijk}^h + \bar{R}_{ikj}^h &= 0 \Leftrightarrow \bar{R}_{ijk}^h + \bar{R}_{jki}^h + \bar{R}_{kij}^h = 0,\end{aligned}$$

где запятая обозначает ковариантное дифференцирование по связности пространства A_n , $\bar{R}_{ijk}^h$ — тензор Римана пространства $\bar{A}_n$, R_{ij} и $\bar{R}_{ij}$ — тензоры Риччи пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно, квадратными скобками обозначаем альтернирование по указанным индексам.

Теорема 2. Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало геодезическое отображение на Риччи симметрическое пространство $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало решение замкнутой системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций $\bar{R}_{ij}(x)$ и $\psi_i(x)$

$$\bar{R}_{ij,m} = 2\psi_m \bar{R}_{ij} + \psi_i \bar{R}_{mj} + \psi_j \bar{R}_{im},$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{n-1}(\bar{R}_{ij} - R_{ij}) + \psi_i \psi_j - \frac{1}{n^2-1}(\bar{R}_{[ij]} - R_{[ij]}).$$

Найдены условия интегрируемости указанных систем уравнений типа Коши. Установлены количества существенных параметров, от которых зависят их общие решения.

Список литературы

- Berezovski, V. E., Bácsó, S. & Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the riemannian curvature. *Ann. Math. Informat.*, 45, 3–10.
- Berezovski, V. E., Mikeš, J. & Peška, P. (2017). Geodesic mappings of manifolds with affine connection onto symmetric manifolds. In *18th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization*, Varna, June 3–8, 2016 (p. 99–104). Sofia: Avangard Prima.
- Mikeš, J., Berezovski, V. E. & at al (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University Press.
- Mikeš, J., Vanžurová, A. & Hinterleitner I. (2009) *Geodesic mappings and some generalizations*. Olomouc: Palacky University Press.
- Mikeš, J., Berezovski, V. E., Stepanova, E. & Chudà, H. (2016). Geodesic mappings and their generalizations. *J. Math. Sci. (New York)*, 217, 607–623.