В. Е. Березовский, Й. Микеш, О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, номер 2, 3–8

Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2014, №2, с. 3–8 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

В.Е. БЕРЕЗОВСКИЙ, Й. МИКЕШ

О КАНОНИЧЕСКИХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПЕРВОГО ТИПА ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Аннотация. В данной работе изучаются частные случаи канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности. Основные уравнения рассматриваемых отображений сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Получена оценка числа существенных параметров, от которых зависит общее решение. Приведен пример указанных отображений плоского пространства на плоское пространство. При этом отображении прямые линии одного пространства переходят в параболы другого пространства. Указанные почти геодезические отображения первого типа отличны от почти геодезических отображений второго и третьего типов.

Ключевые слова: каноническое почти геодезическое отображение первого типа, пространство аффинной связности.

УДК: 514.76

Введение. В шестидесятых годах Н.С. Синюковым [1] были рассмотрены почти геодезические отображения римановых и аффинносвязных пространств, основные результаты которых изложены в [2] и [3].

Теория почти геодезических отображений естественным образом развивалась во многих работах, например, [4]–[14]. Почти геодезические отображения первого типа, выделенные Н.С. Синюковым, исследовались В.Е. Березовским и Й. Микешем [4]–[7], Н.В. Яблонской [15]. Это направление, в частности, следует намеченному А.З. Петровым [16] плану моделирования физических процессов при помощи отображений и преобразований.

В данной работе изучаются частные случаи канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности. Основные уравнения рассматриваемых отображений сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение. Приведен пример таких отображений.

1. Канонические почти геодезические отображения. Напомним основные понятия теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, которые изложены в [2] и [3].

Рассмотрим n-мерное пространство аффинной связности A_n без кручения, отнесенное к системе координат $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Предполагаем, что $n > 2$, и все рассматриваемые функции считаем достаточно гладкими.

Поступила 01.10.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 201/11/0356 Грантового Агентства Чешской Республики.

Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n, называют *почти геодезической*, если вдоль нее существует двумерная параллельная площадка, содержащая ее касательный вектор.

Диффеоморфизм $f : A_n \to \overline{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Для того чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x) = \overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\,\lambda^h + b\,P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta,$$

где $A^h_{ijk} = P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}$, $\Gamma^h_{ij}(x)$ и $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$ — объекты аффинной связности пространств A_n и $\overline{A}_n$, λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных x^h и λ^h. Здесь и в дальнейшем знак “ , ” в нижнем индексе обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n.

Н.С. Синюковым [1]–[3] выделены три типа почти геодезических отображений: π_1, π_2 и π_3. Нами доказано [4], что при $n > 5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_1 характеризуются условиями на тензор деформации $A^h_{(ijk)} = a_{(ij}\delta^h_{k)} + b_{(i}P^h_{jk)}$, где a_{ij} — некоторый симметрический тензор, b_i — некоторый ковектор, δ^h_i — символы Кронекера, $(i\,j\,k)$ — симметрирование по указанным индексам без деления.

Если в указанном уравнении $b_i \equiv 0$, то отображение называют *каноническим.*

Известно [2], [3], что любое почти геодезическое отображение типа π_1 можно представить в виде композиции канонического почти геодезического отображения типа π_1 и геодезического отображения.

2. Специальные канонические почти геодезические отображения. Если при отображении пространств аффинной связности A_n и $\overline{A}_n$ выполняются условия

$$3P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} + a_{(ij}\delta^h_{k)}, \tag{1}$$

то $A^h_{ijk} = -\frac{1}{3}\,P^\alpha_{kj}P^h_{i\alpha} - \frac{1}{3}\,P^\alpha_{ki}P^h_{j\alpha} + \frac{2}{3}\,P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} + \frac{1}{3}\,a_{(ij}\delta^h_{k)}$ и тогда $A^h_{(ijk)} = a_{(ij}\delta^h_{k)}$. Поэтому такие отображения являются частным случаем канонических почти геодезических отображений первого типа π_1.

Рассматривая (1) как систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных относительно неизвестного тензора деформации P^h_{ij} и тензора a_{ij}, найдем условия их интегрируемости. Для этого ковариантно продифференцируем (1) по x^m, а затем проальтернируем по индексам k и m. С учетом тождества Риччи после преобразований получим

$$\begin{aligned} a_{i[k,m]}\delta^h_j + a_{j[k,m]}\delta^h_i + a_{ij,[m}\delta^h_{k]} = 3\,(-P^\alpha_{ij}R^h_{\alpha km} + P^h_{\alpha(i}R^\alpha_{j)km}) - \\ - \frac{1}{3}\,\big[P^\beta_{\alpha m}P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\beta} - P^\beta_{\alpha k}P^\alpha_{(ij}P^h_{m)\beta} + 2(a_{j[m}P^h_{k]i} + a_{i[m}P^h_{k]j}) + \\ + a_{\alpha(i}P^\alpha_{j)k}\delta^h_m - a_{\alpha(i}P^\alpha_{j)m}\delta^h_k + a_{\alpha m}P^\alpha_{k(i}\delta^h_{j)} - a_{\alpha k}P^\alpha_{m(i}\delta^h_{j)}\big], \end{aligned} \tag{2}$$

где $[i\,j]$ — альтернирование по указанным индексам и R^h_{ijk} — тензор Римана пространства A_n.

Условия интегрируемости (2) свернем по индексам h и m. В результате находим

$$a_{ik,j}+a_{jk,i}-(n+1)\,a_{ij,k}=3\,(-P^{\alpha}_{ij}R_{\alpha k}+P^{\beta}_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)k\beta})-$$
$$-\frac{1}{3}\,\bigl[P^{\beta}_{\alpha i}P^{\alpha}_{(kj}P^{\gamma}_{\gamma)\beta}-P^{\beta}_{\alpha k}P^{\alpha}_{(ij}P^{\gamma}_{\gamma)\beta}+(n+2)\,a_{\alpha(i}P^{\alpha}_{j)k}-2\,(a_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij}+a_{k(i}P^{\alpha}_{j)\alpha})\bigr]. \quad (3)$$

Проальтернируем уравнения (3) по индексам i и k. После преобразований получим

$$a_{jk,i}=a_{ij,k}+\frac{1}{n+2}\bigl[P^{\alpha}_{j[k}R_{i]\alpha}+P^{\alpha}_{\beta j}R^{\beta}_{[ik]\alpha}+P^{\alpha}_{\beta[i}R^{\beta}_{|j|k]\alpha}-$$
$$-\frac{1}{3}(P^{\alpha}_{\beta i}P^{\beta}_{(kj}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}-P^{\alpha}_{\beta k}P^{\beta}_{(ij}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}+(n+4)\,a_{\alpha[i}P^{\alpha}_{k]j}+2\,a_{j[i}P^{\alpha}_{k]\alpha})\bigr]. \quad (4)$$

После этого в уравнении (4) поменяем местами индексы i и j. Получим

$$a_{ik,j}=\ a_{ij,k}+\frac{1}{n+2}\,\bigl[P^{\alpha}_{i[k}R_{j]\alpha}+P^{\alpha}_{\beta i}R^{\beta}_{[jk]\alpha}+P^{\alpha}_{\beta[j}R^{\beta}_{|i|k]\alpha}-$$
$$-\frac{1}{3}(P^{\alpha}_{\beta j}P^{\beta}_{(ki}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}-P^{\alpha}_{\beta k}P^{\beta}_{(ji}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}+(n+4)\,a_{\alpha[j}P^{\alpha}_{k]i}+2\,a_{i[j}P^{\alpha}_{k]\alpha})\bigr]. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в соотношения (3), будем иметь

$$(n-1)\,a_{ij,k}=P^{\beta}_{\alpha\gamma}P^{\alpha}_{(ij}P^{\gamma}_{\gamma)\beta}+\frac{1}{n+2}\,\bigl[3(nP^{\alpha}_{ij}R_{\alpha k}-nP^{\alpha}_{\beta(i}R^{\beta}_{j)k\alpha}+P^{\alpha}_{k(i}R_{|\alpha|j)}-$$
$$-P^{\alpha}_{\beta(i}R^{\beta}_{|k|j)\alpha}-P^{\alpha}_{\beta k}R^{\beta}_{(ij)\alpha})+\frac{1}{3}(-nP^{\alpha}_{\beta k}P^{\beta}_{(ij}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}+(n^2+3n)\,a_{\alpha(i}P^{\alpha}_{j)k}-$$
$$-2(n+1)\,(a_{k(i}P^{\alpha}_{j)\alpha}+4(a_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij}-a_{ij}P^{\alpha}_{k\alpha})-P^{\alpha}_{\beta i}P^{\beta}_{(kj}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}-P^{\alpha}_{\beta j}P^{\beta}_{(ki}P^{\gamma}_{\gamma)\alpha}))\bigr]. \quad (6)$$

Легко видеть, что уравнения (1) и (6) в данном пространстве A_n представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно неизвестных функций $P^h_{ijk}(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x)=P^h_{ji}(x),\quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x). \quad (7)$$

Тем самым доказана

Теорема. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями* (1), *на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши* (1), (6) *и* (7) *относительно неизвестных функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Из свойств этой системы уравнений вытекает, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превосходит число $r\le\frac{1}{2}\,n(n+1)^2$.

Наконец, рассмотрим уравнения (1) для случая, когда тензор a_{ij} тождественно обращается в нуль. В этом случае уравнения (1) принимают более простой вид

$$P^h_{ij,k}=-\frac{1}{3}\,P^{\alpha}_{(ij}P^h_{k)\alpha}. \quad (8)$$

Условиями интегрируемости уравнений (8) являются

$$P^{\alpha}_{ij}R^h_{\alpha km}+P^h_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)km}=\frac{1}{9}\,(P^{\alpha}_{\beta m}P^{\beta}_{(ij}P^h_{k)\alpha}-P^{\alpha}_{\beta k}P^{\beta}_{(ij}P^h_{m)\alpha}).$$

Очевидно, тензор деформации $P^h_{ij}(x)$, удовлетворяющий уравнениям (1), имеет дополнительное свойство

$$P^h_{ij,k}=P^h_{ik,j}. \quad (9)$$

3. Канонические почти геодезические отображения плоского пространства. В заключение покажем существование решения уравнений (9) в плоском пространстве. Предположим, что плоское пространство A_n отнесено к аффинной системе координат $x^1, x^2, ..., x^n$, в которой, как известно, являются нулевыми компоненты символов Кристоффеля Γ^h_{ij}. В этой системе координат ковариантные производные становятся частными. Таким образом,

$$P^h_{ij,k} = \partial P^h_{ij} / \partial x^k.$$

Из условий (9) вытекает, что тензор деформации P^h_{ij} будет иметь более специфическую структуру

$$P^h_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi^h(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{10}$$

где $\varphi^h(x)$ — некоторые функции. С другой стороны, из (10) следуют условия (9).

Ограничимся указанием частного решения уравнения (6), не исследуя сложную задачу об общем решении.

Очевидно, если

$$\varphi^h(x) = (x^h - c^h) \cdot \ln |x^h - c^h|, \tag{11}$$

где c^h — некоторые постоянные, то тензор деформации P^h_{ij}, определяемый условиями (10), является решением уравнений (8).

В системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ тензор деформации P^h_{ij} имеет вид

$$P^h_{hh} = \frac{1}{x^h - c^h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n,$$

а остальные компоненты равны нулю.

Легко убедиться, что при таком строении тензора деформации отображение будет отличным от типов π_2 и π_3.

Заметим, что типы почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3 могут пересекаться. В частности, при пересечении π_1 и π_2 сохраняется линейный комплекс геодезических, а при пересечении π_1 и π_3 — квадратичный комплекс геодезических [4].

4. Пример почти геодезических отображений первого типа плоского пространства. Приведем пример почти геодезического отображения первого типа, определяемого уравнениями (8), плоского пространства A_n на плоское пространство $\overline{A}_n$.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n$ — афинные координаты A_n и $\overline{A}_n$ соответственно. Точечное отображение

$$\overline{x}^h = \frac{1}{2}\, c^h_\alpha \, (x^\alpha - c^\alpha)^2 + x^h_\circ, \tag{12}$$

где c^h_i, c^h, $x^h_\circ$ — некоторые постоянные, причем $x^h \neq c^h$, $\det |c^h_i| \neq 0$, определяет почти геодезическое отображение первого типа пространства A_n и $\overline{A}_n$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор деформации связностей P^h_{ij} в системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеет вид (11).

При таком отображении прямые линии пространства A_n, которые, как известно, определяются уравнениями $x^h = a^h + b^h\, t$, где t — параметр, переходят в параболы пространства $\overline{A}_n$, определяемые уравнениями $\overline{x}^h = D^h + E^h\, t + F^h\, t^2$, где

$$D^h = \frac{1}{2}\, c^h_\alpha \, (a^\alpha - c^\alpha)^2, \quad E^h = c^h_\alpha \, (a^\alpha - c^\alpha)\, b^\alpha, \quad F^h = \frac{1}{2}\, c^h_\alpha \, (b^\alpha)^2.$$

Исключение представляют прямые, для которых векторы E^h и F^h коллинеарны. В этом случае их образами являются прямые.

Формулы (12) порождают семейство почти геодезических преобразований типа π_1 плоского пространства, если считать коэффициенты c_i^h, c^h и $x_\circ^h$ непрерывными параметрами.

Литература

[1] Синюков Н.С. *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и римановых пространств*, ДАН СССР **151** (4), 781–782 (1963).

[2] Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств* (Наука, М., 1979).

[3] Синюков Н.С. *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и римановых пространств*, Итоги науки и техн. Пробл. геометрии **13**, 3–26 (ВИНИТИ, М., 1982).

[4] Berezovski V., Mikeš J. *On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. **35**, 21–24 (1996).

[5] Berezovski V., Mikeš J., Vanžurová A. *Canonical almost geodesic mappings of type π_1 onto pseudo-Riemannian manifolds*, Diff. Geom. and Appl. Proc. Conf. (Olomouc, August, 2007), 27–31 (World Sci. Publ. Comp., 2008).

[6] Березовский В.Е., Микеш Й. *Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно Риччи-симметрические пространства*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **151** (4) 9–14 (2009).

[7] Berezovski V., Mikeš J., Vanžurová A. *Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N. S.) **26** (2), 221–230 (2010).

[8] Аминова А.В. *Группы почти проективных движений пространств аффинной связности*, Изв. вузов. Матем., № 4, 71–75 (1979).

[9] Собчук В.С. *Внутренние почти геодезические отображения*, Изв. вузов. Матем., № 5, 62–64 (1989).

[10] Микеш Й., Синюков Н.С. *О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности*, Изв. вузов. Матем., № 1, 63–70 (1983).

[11] Mikeš J. *F-planar mappings and transformations*, Diff. Geom. and Appl. Proc., August 24–30, 1986 (Brno, Czechoslovakia), p. 245–254.

[12] Микеш Й. *О специальных F-планарных отображениях пространств аффинной связности*, Вестн. Моск. ун-та, № 3, 18–24 (1994).

[13] Mikeš J. *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math. Sci., New York, **89** (3), 1334–1353 (1998).

[14] Hinterleitner I., Mikeš J. *On F-planar mappings of spaces with affine connections*, Note Mat. **27** (1), 111–118 (2007).

[15] Яблонская Н.В. *О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности*, Изв. вузов. Матем., № 1, 78–80 (1986).

[16] Петров А.З. *Моделирование физических полей*, Гравитация и теория относительности (Изд-во Казанск. ун-та, Казань), № 4–5, 7–21 (1968).

В.Е. Березовский

заведуюший кафедрой математики и физики,
Уманский национальный университет садоводства,
ул. Институтская, д. 1, г. Умань, 20305, Украина,

e-mail: Berez.Volod@rambler.ru

Й. Микеш

профессор, кафедра алгебры и геометрии,
университет им. Ф. Палацкого,
ул. 17. листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77146, Чешская Республика,

e-mail: Josef.Mikes@upol.cz

V.E. Berezovskii and J. Mikeš

Canonical almost geodesic mappings of the first type of manifolds with affine connection

Abstract. In this paper we study special cases of canonical almost geodesic mappings of the first type of manifolds with affine connection. We reduce basic equations of these mappings to a closed Cauchy-type system with respect to covariant derivatives. We obtain estimates for essential parameters that affect the general solution. We give examples of such mappings of some flat space onto another one. Such mappings transform straight lines in one space into parabolas in another one. The mentioned almost geodesic mappings of the first type differ from almost geodesic mappings of the second and third types.

Keywords: canonical almost geodesic mapping of the first type, manifold with affine connection.

V.E. Berezovskii

Head of the Chair of Mathematics and Physics,
Uman National University of Horticulture,
1 Institutskaya str., Uman, 20305 Ukraine,

`e-mail:` Berez.Volod@rambler.ru

J. Mikeš

Professor, Chair of Algebra and Geometry,
Palacky University,
12 17. listopadu str., Olomouc, 77146 Czech Republic,

`e-mail:` Josef.Mikes@upol.cz